

SHOUT
SHARE **IT**



MEMORIE
DI
MATEMATICA
E FISICA
DELLA
SOCIETÀ ITALIANA
TOMO IV.



V E R O N A
PER DIONIGI RAMANZINI
MDCCLXXXVIII.





CATALOGO

D E M E M B R I

DELLA

SOCIETÀ ITALIANA.

PRESIDENTE

ANTONMARIO LORGNA Cavaliere della sacra Religione de' Santi Maurizio e Lazzaro, Brigadiere, e Governatore delle Scuole Militari. *VERONA.*

SOCI ATTUALI

GIOVANNI ARDUINO Professore di Mineralogia, e di Chimica Metallurgica, e Pubblico Soprintendente alle cose agrarie dello Stato Veneto. *VENEZIA.*

CARLO BARLETTI delle Scuole Pie, Professore di Fisica generale nella R. I. Università di Pavia. *PAVIA.*

TEODORO BONATI Professore d'Idrostatica nell' Università Pontificia di Ferrara, ed Inspettore dei fiumi del Ferrarese. *FERRARA.*

ANTONIO CAGNOLI Astronomo. *VERONA.*

LEOPOLDO MARCANTONIO CALDANI Primario Professore ordinario di Medicina storica, e di Anatomia nell' Università di Padova. *PADOVA*.

SEBASTIANO CANTERZANI Professore di Matematica nella Pontificia Università di Bologna, e Secretario perpetuo dell' Istituto delle Scienze. *BOLOGNA*.

ANGELO ABATE DE CESARIS Astronomo nel Regio Osservatorio di Milano. *MILANO*.

GIOVANNI FRANCESCO CIGNA Professore di Anatomia nella Regia Università di Torino. *TORINO*.

DOMENICO CIRILLI Professore di Medicina Teorica nella Regia Università di Napoli. *NAPOLI*.

DOMENICO COTUNIO Professore di Anatomia nella Regia Università di Napoli. *NAPOLI*.

PAOLO DELANGES Capitano degl' Ingegneri Veneti, e Professore di Matematica nelle Scuole Militari. *VERONA*.

PIETRO FERRONI Idraulico di S. A. R. il G. Duca di Toscana. *FIRENZE*.

FELICE FONTANA Direttore del Regio Gabinetto Fisico di S. A. R. il G. Duca di Toscana. *FIRENZE*.

GREGORIO FONTANA delle Scuole Pie, Professore di Matematica Superiore nella R. I. Università di Pavia. *PAVIA*.

ALBERTO ABATE FORTIS Professore di Storia Naturale. *NAPOLI*.

VITTORIO FOSSOMBRONI Cavaliere dell' incl. Ordine Militare di Santo Stefano di Toscana. *AREZZO*.

MICHELE GIRARDI Medico di Camera di S. A. R.

di Parma, Presidente al Gabinetto di Storia naturale, e Professore della medesima, e di Anatomia. *PARMA*.

LODOVICO DE LA GRANGE Presidente Onorario dell' Accademia delle Scienze di Torino. *PARIGI*.

MARSILIO LANDRIANI Cavaliere dell' incl. Ordine militare di Santo Stefano di Toscana, e Regio Professore di Fisica Sperimentale. *MILANO*.

VINCENZO MALACARNE Direttore delle Regie Terme Acquee, e Chirurgo Maggiore del Reale Presidio di Torino. *TORINO*.

GIOVANNI FRANCESCO Malfatti Professore di Matematica nella Pontificia Università di Ferrara. *FERRARA*.

CARLO LODOVICO CONTE MOROZZO Maggiore del Reggimento di Susa di S. M. il Re di Sardegna, e Vice-Presidente dell' Accademia Reale delle Scienze di Torino. *TORINO*.

PIETRO MOSCATI Regio Direttore Generale degli Spedali di Milano. *MILANO*.

BARNABA ABATE ORIANI Astronomo nel Reale Osservatorio di Milano. *MILANO*.

PIETRO PAOLI Professore di Matematica nella Regia Università di Pisa. *PISA*.

ERMENEGILDO PINI Ch. Reg. B. Professore di Storia Naturale. *MILANO*.

GIORDANO CONTE RICCATI. *TREVISO*.

PIETRO ROSSI Professore di Logica nella Regia Università di Pisa, e Naturalista. *PISA*.

GIUSEPPE ANGELO CONTE SALUZZO Gentiluomo
a ij

di Camera di S. M. il Re di Sardegna , e Presidente dell' Accademia Reale delle Scienze di Torino. *TORINO*.

GIROLAMO SALADINI Patrizio Lucchese, Canonico nella Metropolitana di Bologna. *BOLOGNA*.

LEONARDO SALIMBENI Capitano degl' Ingegneri Veneti , e Professore di Matematica nelle Scuole Militari. *VERONA*.

ANTONIO SCARPA Professore di Anatomia , ed operazioni Chirurgiche nella R. I. Università di Pavia. *PAVIA*.

GIUSEPPE SLOP DE CADENBERG Professore di Astronomia nella Regia Università di Pisa. *PISA*.

LAZARO ABATE SPALLANZANI Professore di Storia Naturale nella R. I. Università di Pavia , e Soprintendente al Pubblico Museo della medesima. *PAVIA*.

SIMONE CONTE STRATICO Professore di Matematica, e di Fisica Sperimentale nell' Università di Padova. *PADOVA*.

GIUSEPPE VAIRO Professore di Chimica nella Regia Università di Napoli. *NAPOLI*.

GIOVANNI BATTISTA ABATE VENTURI Professore di Matematica nell' Università di Modena. *MODENA*.

ALESSANDRO VOLTA Professore di Fisica Sperimentale nella R. I. Università di Pavia. *PAVIA*.

VERARDO ZEVIANI Medico-Fisico. *VERONA*.

v

S O C J E M E R I T I

* * * * *

S O C J O N O R A R J

ANGELO MONSIGNORE FABRONI Presidente della R.
Università di Pisa, e Priore nell' incl. Ordine di Santo Ste-
fano di Toscana. *PISA*.

IPPOLITO MARCHESE PINDEMONTI Patrizio Vene-
to, e Cavaliere Gerosolimitano. *VENEZIA*.

S O C J S T R A N I E R I

M. ACHARD. *BERLINO*.

M. BAILLY *PARIGI*.

M. BONNET. *GINEVRA*.

M. LE COMTE DE BORN. *VIENNA*.

M. LE COMTE DE BUFFON. *PARIGI*.

M. CAMPER. *AMSTERDAM*.

M. CAMPOMANES. *MADRID*.

M. LE MARQUIS DE CONDORCET. *PARIGI*.

M. FRANKLIN. *FILADELFIA*.

M. NARVOYSZ. *WILNA*.

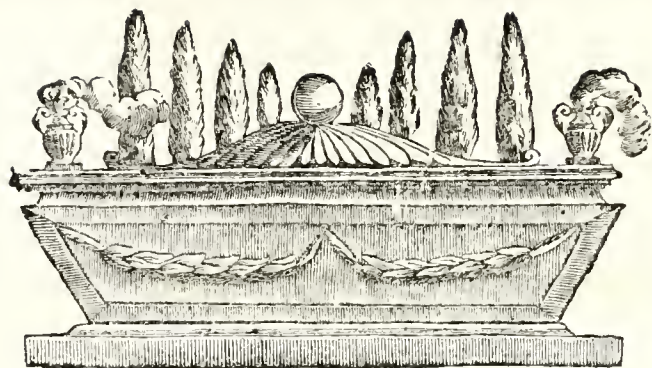
M. PALLAS. *PIETROBURGO*.

M. PRYESTLEY. *LONDRA*.

S E C R E T A R J

AGOSTINO ABATE VIVORIO Professore di Geografia,
e Storia nelle Scuole Militari di Verona, Secretario per-
petuo, e Amministratore. *VERONA*.

GIUSEPPE ABATE TOMMASELLI Vice-Secretario, e
Direttore della Stampa. *VERONA*.





E L O G I O

DELL' ABATE RUGGIERO GIUSEPPE BOSCOVICH

Scritto

Da Monsignor ANGELO FABRONI.

L'ABATE RUGGIERO GIUSEPPE BOSCOVICH nacque in Ragusi il dì 18 Maggio dell'anno 1711 da Niccolò Boscovich, che dal dispotico vicino dominio de' Turchi era si trasportato colle sue sostanze in quella libera città, e da Paola Bettera, ambedue d'onestissime famiglie. La Madre visse fino all'età di 103 anni, il Padre tanto da poter ben educare sei figli maschi, l'ultimo de' quali era il nostro Rug-

giero , e tre femmine , tutti d' un maraviglioso talento , e d' una singolar propensione per la poesia . Sono alle stampe versi illirici di Pietro il maggior de' fratelli , e di Anna , e que' latini di Bartolommeo Gesuita pubblicati dal Comino colle poesie del Roti eguagliano in eleganza di stile e in sublimità di pensieri l' elegie di Properzio . Era anch' egli buon filosofo , e non dispregevole matematico , e finì la sua vita mentr' era maestro in Recanati . Ruggiero mosso dal suo esempio vestì l' abito de' Gesuiti , e a questo fine in compagnia del medesimo e di altri due Gesuiti , che in patria aveva avuti maestri di gramatica e di rettorica , Stefani e Bindi , passò a Roma nel Settembre dell' anno 1725 . Quivi rinnovò gli studj delle belle lettere sotto l' infelice scorta del P. Scapecchi , attese di poi alla filosofia sotto il P. Carlo Noceti noto per gli elegantissimi poemetti latini sull' Iride e sull' Aurora Boreale , e fu allora che si manifestò in lui un' inclinazione naturale verso gli studj fisici , e matematici , che fuol quasi sempre annunziare i gran talenti . Si pose a studiar da se con trasporto quel , che non poteva insegnarli il Maestro , e che avrebbe potuto spaventare ogni altro fuor che lui alla prima vista . Ebbe dopo il prim' anno dello studio della filosofia un altro precettore di matematica , e fu questi il P. Borgondio , che quantunque uomo di talento e applicato dovè taticar non poco per tener dietro allo scolare , che lo precorreva . La fatica però non arriva mai ad eguagliare i doni gratuiti della natura , la quale fu sì liberale verso il Boscovich , che prima d' entrare nella scuola di matematica si era già formato una geometria tutta sua propria fino a trovar da se la dimostrazione della 47 proposizione del libro I. d' Euclide , di cui come di altri problemi e teoremi geometrici aveva inteso discorrere dal suo maestro di logica .

In un sol giorno apprese dal Borgondio l' aritmetica , in un altro i principj dell' algebra Cartesiana , e così con una rapidità

rapidità più che sorprendente scorreva il vasto campo delle matematiche. Invitato dal Maestro alla soluzione del caso irreducibile dopo d'aver fatto una quantità di trasformazioni di formole credè d'averla trovata. Ma s'avvide ben presto dell'errore, nè per questo si pentì della faticosa ricerca, perchè servì a facilitargli l'uso del calcolo de' finiti. Entrò da se nell'ampio mare del calcolo differenziale, di cui appena aveva qualche idea il Borgondio, e potè con questo potente soccorso intendere il gran libro de' Principj del Newtono, che furono come un fuoco celeste per animarlo alle grandi scoperte. Quando vide il Maestro che egli aveva potuto trovare da se molte dimostrazioni più semplici perchè più particolari di tutto ciò che appartiene alla teoria della gravità generale applicata alle sezioni coniche per uso dell'astronomia, con quella sincerità, che è propria dell'anime virtuose, disse: *costui comincia, dove io finisco*. Una passione ardente per sì fatti studj fin d'allora palesò un carattere estremamente avido di gloria; imperocchè alla fine non si sostengono gran fatiche senza gran motivi, e la repubblica delle lettere ha i suoi ambiziosi non men che i gran corpi politici, e le gran Corti. La maniera con cui esprimeva il piacere ch'aveva provato nella scoperta della verità, e in servir di guida ai suoi maestri medesimi, era sì viva e sì animata, che otteneva facilmente perdono in vista del bene e della gloria che preparava a se e alla sua Compagnia. Ei fu che animò il Noceti a ristampare il poemetto sull'Iride, ei gli somministrò la materia onde impinguerlo, ei l'arricchì di note, e fece lo stesso per l'altro poemetto sull'Aurora Boreale. Queste note lo rendettero celebre non solo presso gl'Italiani, ma anche presso i Francesi. Imperocchè contengono esse tutto quel che appartiene alla storia e alla teoria di questi due fenomeni. Adoprando la geometria degl'infinitamente piccoli, dimostrò con maravigliosa semplicità le formole enunziate e non di-

mostrate dal Newtono sull'Iride , e particolarmente intorno all'angolo massimo e minimo , che formano i raggi chiamati efficaci ed essenziali, e provò contro il parer di lui, che Marc' Antonio de Dominis non potè, come uomo sfornito di dottrina, somministrare al Cartesio la fisica spiegazione di questo fenomeno, e che nè tampoco, come pretendevano gli Scrittori degli Atti di Lipsia , l'apprendesse dal Keplero. Trattò anche più copiosamente le cose appartenenti all'Aurora Boreale, perchè oltre le note al poema del Noceti distese cinque dialoghi pastorali ad inchiesta degli Arcadi suoi colleghi, che vollero esser informati della spiegazione d'un fenomeno, che allora chiamava a se gli occhi di tutti, e le meditazioni di molti filosofi. Questi cinque dialoghi non costarono al nostro Filico che la fatica di cinque notti: due giovani Arcadi l'imparavano a mente, e recitandoli fecero rimbombar d'applausi il bosco Parasio. Vi si spiegano e vi si confermano l'idee del Sig. Mairan , che ripeteva il fenomeno da qualche parte più crassa dell' ammosfera solare discesa verso la terra, e questi grato al Boscovich nella ristampa della sua opera sull'Aurora Boreale lo citò con lode più volte, e lo annunciò al mondo tutto come un genio, che meritava il glorioso titolo di Filosofo e di Matematico, e come tale lo fece arrolare dall' Accademia delle Scienze nel numero de' suoi corrispondenti.

Egli anche prima di questo tempo aveva pubblicato alcune dissertazioni, delle quali egli stesso e i suoi amici erano stati contentissimi. Imperocchè terminato che ebbe il corso triennale di filosofia, quantunque fosse obbligato dalle leggi dell'Istituto a insegnare gramatica ed umanità (e le insegnò prima in Roma, poi in Fermo, e poi di nuovo in Roma) non perdè mai di vista i suoi studj favoriti, ed era invitato dal Borgondio medesimo a trattare quando un argomento quando un altro, che poi faceva pubblicamente difendere nel-

la sua scuola di matematica. La prima di queste dissertazioni pubblicata l'anno 1736 ha per oggetto le macchie del Sole. Ei dà a questo pianeta, come alla Terra, una doppia ammosfera, una più densa, l'altra più leggera atta ad esser rarefatta, e quando più e quando meno elevata. Vuol che la prima abbia ancor le sue nuvole, e che da questa debbano ripeterfi le macchie del Sole, le quali compariscono sotto diversi aspetti, or si dividono, or si riuniscono, or si vedono in una, ed ora in tutte le parti del disco solare. Da questa ammosfera ei deduceva ancora la cagione dell'anello più largo, che circonda il pianeta nell'eclisse totale, e della luce, che tanto più s'indebolisce quanto più s'allontana dal lembo, perchè quanto più l'atmosfera s'innalza, tanto più si rarefa. Questa spiegazione, come è credibile, ebbe i suoi oppositori, ma questo stesso accrebbe nel nostro Filosofo la voglia di difenderla. L'osservazione del passaggio di Mercurio sotto il Sole, quella d'un'Aurora Boreale, fenomeni accaduti nell'an. 1737, furono l'argomento di due altre dissertazioni; e per penetrare più addentro ne'misterj dell'astronomia, dopo d'aver ragionato del nuovo uso del telescopio diottrico per determinare gli oggetti celesti (a), prese a trattare la più celebre delle questioni d'allora, della figura della Terra. Dopo d'aver prima esaminati in una dissertazione a parte gli argomenti degli antichi, che la volevano sferica, passò in un'altra all'esame dell'osservazioni e dell'ipotesi de' moderni, e mostrò che da queste non si deduceva concludentemente l'allungamento, o lo schiacciamento di essa ai poli, che perciò era vano il tentativo di provare dalla figura il moto della medesima. Le posteriori osservazioni han con-

b iij

(a) Questa dissertazione stampata in Roma nel 1739. fu riprodotta in-
 tera negli Atti di Lipsia dell'an. 1740.

fermati i dubbj del Boscovich, e i partigiani della figura ellittica, per molti e grandi che sieno gli argomenti in favor di essa, dovranno pur confessare, che non vanno esenti da difficoltà difficilissime a sciogliersi. Queste furono le dissertazioni che fece per uso della scuola del P. Borgondio ne' cinque anni che fu maestro o di gramatica o d'umanità, e ne' tre primi del suo corso teologico. Imperocchè al principio del quarto dopo d'aver date prove che egli non era stato sì addetto allo studio delle verità dimostrate da trascurare quello delle verità rivelate, con raro e forse unico esempio fra' suoi gli fu dato per successore nella scuola di matematica e dispensato dal compire il quart' anno in quella di teologia.

Anche prima di questo tempo mentre era nel Seminario Romano Prefetto soprannumerario aveva fatta prova nell'istruzione del giovane Molinari dell'utilità dei suoi Elementi geometrici ridotti a quattordici sole proposizioni, e di questi si servì nella pubblica scuola. Formano essi un quadro di tutto l'edifizio della scienza, in cui specialmente sono indicati i principali fonti d'onde naturalmente derivano tutte le altre geometriche verità. Obbliga esso i giovani a non vagare nella varietà degli oggetti, loro facilita la ricordanza de' principali, e li pone in istato, anzi in necessità di supplire da loro medesimi molte dimostrazioni intermedie, esercizio utilissimo per fortificare e incoraggiare que'talenti, che la natura ha creati per sì fatti studj. Non altrimenti fu difesa dopo l'una e l'altra trigonometria, e confessò l'Autore che se mille volte avesse dovuto ristamparle non avrebbe trovata cosa nè da aggiungere, nè da levare, nè da mutare in esse. Ma il capo d'opera de' suoi Elementi matematici sono le sezioni coniche, che però non vider la luce prima dell'anno 1755. Parte egli da una generalissima definizione o non osservata, o poco curata da altri, e da essa con non mino-

re chiarezza che profondità si conduce ove pochi son giunti, e niuno è passato più oltre. *Se da diversi punti di qualsivoglia linea* (è questa la definizione) *le perpendicolari tirate ad una retta qualunque indefinita data di posizione* (la direttrice) *e le altre rette tirate a un dato punto qualsivoglia fuor della retta indefinita* (il fuoco) *saranno sempre in data ragione*: questa linea chiama egli sezione conica, ellisse, parabola, e iperbola, secondo che quella data ragione è di minore ineguaglianza, di eguaglianza, o di maggior ineguaglianza. Con ciò conserva egli l'antico nome a ciascuna sezione con ragione non meno conveniente di quella che mosse i Greci a così denominarle, e tutto d'un colpo senza dover ricorrere al cono, o ad altri strumenti meccanici le trova in piano belle e formate, e in esso le considera in primo luogo. Da tal definizione, che in sostanza non è che un teorema a prima vista non molto secondo, reca stupore con qual nuovo ordine e connessione di discorso deduce egli tutte le proprietà coniche, incontrandosi ad ogni passo ora cose nuove, ora di quelle che spargono sulle vecchie grandissima luce. Fin dall'anno 1747 aveva dimostrato nel Giornal Romano con questa definizione la ragion costante tra due rettangoli de' segmenti di due corde di qualsivoglia sezione conica, che hanno un' inclinazione costante, e si tagliano scambievolmente; quindi in parte da questo teorema, in parte dalla definizione suddetta derivò le principali proprietà, che a ciascuna sezione appartengono. Ma in questi Elementi le cose son cresciute a dismisura, e dopo varj tentativi condotte al suo fine. L'Autore per altro non si è in essi arrestato a considerare le sezioni coniche in piano, ma perchè nulla mancasse alla perfezion dell'opera, le considera inoltre nel cono. In questa parte è maraviglioso uno scolio, nel quale legato un cono con un piano mobile e con certa regola, fa vedere come le sezioni si trasformano successivamente l'una

nell'altra, ed ancora in una retta. Nè meno riesce maravigliosa la continuazione di una tal considerazione nel cilindro, nelle sferoidi, nelle conoidi paraboliche e iperboliche, dalle quali specialmente mette in chiaro con sorprendente acume quali coniche, e come si traggono. E' notabile come in tutte queste ricerche si manifesti l'indole delle trasformazioni geometriche, delle quali credendo l'Autore di dover parlare più pienamente in foccorso di coloro, che desiderano di penetrare in tali arcani, distese un' eccellente e veramente aurea dissertazione sulla trasformazione de' luoghi geometrici, in cui parla ancora della legge di continuità, e di alcuni misterj dell'infinito. Trovati che sieno i principj essenziali, le verità ne discendono con una facilità deliziosa per lo spirito; il loro concatenamento è più semplice e nel medesimo tempo più stretto; lo spettacolo della loro generazione, che non ha più niente di forzato, è più dilettevole, e questa generazione più legittima in qualche maniera è ancor più feconda. Quindi a ragione l'Autore faceva a se medesimo plauso d'aver ridotto l'intera dottrina delle coniche a un sol principio, dicendo che questo era simile al tronco di un' grand' albero, da cui si dividono e si suddividono rami, e ramuscelli quasi infiniti con una compiacenza non ordinaria per quelli che li contemplan, e con ajuto maraviglioso per la facile intelligenza del tutto. Ove s'incontrano questi pregi, può dirsi che la scienza così pensava. E' un gran danno che in elementi sì belli non abbia impiegati alcuni paragrafi per determinare l'equazione dell'ellisse riportata al raggio vettore, ed al fuoco, equazione che è di tant'uso nella fisica celeste: ma egli ha comune questa ommissione collo stesso de l'Hospital, non che coi minori scrittori di coniche. Oltre questi elementi aveva egli in animo di pubblicare il restante dei trattati di matematica, il che da altre cure distratto non potè, o non volle eseguire.

Il dovere e l'onore della scuola esigeva da lui che oltre le giornaliere lezioni pubblicasse ogni anno qualche dissertazione, che faceva difendere da' suoi scolari, e che rendeva più celebre il suo nome. Appartengono agli elementi di matematica quella dei cerchj osculatori, e l'altra della natura ed uso de'gl'infiniti e infinitamente piccoli, e son del dritto della fisica quelle del moto de' progetti in uno spazio non resistente, dell'ineguaglianza della gravità ne' diversi luoghi della terra, del moto del corpo attratto nel centro immobile, essendo le forze in ragion reciproca duplicata delle distanze, del centro di gravità, coll'aggiunta della ricerca del centro della grandezza, e di altre cose affini a questo importante argomento, della legge delle forze che esistono in natura, delle forze vive, e del flusso e riflusso del mare. Promise di dare a quest'ultima una seconda parte, che poi non fece, e si gloriava d'aver mostrato l'errore di Daniel Bernoulli sul flusso e riflusso dell'aria supposto analogo a quel del mare per tal modo, che quello doveva essere tanto maggiore di questo quanto l'aria è più leggiera dell'acqua, il che, se fosse vero, produrrebbe un alzamento di quasi due miglia. Qui è dove propose un suo pensiero per conciliare la quiete della Terra col' leggi della gravità universale, e per fine coll'aberrazione delle fisse, pensiero che può perdonarsi a uno che viveva in Roma, e che doveva servire alla volontà de' suoi superiori, ma che avrà sempre luogo tra le belle immaginazioni filosofiche. Più glorioso per lui sul'aver dimostrato, che la tanto agitata in que' tempi questione sulle forze vive era una questione inutile e di puro nome, e quel che scrisse su di ciò ebbe luogo negli Atti dell'Accademia dell'Istituto di Bologna, a cui fin dall'anno 1740 era stato arrolato. Tra le sue dissertazioni scolastiche (che così ci piace di chiamarle perchè fatte per uso della sua scuola) ve ne furono molte d'argomento astronomico, e tali sono quel-

le dell'annue aberrazioni delle fisse, delle osservazioni astronomiche per fissare i limiti, ai quali arriva la loro certezza, dell'astronomia in genere, dell'utilità delle lenti e dei telescopj diottrici, d'un nuovo metodo d'adoprarle le osservazioni delle fasi nelle ecclissi lunari, delle comete, e della maniera di determinare l'orbita d'un pianeta coll'ajuto della catottrica, data la forza, la celerità e la direzione del moto in un dato punto, e dell'atmosfera della luna, che credeva essere affatto differente dalla terrestre, perchè composta d'un fluido simile alla nostr' acqua. Nell'anno stesso in cui pubblicò la penultima di queste dissertazioni, che è una delle bellissime fra le molte belle, cioè nel 1749, fu invitato a spiegar la cagione d'un fiero turbine, il quale apportò gran danno a Roma; e basta il dire che s'ignorava allora qual parte abbia in questi fenomeni, come in tant'altre meteore, l'elettricità atmosferica. L'uso però che ei fece delle recenti sperienze dell'Hales fu ingegnoso e nuovo, e servì a convincere i filosofi di que' giorni e di quel luogo, che ignoravano molte proprietà dell'aria. Concorse una sola volta al premio proposto dall'Accademia di Parigi, per chi spiegava l'ineguaglianze, che sembrano apportarsi vicendevolmente Saturno e Giove, particolarmente intorno al tempo del loro congiungimento, e perchè dopo le lodi date alla sua dissertazione non ne ebbe la ricompensa che credeva di meritare, perchè data all'Eulero, non aspirò mai più a questi letterarj trionfi. Non ricusava però di soddisfare alle richieste degli amici nella soluzione di varj problemi, ed è degna di special menzione quella del solido della massima attrazione propostagli dal Signor di Montigny socio della medesima Accademia di Parigi. Fin dai primi passi conobbe che si poteva sciogliere colla sola linear geometria, e in fatti lo sciolse. Adoprò dopo il calcolo integrale, che lungi dal facilitargli la via, gliene accrebbe le difficoltà, onde credè d'esser
in

in diritto di concludere , doverfi sempre preferire la sintesi all'analisi, ricordando con una specie di compiacenza il lamento del Newtono, che vecchio dolevasi d'esserfi troppo presto e con troppa avidità consacrato alla geometria Cartesiana. Non può certamente negarsi che il Boscovich non debba una gran parte della sua celebrità al felice uso della sintesi, sottoponendo all'impero di essa que' problemi medesimi, che sembravano appartenere alla sola analisi. Ella fece la principale occupazione della sua vita, e ne provò egli l'utilità, applicando alla fisica, all'ottica, all'astronomia e ad altre scienze le sue sintetiche soluzioni, che per essere le più facili, le più naturali e le più comode, non lasciano di essere le più gloriose. Imperocchè una specie di fatalità vuole, che in ogni genere i metodi, o le idee le più naturali non sieno quelle, che si presentino il più naturalmente. L'invenzione del calcolo differenziale ed integrale, diceva il nostro Geometra, per quanto mirabile ella sia, perchè porta le nostre cognizioni sino all'infinito, e quasi al di là de' confini prescritti allo spirito umano, o almeno infinitamente al di là di quelli, ne'quali era ristretta l'antica geometria, ha però i suoi errori non per colpa della scienza, ma per l'abuso che ne fanno quelli che la professano. Alcuni luoghi tratti dall'opere dell'Eulero, di Daniele Bernoulli, e di altri celebratissimi analisti servivano a confermare i suoi detti.

Fin qui non abbiain fatta menzione delle sue dissertazioni sopra il lume e sulla legge di continuità, nelle quali sparse i primi semi della sua teoria dei punti inestesi, per poterne noi più diffusamente parlare a parte. Il vantaggio d'un sistema generale è che dà uno spettacolo pien di pompa a un Genio metafisico, che ama sempre di vedere da un luogo più elevato, e di scoprire una più grande estensione. Ma dall'altra parte è un male senza rimedio, che gli oggetti veduti più da lontano, e in più gran numero, lo sono anche più

confusamente. Differenti parti sono legate dalla composizione di un tutto, e fortificate vicendevolmente da questa unione, ma ciascuna in particolare vi è trascurata, e perde non poco per questo appunto che ella è una parte d' un sistema generale. Se i Filosofi ben intendessero quanto importi di bene schiarire una sola cosa in particolare, non cercherebbero forse altra gloria, tanto più che una sola cosa ben avverata, diventa sempre assai generale. Ma l'amor de' sistemi ha dominato in ogni tempo ed ha sedotto anche i più illuminati fra gli uomini, e perchè il Boscovich credè d'averne trovato uno, diceva questa sola cosa bastargli per l'immortalità. Quel ch'egli aveva sparso intorno a questo sistema nelle nominate dissertazioni, alle quali si può aggiungere ancor quella della legge delle forze in natura esistenti, fu dopo più ampiamente dilatato e spiegato dal suo amico e collega Carlo Benvenuti, e poi dall'Autore medesimo in un libro stampato in Vienna l'anno 1755 col seguente titolo: *Theoria philosophiæ naturalis redacta ad unicam legem virium in natura existentium*. Ei dice d'averlo disteso in trenta giorni, poichè aveva già preparati i materiali; ma un edificio di tal natura voleva più ordine, più proporzion di parti, e più armonia, e perchè manca l'opera di questi pregi, è riuscita una delle più oscure, confuse e verbose, che uscisse dalla penna del Boscovich. Molte piccole cose poco men che nascondono le principali e le più interessanti, che per altro sono molte e degne d'esser contemplate isolate. Quanto alla teoria ella è divisa in tre parti. „ Nella prima (dice l'Autore) io espon-
 „ go la mia legge delle forze, che nelle gran distanze s'ac-
 „ costano infinitamente all'attrazion Newtoniana, ma che
 „ nelle piccole elleno sono quando attrattive quando ripulsi-
 „ ve, di maniera che diminuendo le distanze all' infinito,
 „ la repulsione per lo contrario s' accresce all' infinito. Io
 „ esprimo queste forze con una curva, che ne pone sotto gli

„ occhi la legge, e con una equazione algebrica, che ne fa
 „ veder l'unità e la regolarità. Io dimostro positivamente
 „ l'esistenza di questa legge, il che fa vedere che la mia
 „ teoria non è un'ipotesi arbitraria: rispondo all'obbiezio-
 „ ni; ne deduco la natura dai primi elementi della materia,
 „ che nella mia teoria sono per necessità punti semplici e
 „ indivisibili, collocati in piccole distanze tra loro in modo,
 „ che non vi ha estensione continua ne' corpi. Questi sono
 „ per così dire formati in miniatura, e non a tratti di pen-
 „ nello; la materia è dispersa nel vuoto, e non il vuoto
 „ nella materia. Nella seconda parte, o sia libro dell'opera
 „ applico la mia teoria a tutta la meccanica, e nella terza
 „ a tutta la fisica generale, e ai fondamenti di tutta la fisica
 „ particolare„. Se l'Autore avesse potuto provare, che gli ele-
 „ menti dei corpi come sono semplici così debbono essere inestesi,
 „ avrebbe forse liberato da ogni dubbio il suo sistema; nè oc-
 „ corre il dire che non vi è stato fin ora opposto argomento
 „ che lo distrugga, quando si può dire che non ne è stato ar-
 „ recato alcuno, che lo dimostri. Ma che che sia della verità
 „ di esso, si dovrà però confessare che sono eccellenti le sue
 „ meditazioni sulla legge della continuità, che sono ingegnose
 „ le conseguenze, che egli deduce dalla combinazione di due,
 „ di tre, di quattro o di più punti per dimostrare le proprie-
 „ tà delle masse o sia de' corpi, e che non potranno non pia-
 „ cere agli amatori della sintesi le dimostrazioni in parte nuo-
 „ ve, che dalla sua teoria deduce intorno ai centri d'equili-
 „ brio, d'oscillazione e di percussione. Diremmo delle sue idee
 „ metafisiche dirette a provare che i suoi punti nulla avevan
 „ che fare colle monadi Leibniziane, e che nulla potevano suf-
 „ fragare ai fautori del materialismo (a), se il secolo in cui vi-

c ij

(a) Ebbe per questo una fiera disputa coll' Inglese Priestley, che in un'opera sulla natura della materia servivasi della sua teoria per insinua-

viamo, mercè i lumi della buona fisica, non isdegnasse di essere trattenuto nella spiegazione di quelle teorie, che appartengono alla composizione de' corpi, e alla natura dei primi elementi.

Il solo esercizio della pubblica scuola, e gli scritti fatti principalmente per essa bastarono al Boscovich per conciliargli una fama estesissima, e viveva in Roma come in regno suo, onorato e accarezzato da tutti i veri dotti, da quelli che fingevano di esser tali, e dai più grandi e potenti di quella città e di quella corte. Ne frequentava le case e le tavole, e parlando spesso di se e delle sue scoperte faceva sempre maraviglia la chiarezza e la facilità, con cui l'esponneva anche ai meno periti. Imperocchè egli aveva interesse di allontanar da se il rischio, che corre la maggior parte dei dotti matematici, di coltivare una scienza, che accresce la gloria dello spirito umano, e promove i vantaggi della società, senza che molti di quelli, che godono dei loro benefizj, sappiano nè ammirarli, nè benedirli. Voleva per fino, che le nobili matrone sapessero quanto ei meritasse il titolo di filosofo e di matematico. Aspirava ancora a quel di poeta, e in tutta la sua vita non mai cessò di far versi latini buoni, mediocri, e cattivi. Aveva una singolar facilità in comporli, e una singolar memoria in ritenerli, e anche non invitato li ripeteva spesso e volentieri. Nozze, guerre (a), lodi de' Principi, fenomeni celesti, scherzi familiari invitavano a se la musa del Boscovich, e per dare a questa un più largo campo compose un intero poema sopra l'eclissi, che fu prima una prefazione per uso della scuola, e che poi creb-

re il materialismo. Il Boscovich che non potè essere indifferente a quest' abuso delle sue dottrine, ne scrisse al Priestley con quell'espressioni che convenivano alla vivacità del suo carat-

tere, e alla religiosità de' suoi sentimenti.

(a) Per la sola guerra contro i Turchi, quando era maestro d'Umanità in Roma, compose un'intera Accademia.

be fino a sei libri, ne' quali non solamente si spiegano le cagioni e gli effetti dell'ecclissi lunari e solari, ma vi si compendia una gran parte della fisica celeste, ornata di quei colori, e di quegli episodj, che la rendono accetta e gradita anche a quelli che non sono filosofi. Molti squarci di questo poema furono da lui recitati in Arcadia, molti ne compose viaggiando, e condottolo a fine lo credè prima degno dell'Accademia di Londra, a cui lo dedicò nella prima edizione, e poi di Luigi XVI Re di Francia, che invocò qual nuovo Apollo quando nel 1779 lo ristampò in Parigi colla traduzione francese in prosa dell' Abate di Barruel. Vi fece ancora delle copiose note per ispiegarvi le cose meno ovvie, e per ricordare quel che aveva fatto e scritto pe' progressi dell'astronomia. Nella città, che tanti monumenti conserva della sua antica grandezza e potenza, volle esser ancora antiquario, e spiegò specialmente quelli, che avevan qualche rapporto alle scienze, che professava. Un antico orologio a sole, un obelisco trasportato in Roma dall' Egitto da Cesare Augusto, che forse serviva al medesimo uso, furono soggetti di due sue epistolari dissertazioni, e ne distese altre di simil genere, che però non videro la pubblica luce. Grazie al suo desiderio di gloria niuno ricorreva in vano a lui; era tutto a tutti, e con un' attività instancabile serviva a se, alla scuola, agli amici e alla pubblica utilità. Il Sommo Pontefice Benedetto XIV, e l'illuminato ministro di lui Card. Silvio Valenti lo consultavano sopra varj oggetti importanti di pubblica economia, porti da riaprirsi, strade e canali da costruirsi, ed egli lor soddisfaceva collo zelo d' un buon cittadino e coi lumi d' un esperto e profondo matematico. Allorchè si trattò di esaminare se la gran cupola di S. Pietro minacciava rovina, per cui si deputarono Congregazioni, e si consultarono periti matematici ed ingegneri, e si fè venir di Padova il Marchese Poleni, anche il Boscovich dovè pronunzia-

re il parer suo. L'oppugnarono il P. Abate Ravillas Girolamino e Monfig. Bottari, lo confermarono l'architetto Vanvitelli e lo stesso Poleni, e fu circondata la cupola di un cerchio di ferro. Aveva dimostrato il Boscovich che l'azione d'un ferro posto in circolo è sei volte maggiore di quella, che produrrebbe il ferro medesimo tirato perpendicolarmente; e perchè il Poleni negli scritti da lui pubblicati su questa controversia usurpò la lode dovuta all'amico, l'amor proprio di questo ne fu irritato a segno, che rinunziò all'antica amicizia. Tanto è vero che l'amicizie de' dotti sono spesso l'effetto dell'amor della gloria e della vicendevole utilità.

L'uno e l'altro di questi motivi fece nascere nel Boscovich il desiderio di trasportarsi fin nel Brasile. Aveva di que' giorni Giovanni V. Re di Portogallo richiesto al General de' Gesuiti dieci de' suoi matematici, che navigassero in quelle remote contrade per farne una mappa geografica all'oggetto di fissarne i confini tra lui e il Re di Spagna. Si offerì egli al Ministro non solamente col fine di servire alla commissione, ma anche di misurare un grado del meridiano da paragonarsi con quello stabilito poc'anzi dagli Accademici Parigini a Quito. L'offerta fu subito accettata, il che giunto all'orecchie del Card. Valentini, che era persuaso che gli uomini d'un merito singolare sono utili allo stato, a nome del Sommo Pontefice comandò al Boscovich di non partire, e di eseguire ne' suoi dominj quel che aveva disegnato di fare nel Brasile. S'accinse subito all'opera, domandò ed ebbe per compagno in essa il Gesuita Mayer, inglese, valente matematico, e fu abbondantemente provveduto di quegli istrumenti e mezzi, che erano necessarj per condurla a fine. Fu cominciata sul terminare dell'anno 1750 nelle vicinanze di Roma, fu condotta la linea fino a Rimini, e dopo le fatiche penosissime di due anni interi non sen-

za pericoli frequenti di vita, potè il Boscovich dare alla luce il suo prezioso libro, che intitolò : *De expeditione litteraria per Pontificiam ditionem ad dimetiendos duos meridiani gradus, & mappam geographicam corrigendam*. La misura di questo grado è forse una delle più esatte, e servì di norma ad altre fatte posteriormente e promosse dallo stesso Boscovich (a). Dovè poi far maraviglia che egli nella latitudine

(a) Una lettera di lui al suo diletto scolare Sig. Abate Puccinelli sarà una prova e un'illustrazione di quello che abbiamo avanzato. Ella è data di Parigi il dì 15 Luglio dell'an. 1776.

In ordine al grado di Beccheria è seguito appunto quello, che io aveva predetto, ed avevo appunto proposto al morto Re di Sardegna di far fare la misura del grado nel Piemonte per vedere l'effetto dell'attrazione delle montagne. Come io avevo fatte le osservazioni astronomiche a Roma e Rimini, l'elevazione di tutto il suolo dell'Italia fino agli appennini doveva tirare in dentro in amendue i siti il filo a piombo, e perciò accrescere la distanza apparente de' due zenith: onde distribuendosi il medesimo numero di tese trovate sulla terra in un più grande numero di minuti, a un grado, che ne contiene 60, ne roccava un minor numero, onde il grado doveva trovarsi più piccolo. All'opposto nel Piemonte si aveva la pianura in mezzo, e le alpi a una estremità, l'appennino all'altra. I due fili a piombo tirati in fuori dovevano far accostare i due zenith apparenti, facendo dare il numero delle tese trovate in terra a un minor numero di minuti: onde il grado doveva divenire più grande. Spiegai questo a S. M. in modo che s'invogliò di far fare l'operazione, e mi domandò, se vi era ne' suoi stati persona opportuna a far questo lavoro: gli proposi il P. Beccheria, che appunto allora aveva alzato nel giardino Reale un grandissimo cannoc-

chiale, se non erro, di 40 piedi, e facilmente maneggiabile. Il Re lo chiamò lo stesso giorno e gliene diede l'incombenza: conferimmo insieme e gli spiegai il mio settore: ne fece dopo uno simile al mio, e trovò la lunghezza del grado, che io aveva predetta: ma di tutto questo non ha degnato di dir altro, se non che io parlando col Re aveva parlato della opportunità de' suoi stati per la misura di un grado, senza dir nulla di più.

Una cosa simile mi accadde col P. Liesganig. Io parlai colla Regina del vantaggio de' suoi stati per far misurare un grado nell'Austria, Stiria, Carintia, paesi montuosi, e nell'Impero d'Ungheria. Mi promise di pensarvi seriamente: mi domandò a chi potrebbe darsi la commissione; le proposi Liesganig e Scherffer: feci una memoria su questo e la feci avere al Caunitz. Vi fu l'ordine di eleggere: si fece il settore, e si verificò in mia prelenza: mi trovai a vedere un giorno la misura della base: si non trovai gli effetti delle attrazioni delle montagne. Il Liesganig non ha avuta la bontà neppure di nominarmi. Me ne dolli, vedendo la sua opera: mi rispose, che non ci aveva pensato, che quando era già al fine della stampa. Tanto gli uomini sono ingiusti ed ingrati.

Per farmi più indietro, quando Maupertuis stampò la sua opera al ritorno dalla Lapponia, io l'anno 38. o 39 feci la dissertazione *de figura Telluris* e proposi le mie difficoltà sulle conseguenze della sua misura parago-

di $42^{\circ} 59'$ trovasse il suo grado 70 tese minore di quello che era stato trovato nella latitudine di $43^{\circ} 31'$ tra Rodi e Perpignano, differenza che doveva solamente produrre la variazione di sei tese e mezza. Ma la maggiore o minore densità delle montagne, che cagionano per la loro attrazione la deviazione del pendolo, servì a rendere ragione di questa differenza, e il Boscovich ne calcolò l'effetto e predisse le conseguenze, che sarebbero derivate da altre misure fatte vicino a più dense montagne. Tutta l'opra suddetta mostra un diligente ed accorto osservatore, e tra gli opuscoli che l'adornano, ci piace di ricordare specialmente il IV. sulla rettificazione ed uso degl'istrumenti per ottenere le misure de' gradi del meridiano, e il V. che ha una maravigliosa eleganza

nata con quella di Francia: la differenza tra la Lapponia e la Francia era di alquante centinaia di tese, ed io feci vedere, che una montagna equivalente ad una sfera del raggio di un miglio piegava il filo a piombo di un minuto, facendo crescere, o scemare il grado di quasi mille tese. Due montagne all'estremità di ciascuno de' due gradi potevano quadruplicare l'effetto; onde le addizioni di materia equivalenti a $\frac{2}{10}$ di miglio, che s'incontrano in tanti luoghi, potevano produrre 400 tese di differenza, e quello, che fanno i monti visibili possono fare le addensazioni di materie sotto la superficie, e le cavità sotterranee in senso opposto; per questo io ho procurato di avere molti gradi; ed ho fatti misurare e quelli di Germania e di Piemonte, come pure a mia istanza gl'Inglese ne hanno misurato uno in Pensilvania, e nelle note dello Stary, e molto meglio nella mia opera tradotta in francese sul fine ho dato il modo per trovare un mezzo, secondo le leggi della probabilità, sia le diverse sfericità risultanti dalle diverse combinazioni, trovando dopo tan-

te misure la compressione al doppio minore di quella di Maupertuis, e conforme alle leggi della gravità disuguale nelle diverse parti della Terra determinata colle oscillazioni de' pendoli.

Per tornare al grado del Beccaria, non solo egli ha trovato il medio risultante dalle osservazioni astronomiche estreme tanto maggiore (supera il mio quasi di 1000 tese) ma avendo fatte le osservazioni astronomiche anche in mezzo, in Torino, ha trovato il grado verso le alpi assai più grande, che l'altro verso l'appennino per la prevalenza della attrazione di quelle. La differenza par troppa: ma avrebbe dovuto essere anche maggiore, se nelle montagne non vi fossero de' vani immensi. Su questa attrazione delle montagne ultimamente gl'Inglese hanno fatto fare a Maskelyne delle osservazioni di qua e di là d'una montagna non molto grande con un gran lettore, e si sono trovati quasi 12 secondi di effetto della medesima. Eccole a lungo su codesto articolo, su cui ho tanto merito, e mi si rende la stessa ingiustizia, che sulla specola di Milano.

eleganza fintetica per dimostrare le proprietà dell' attrazione , e per ricavarle dalle leggi di questa , come dai gradi misurati del meridiano, la figura della terra. E' stato ancora grandemente lodato il Boscovich per quel che dice in esso intorno alle figure d'equilibrio permanente, e di equilibrio, che noi diremmo fugace; perchè un fluido che abbia quelle figure, può mantenerle, e anche ritornarvi da se, quando ne sia da qualche cagione allontanato, e all'opposto nell'altre non si può mantenere, ma se per qualche cagione ne sia allontanato, seguita ad allontanarsene sempre senza potere all' equilibrio e a quelle figure ritornare. Ma il d'Alembert trovò da ridire al detto del Boscovich, il che lo pose in impegno di trattare più copiosamente la questione in una nota aggiunta alla traduzion francese dell' opera medesima, che non si sa perchè fosse intitolata: *Voyage Astronomique & Geographique*. Imperocchè quantunque il Boscovich, come era solito, parli in essa dei più piccoli avvenimenti, e di tutte le più minute circostanze, che accompagnarono questa sua letteraria spedizione, le teorie però e le conseguenze le più interessanti cavate da esse, ne fanno la parte principale. Nell'ozio di quest'operazione si abbandonava al suo gusto e al suo talento naturale per la poesia latina, e dai luoghi stessi, pe' quali passava, e dalle persone colle quali trattava, prendeva motivo d'arricchir d'episodj, e di belle immagini poetiche il suo poema dell'ecclissi. Compose ancora in questo tempo una gran parte delle sue sezioni coniche, e si doleva che la ruvidezza e stravaganza del compagno, che poi degenerò in pazzia, gli togliesse quell' alleviamento, di cui abbisognava un'opera sì lunga e sì penosa. La ricompensa, che ne riportò dal Sommo Pontefice, furono molte lodi, cento zecchini e una tabacchiera d'oro, ma egli valutò anche più di questo dono le grazie del Ministro, e finchè visse non cessò di encomiarle, e di fare onore alla memoria di lui. Si con-

serva ancora come un prezioso monumento dell' astronomia la pertica che servì a questa misura , e un illustre Porporato , che fa Roma più bella per le sue virtù sociali e per la raccolta di tutto quello che appartiene all' arti belle ed alle scienze, volle eternarne la memoria con un' elegantissima iscrizione latina composta dal celebre Abate Morcelli (a).

E' una vera disgrazia per la nostra Italia che per lo più scarfe e meschine ueno le ricompense, che si danno ai grand' uomini , che promovono le scienze fisiche e matematiche. Così il primo autore della misura d'un grado Italiano , e di tant'altre opere immortali tornò all' ingrato esercizio della pubblica scuola, che solo potea render leggiero la delicatezza di coscienza di servire all' Istituto e alla volontà de' Superiori. Si occupava ancora in esercizi diretti alla spirituale edificazione del popolo: e perchè fu escluso dal numero di que' Gesuiti, ai quali era raccomandato l' Oratorio detto del P. Caravita, la sola ricompensa de' quali era una libera, ma religiosa cena fra loro, ne fu dolente a segno, che per calmare un animo soverchiamente agitato vi volle un ordine del Card. Valenti, il quale lo assicurasse, che frequentando

(a) HEXAPEDA . VOCOR . LALOIS I . OPUS
 MAIRANUS . ME
 PARISIENSES . EXACTAM . AD . MENSURAS
 PRIMUS
 ROGERIO . BOSCHOVICHIO
 MISIT
 AT . HIC . SOCIAM . GEOMETRICI . LABORIS
 IAM . SENIOR
 MAGNO . ZELADAE . CARDINALI
 PROPRIAM . DICAVIT
 MNEMOSYNON
 AMICO . VETERI . ET . PATRONO

l'Oratorio, non avrebbe mai più perduto il suo posto e il diritto alla quotidiana cena degli Oratoriani. Questo piccolo accidente è una prova, ch'ei non isdegnava tra' suoi le più comunali occupazioni, che la sua fantasia era facile a riscaldarsi, e che riguardava i conviti conditi dalla libertà del discorso, come il ristoro de' suoi lunghi e profondi studj. Esciva da questi allegro e vivo, e mostrava il piacere che ne aveva riportato, e il desiderio di ritornarvi. A vederlo e a sentirlo si sarebbe detto che bisognava studiar molto per goder molto, e per provare senza mescolanza di noja i piaceri della società degli uomini. Era egli legato coi più illustri e coi più dotti, ma specialmente amava il suo concittadino Abate Benedetto Staj, raro genio invero, che obbligò le muse a lasciar le armi e gli amori, per ridire in elegantissimi versi latini quel che il gran Newtono e altri filosofi moderni prima e dopo di lui avevano insegnato intorno alla natura delle cose celesti e terrestri. Un' opera simile voleva un comentatore, che non ignorasse l'altrui scoperte, e fosse ricco delle proprie, che fosse in grado d'indicare i fonti d'onde erano state attinte, quel che era stato trovato e quel che rimaneva a cercarsi, e di spiegare il tutto con brevità e con chiarezza. Il Boscovich, che era convinto della grandezza delle proprie forze, assunse l'incarico delle note, nelle quali uno non sa se debba più ammirare le ricchezze, che egli sparge a larga mano sopra tutti gli oggetti che tratta, o l'ordine e la nettezza colla quale ne parla. La necessità di comprender gran copia di cose in breve spazio l'obbligò di rinunciare al suo natural difetto della verborietà, e il desiderio d'indicare non solamente i suoi scritti, ma anche le sue idee sui varj oggetti importanti di fisica e matematica, lo costrinse a dirne quanto bastava, di maniera tale che chi leggerà queste note vedrà in un colpo d'occhio quanto gli debbano quelle scienze, e che cosa contengono le

tante e varie sue Dissertazioni. Dee riguardarsi come un vero danno che non abbia egli dato compimento all' opera, tanto più che i libri, che rimanevano da pubblicarsi, dovevan comprendere l'ottica, cui trattando, come il creatore della scienza, fece maggiormente conoscere agli uomini la luce, decomponeandola, riunendola, e in cento guise analizzandola.

Nacque in questo tempo una controversia tra il Governo della Toscana e la Repubblica di Lucca a motivo dello scolo dell'acque del lago di Bientina. Si deputarono matematici da una parte e dall'altra per esaminarla, e il Boscovich fu richiesto dell'opera sua dai Lucchesi. Vi volle un comando del Papa perchè accettasse il loro invito. Stette da tre mesi in Lucca senza che si aprissero i congressi, dopo il qual tempo tornò a Roma per poi passare a Parigi, dove il chiamava la volontà de' suoi Ragusei, ai quali grandemente importava di far rimuovere un Console Francese, che abusando della sua autorità violava i sovrani dritti della Repubblica. Il suo amico Card. Valenti mal soffrendo che egli s' allontanasse dall' Italia, impegnò il Papa a trattare quest' affare coll' Imbasciatore Francese Duca di Choiseul, e la mediazione di lui, e le premure del Nunzio in Parigi produssero il desiderato effetto. Così il Boscovich potè tornare ai Lucchesi, e sostenne la loro causa con quell' impegno, e con quell' ardore, che doveva al suo carattere estremamente vivo, e all'amore della giustizia. Dìttese più Memorie, disputò coi matematici Toscani, ma inutilmente, perchè il Conte di Richecourt, che governava la Toscana in nome di Cesare, non consultava se non la sua rabbia contro i Lucchesi. Questi generosi verso il Boscovich lo regalarono di mille zecchini e di altri doni, e nell' impossibilità di concluder l' affare in Toscana, lo pregarono di patrocinarlo in Vienna presso l' Imperator medesimo. Vi stette da undici mesi, nè divise con

altri la gloria del buon successo, per cui fu aggregato tra i nobili cittadini di quella Repubblica. Sosteneva allora la Corte di Vienna la guerra contro il Re di Prussia, e le prime vittorie fecer nascere nel Boscovich il desiderio di cantarle in versi latini. Compì il primo libro del suo poema, e lo presentò all'Imperatrice Regina. Cominciò anche il secondo, ma l'avversa fortuna, che successe alla prospera, lo distolse dall'incominciato lavoro. Allora fu che il P. Scherffer celebre Gesuita l'invitò a fare una dissertazione, in cui mostrasse, come colla sua teoria delle forze si scioglieva il problema dell'oscillazione dei pendoli composti. Po.e mano all'opera, e conoscendo la necessità di mostrare in grande il quadro della teoria medesima abbozzato solamente nelle dissertazioni, che le appartengono, distese il libro, di cui abbiain di sopra parlato, e lo dedicò al Card. Migazzi. Lo terminò con una lettera allo stesso P. Scherffer, in cui trattò del centro di percussione.

Gli onori ricevuti in Vienna, l'utilità de' viaggi, i mezzi avuti dai Lucchesi per intraprenderne dei nuovi, lo mossero, tornato che fu in Roma, a domandare ai suoi Superiori la licenza di passare nella Francia e nella Inghilterra. Ne' sei mesi, che fu in Parigi, visse familiarmente coi Sigg. Clairaut, d'Alembert, Fontaine, de la Caille, Monnier, de la Lande, ed altri dotti uomini; frequentò l'Accademia e l'Osservatorio, e con una specie di commercio, che onora le scienze e chi le professa, rendeva ai suoi amici que'lumi, de' quali erano verso di lui liberali. Fu anche più fortunato in Londra, perchè gl'illustri membri della Società Regia di quella città lo ascrissero nel loro ceto; e grato egli a tanto onore lor dedicò il suo poema *de solis ac lune defectibus* arricchito di dotte e copiose note. Correva allora l'anno 1760 precedente a quello, in cui doveva accadere il raro ed importante fenomeno del passaggio di Venere sotto il Sole, una sola

volta, nè bene osservato dagli astronomi Ingleſi nell'anno 1639. Il Boſcovich ne parlava ſpeſſo co' ſuoi colleghi, lor raccontava le ſpedizioni fatte e da farſi dall' Accademia di Parigi di chi l'oſſervaffe a Pondicheri, a Tobolsk, nell' Aſſrica e in Cipro, e diſeſe una breve diſſertazione per render conto alla Società d'un piccolo errore dell' Halleio, l'annunziatore del fenomeno e l'autore del metodo per oſſervarlo, errore ſcoperto dal Signor de Lille. Ei certamente contribuì non poco perchè due astronomi Ingleſi foſſero mandati per lo ſteſſo fine all' iſola di S. Elena, e due altri a Sumatra. Promiſe di ſervire anch' egli a queſt' oggetto aſtronomico, che il più di tutti per la ſua utilità aveva eccitati tanti viaggi, e prodotto tanto moto nell' Europa, poichè ſi era propoſto di paſſare a Coſtantinopoli, luogo anch' eſſo opportuniſſimo per l'oſſervazione. Ma una più lunga dimora preſſo quella felice nazione, che più di tutte ha contribuito al progreſſo delle ſcienze e dell' arti, perchè ella e non il Governo è la diſpenſatrice della pubblica ſtima, il lungo viaggio fatto per l'Olanda e per la Fiandra nel ritornare in Italia, e ſopra ogni coſa il ritardo della partenza da Venezia del Bailo Correr, a cui ſi era elibito per compagno, furono le cagioni che lo trattennero dall' eſſere in Coſtantinopoli nel tempo del paſſaggio, cui malamente potè oſſervare in Venezia, perchè impedito dalle nuvole, e perchè non ben provveduto d' iſtrumenti.

Non molto dopo col ſuo illuſtre compagno ed amico fece vela per Tenedo. Mentre ivi aſpettavano le galere Turche per fare il tragitto a Coſtantinopoli, cercarono le rovine di Troja, ricidevoli del paſſo di Virgilio:

Eſt in conſpectu Tenedos notiſſima fama

Infula

Ogni reliquia di quella ſuperba città, o per meglio dire di quella, che fu fabbricata dai Romani in vicinanza dell'

antica, fu l'oggetto della curiosità de' nostri viaggiatori, e il Boscovich ne distese una minuta relazione, in cui la parte più interessante è quella d'alcune iscrizioni trovate tra i laceri avanzi di grandiosi edifizj. Poichè l'antiquaria ha non meno che le altre scienze i suoi misterj, disse che nell'interpretazione di alcune di esse trovava non minor difficoltà, che nel problema de' tre corpi in meccanica, e del caso irreducibile in algebra. Il soggiorno di Costantinopoli non fu lieto pel Boscovich, perchè vi fu quasi sempre infermo, e una volta tra le altre disperarono i medici della sua vita. Vi fu però amichevolmente trattato dal Co. di Vergennes Ministro di Francia, che la voce dell'Europa e le lagrime della nazione per la sua fresca morte mi dispensano dal lodare. Per le premure di lui ne partì dopo sei mesi coll'Imbasciatore d'Inghilterra Jacopo Porter, e dopo di aver scorso la Bulgaria e la Moldavia, e una porzion della Polonia pensava d'innoltrarsi fin nella Russia. Ma gravi incomodi di salute, la rigida stagione, e la morte di Pietro II. l'obbligarono a piegar da Varsavia verso Cracovia, e per la Slesia e per l'Austria di tornare nell'Italia e a Roma. Il diario del viaggio coll'Imbasciatore Inglese fin nella Polonia fu il soggetto d'un suo Libro stampato in francese e in italiano, che la narrazione di troppe piccole cose, e di frettolose osservazioni rendono poco interessante. I più grandi uomini trovano spesso nel loro amor proprio medesimo un giudice segreto, ma severo, che le lodi degli altri fa tacere per qualche momento, ma che elleno non giungono mai a corrompere. Questo giudice gli obbliga a non esser ugualmente contenti delle loro produzioni, o almeno a dubitare del merito d'alcune, e a forza di studio e d'esperienza giungono qualche volta a disapprovare in segreto quello di cui si erano vantati in pubblico. Il Boscovich però non palesò mai questo sentimento, e ricco de' proprj lumi pareva che sdegnasse, me-

dianle la lettura, la notizia degli altrui, e che proteggesse con egual impegno tutto quello, che aveva pubblicato, come meritevole dell' ammirazione de' suoi contemporanei, e della memoria della posterità. Se ciò non servì alla sua gloria, servì almeno al suo piacere, e senza temere di essere presuntuoso si studiava di comunicare agli altri quell' idea, che aveva di se medesimo.

Animato dalla curiosità e dall'amor proprio cercava di distinguersi nelle scienze di fatto, in quelle astratte, nella cognizione delle cose politiche, e nelle arti di gusto, e deve far maraviglia che delle puerilità pedantesche entrassero spesso ne' suoi discorsi pieni di filosofia e d'ingegno. Gli stessi suoi viaggi non produssero l'utilità, che doveva aspettarsene, perchè egli procurò di far conoscere più se stesso, che di conoscere gli altri. Ciò non ostante dee riguardarsi come un genio sublime e universale, nè fu piccola gloria per lui l'entusiasmo, con cui fu sempre accolto in Roma, che, onorandolo, credeva di cancellare la macchia della non curanza, che per molti secoli di barbarie mostrò per quelli, che coltivavano le scienze fisiche, e matematiche. Si trattava allora di prosciugare le paludi Pontine, opera grande, e più volte tentata con grave, e quasi sempre inutile dispendio. Un Cardinale, che vi presedeva, risguardò come un soccorso celeste il ritorno del Boscovich, sottopose all'esame di lui quant' era stato fatto e scritto, e specialmente le due relazioni de' celebri matematici Bertaglia e Gabriel Manfredi, e valutò come un oracolo le riflessioni del medesimo. Quantunque egli fosse inclinato ai sistemi nella fisica, e fosse persuaso della forza del calcolo per assicurare, per così dire, l'esistenza delle cause, e per determinare gli effetti, che debbono produrre; ciò non ostante paragonando nella scienza dell'acque questi effetti con quelli che l'esperienza ci scuopre, e trovandoli spesso da questa smentiti, confessò l'umiliante verità, che in questa stessa scienza a
poco

poco o a nulla serve il lusso della geometria; e che solamente una circospetta e lenta osservazione può servirle di guida. Da questa assistito, formò i suoi scritti, e può dirsi che quanto ei scrisse o sul bonificazione delle paludi Pontine, o sul riaprimiento dei porti di Terracina in questo tempo, prima d'Anzio e di Ostia, e dopo di Rimini (a) e che quel tanto che somministrò al suo amico e collega P. Lecchi, e ai Lucchesi sul progetto di aprire un nuovo Ozeri, mostra una circospezione favissima, che esclude ogni frivola congettura, e che dà dei precetti utilissimi pel regolamento dell'acque. Se il suo esempio fosse imitato, si spargerebbero nella società molti vantaggi, o se le risparmierebbero almeno molti inutili e dispendiosi tentativi. Riserbando la geometria per altri oggetti, era sicuro di guadagnarvi, e la scienza maneggiata da un sì gran genio si prometteva dei progressi sensibilissimi e utilissimi per tutto il mondo. L'ottica e l'astronomia l'occupavano allora, e per avere un più luminoso teatro da esercitarle, qual era quello d'un pubblico e celebrato Liceo, accettò l'invito del Senato di Milano, e del Co. di Firmian Ministro Plenipotenziario dell'Imperatrice Maria Teresa nel governo di quella città, che lo chiamavano alla cattedra di matematiche nell'Università di Pavia. Vi venne nella primavera dell'an. 1764, e l'orazione, che recitò nell'ingresso, se non era pomposa per l'elo-

Tomo IV.

e

(a) Interrogato ancora sul porto di Castiglione della Pescaja così rispose al suo amico Ab. Puccinelli in una lettera data di Parigi il dì 13 Aprile dell'an. 1778.

„ In ordine ai lavori di cotesto „ porto, quando si tratta di un'im- „ boccatura, come cotesta, che è for- „ mata da un corso d'acqua chiara, „ il miglior partito e sicurissimo a „ mio giudizio è quello di fare in

„ sufficiente distanza dalla bocca da „ ambe le parti due guardiani, o sieno „ moli perpendicolari colla spiaggia, „ che arrestino le arene, mentre que- „ ste non vengono mai dall'alto, ma „ lungo la spiaggia stessa per la cor- „ rente, che vi si forma per l'urto „ obbliquo de' venti. Slungando que- „ sti, secondo il bisogno, il seno di „ mezzo resta sempre libero e netto.

quenza, lo era per la copia delle cose ottiche trovate di fresco, e da lui o migliorate o spiegate con più facilità ed eleganza, e delle proprie lodi. Gl' invidiosi e gli emoli mal le soffrivano. Furono in principio occulti, poi manifesti, e si aprì così all'amor proprio del Boscovich una sorgente d'inquietudini. S' appigliò al mezzo il più potente per confonderli, che fu quello della pubblicazione delle sue cose diottriche. L' Accademia di Bologna ne ebbe una gran parte, che riportò ne' suoi Atti, e tutte insieme furono comprese nel libro stampato in Vienna l' an. 1767 dal suo amico P. Scherffer col titolo: *Dissertationes Quinque ad Dioptricam pertinentes*. A parer di molti questa è l' opera che fece il più d'onore al Boscovich, come quella che mostra lo sperimentator diligente e sagace, ed il profondo geometra. Comincia dalla descrizione d' un istrumento a prismi variabile d'acqua da lui inventato, cui chiama vitrometro, forse il più idoneo di tutti per determinare le diverse qualità di vetri, tanto in ordine alla forza refrattiva, quanto a quella che dicesi dispersiva, de' raggi di diversa specie. Ciò trovato potè fare una serie di belle esperienze dirette specialmente a dimostrare, che con due lenti si uniscono solamente due colori, e che con tre si possono unire i due colori estremi con quel di mezzo, e queste fanno l' argomento della seconda Dissertazione. Molte di queste esperienze fatte prima da lui e in Pavia e in Milano invitarono la curiosità dei dotti, e di più personaggi e viaggiatori illustri, tra i quali dee nominarsi il Duca di York, che onorando della sua stima il Boscovich, andò più volte da lui per essere instruito de' suoi felici diottrici ritrovamenti. La ricerca della distribuzione della luce nel piccol circolo, che nasce dall' errore della figura sferica, problema nuovo (quantunque analogo in parte all' altro, in cui il Newtono aveva determinata la distribuzione di quel lume pel circolo, che nasce dalla diversa refran-

gibilità) di somma importanza, nè di facile scioglimento, occupa specialmente la terza Dissertazione. Perchè l'Autore sdegnò di scioglierlo analiticamente, dovè battere una lunga e tortuosa strada, per cui conducendo i suoi lettori, mal soffrono questi la lunghezza del cammino, quando i primi passi del nostro Geometra l'avevano condotto ad un'equazione di terzo grado, che veramente a quel problema appartiene, dalla quale, usando del calcolo ordinarjo, facilmente poteva giungere al termine proposto. Ma egli al suo solito preferì la via sintetica, e riguardò poi sempre la soluzione di questo problema come uno de' parti più gloriosi del suo genio geometrico. Non fu meno felice nelle formule, che riguardano la refrazione delle lenti, perchè quantunque interamente prese dal Clairaut, son però dimostrate da lui con metodo più semplice e facile, e questo pregio fa che egli meriti d'esser associato alla gloria dell'inventore. Già si sa che dopo l'invenzione de' telescopj acromatici fatta dal Dollond, quell'illustre Francese applicò il calcolo alla pratica, e che potè dedurre così dalla diversa refrangibilità dei due vetri adoperati, quali dovevano essere le curvature di questi stessi due vetri per distruggere l'aberrazione della refrangibilità. Anche il d'Alembert si rivolse a questo oggetto importante dell'ottica, ma più di tutti l'Eulero, ed avendo il Dollond figlio nel 1765 perfezionata l'invenzione del padre, combinando due lenti concave di *Crown-glass* con una sola convessa di *Flint-glass* per meglio distruggere l'aberrazione della sfericità, le meditazioni e l'opera di tutti questi impegnarono sempre più il Boscovich a continuare l'incominciato lavoro. Ma per tornare alle Dissertazioni, diremo che sono belle e nuove le cose che si espongono nella quarta e nella quinta intorno al foco del lume riflesso dalla superficie posteriore d'una lente, e che soffre due refrazioni, l'una entrando, l'altra uscendo, come intorno ai fochi del lume, che

in una o più lenti è riflesso così dalla prima , come dalla seconda superficie , coi quali ha creduto di spiegare un certo lume erratico , che vedesi alcuna volta intorno agli oggetti guardati coi telescopj , e singolarmente il satellite immaginario di Venere . Noi non possiamo che accennare le cose principali , per le quali il Boscovich fu giudicato benemerentissimo della scienza , per cui rendere più familiare non solo agli studenti , ma anche agli artefici , pubblicò nell'anno 1771 un eccellente libretto Italiano , nel quale riunì tutta la dottrina teorica e pratica dei telescopj diottrici .

Due anni prima trattarono con lui i suoi Colleghi della Società Reale di Londra per mandarlo in California ad osservare il secondo passaggio di Venere accaduto nel 1769 che era molto più importante del primo , perchè questo come un faggio , come una preparazione , servì solamente a familiarizzar gli astronomi col fenomeno , e ad instruirli delle difficoltà , che bisognava superare per ben osservarlo . L'espulsione de' Gesuiti dai dominj del Re di Spagna tolse al Boscovich questa bella occasione di gloria ; vi andò bensì l'Abate Chappe , e vi morì vittima del suo zelo , comprando colla sua vita l'onore di fissare gli elementi di tutto il sistema solare . Il Boscovich certamente non sarebbe stato men coraggioso , avendo molte volte esposta la sua vita ai pericoli , quando si trattava del pubblico bene , e dell'onor delle scienze . Quello che non soffriva erano le contraddizioni , e le arti vili dell' invidia , e per liberarsi da quelle , che incontrava in Pavia , intraprese un secondo viaggio per la Francia e per le Fiandre . Trovò nelle vicinanze di Bruselles un contadino , che per le sue felici cure chiamavasi il Dio delle gambe , e quella che fece al Boscovich , che da lungo tempo mal poteva servirsi delle sue per le deposizioni dei passati mali , confermò la singolarità dell'elogio . Tornato in Italia fu trasferito dall'Università di Pavia alle scuole Palatine che formavano in Milano come un altro Liceo , e abitando

fra suoi nel Collegio di Brera, vi perfezionò in gran parte a spese proprie l' Osservatorio non molto prima cominciato, che divenne ben presto illustre per la celebrità e per le fatiche del Direttore e per la copia degl' istrumenti. Affociò alla sua gloria alcuni giovani suoi colleghi, che tranne uno, il più diletto e il più costante de' suoi scolari ed amici, cui aveva chiamato a questo fine, divennero presto suoi nemici, tanto più molesti, quanto più fiancheggiati dalla protezione del Governo. Gl' intrighi di costoro fecero sì che se gli levò la soprantendenza alla specola, lasciandogli la sola libertà di farvi l' osservazioni. Ricevè questa nuova nel mentre che era ai bagni di Abano col Duca di Modena, e ne fu dolentissimo. Se ne lamentò col Principe di Kaunitz, e implorò la sua protezione, ma non fu ascoltato. Allora scrisse al Co. di Firmian con quella libertà, che gli concedeva la giustizia della sua causa, e protestò che non sarebbe tornato a Milano, se non si restituivano le cose nel primiero grado, e se non si liberava lui e quel suo fedele e dotto scolare l' Abate Puccinelli dalla violenta persecuzione degl' invidiosi. Perchè le sue querele e le sue istanze non ebbero l' esito che desiderava, deliberò di ritirarsi in Ragusi, e di finirvi i suoi giorni in un ozio tranquillo e dignitoso. Intanto consumò dieci e più mesi in Venezia, onorato e accarezzato dai più illuminati Patrizj, e dagli Ambasciatori di Vienna e di Francia, ai quali per lo più palesava la sua gratitudine con epigrammi latini. Ivi, mentre aspettava il tempo opportuno per la navigazione, ricevè la nuova dell' abolizione della Compagnia, avvenimento per lui dolorosissimo, che lo fece rinunziare all' idea di tornare in patria, e che lo rendè per alcun tempo incerto del luogo ove avrebbe posta la sede degl' studj suoi. In tale incertezza d' animo essendo egli venuto in Toscana, io gli mostrai la clemenza del Principe, l' amenità del luogo, l' ingegno de' nazionali, la

celebrità del Liceo Pisano, e lo confortai a rimanervi colla fondata speranza d'una cattedra. Mi permise di trattare l'affare nel tempo, che invitato dal Sig. la Bord cameriere favorito di Luigi XV tornò con lui a Parigi; vi aspettò le mie lettere, che furono tali quali gliele aveva predette, cioè piene di stima, e di liberalità del Principe, che gli offeriva la cattedra d'ottica nell'Università di Pisa, cui creavasi allora per lui. Disse che avevan tardato di troppo a pervenirgli, perchè poco prima aveva accettato la generosa offerta fattagli dal Re di due annue pensioni di otto mila lire tornesi col titolo di Direttore d'ottica per la marina, e coll' onorevole espressione di servire all' accrescimento delle scienze, mediante il suo zelo e le sue sublimi meditazioni, e alla marina colla perfezione delle lenti acromatiche. Ei credè allora che la sua fortuna fosse giunta al colmo, ma o fosse invidia o incostanza, quella stessa città, che in altri tempi aveva tanto lusingato il suo amor proprio, gli fu sorgente copiosa d'amarozze. Un carattere aperto e franco nel luogo delle simulazioni e degl'intrighi, un rispetto sincero per la religione ove si confonde il nome di Filosofo con quel d'Incredulo, il parlar quasi sempre di se, ove s' idolatra l'amor nazionale, il ridire spesso epigrammi latini ove si fa guerra alla lingua del Lazio, e le frequenti lodi d' un Istituto, il cui nome ricorderà sempre alla Francia esili, violenze e discordie intestine, erano tante cagioni dell' alienazione di molti dal Boscovich. Aggiungasi a ciò, che la maggiore e la più potente parte dei membri dell' Accademia delle Scienze riguardava come un' offesa fatta al corpo le straordinarie beneficenze accordate ad uno straniero, onde gl' impedì sempre di esservi ascritto, non ostante le patenti di naturalizzazione, le promesse d' un potente Ministro, e di essere egli un de' più vecchi corrispondenti dell' Accademia medesima. Ma non per questo si raffreddò il suo ardore, anzi si accese

ogni dì più , e per provare l' iniquità altrui , e il merito proprio , si diede tutto a rifondere le fue vecchie opere , e a formarne delle nuove .

Molto tempo prima aveva dall' Italia mandato all' Accademia medesima un suo metodo per determinare l' orbita di una cometa , supposta parabolica , con tre osservazioni fatte ad intervalli non molto distanti . Un testimonio dell' approvazione fu l' impressione di due opuscoli latini , che lo conteneva , nel VI. volume delle memorie de' dotti Stranieri . Riprese fra mano questo argomento , lo difese dall' altrui censure , lo corresse dagli sbagli commessi nell' edizione suddetta , e lo confermò colle osservazioni del Sig. di Messier il più felice indagatore delle comete . Un' operazione grafica semplicissima , un puro calcolo trigonometrico servono a determinare l' orbita , e tutto il metodo si fonda sopra la riduzione d' un moto curvilineo e ineguale nell' arco a un moto uniforme e rettilineo nella corda . Vi sono molti casi , nei quali non è necessario di fare alcun cambiamento alle osservazioni , e allora il problema si riduce a un' equazione di sesto grado , che si ottiene parimente , impiegando in altri casi una piccola riduzione della seconda longitudine facile a trovarsi mediante una costruzione grafica . Avvi una costruzione ben singolare della medesima equazione mediante un cerchio , e una qualunque data parabola . Nelle giunte fatte agli opuscoli , oltre alle dimostrazioni delle cose solamente indicate in essi , vi sono molte determinazioni semplici della parabola progettata , e vi si trova un' equazione di quindici gradi , se si vuol mettere in equazione la medesima riduzione della seconda longitudine . Vi si dà il metodo per trovare l' equazione generale pel caso di tre osservazioni qualunque , ma non può servire a causa dell' enorme elevazione e complicazione . Vi si dà altresì un esempio circostanziato del risultato della costruzione e di tutto il

processo del calcolo trigonometrico; e un altro esempio dell' uso, che per evitare una nuova falsa posizione si fa di quattro equazioni differenziali di trigonometria, trovato dall' Autore. Contengono tutta la connessione, che le piccole differenze di sei termini di ciascun triangolo hanno fra loro, e ciò non solamente quando vi sono due termini costanti, che è il solo caso considerato dal Cotes, e ridotto dagli astronomi a un gran numero di differenti teoremi e formule, ma ancora pel caso quando non vi è che un sol termine costante, o quando tutto vi è variato. Si espone un metodo per correggere con osservazioni lontane l' orbita trovata per approssimazione, metodo che può applicarsi ancora alla correzione dell' orbite dei pianeti. Fanno come un supplemento dell' opera molte Memorie relative alle cose trattate in essa. Ve n' è una per determinare con una sola osservazione, nel ritorno d' una cometa conosciuta, la sua nuova strada apparente, un' altra per applicare questo metodo alla ricerca dell' orbita ellittica, quando le osservazioni lontane non corrispondono a una medesima orbita parabolica, pel quale effetto aggiunge un altro metodo indipendente da quello, che fa l' oggetto principale dell' opera, e che può applicarsi ancora a determinare le orbite dei pianeti con tre sole osservazioni lontane, il che dee essere d' una grande utilità per perfezionarne le teorie. Per trovare un' ellisse quando è molto allungata, lo che succede sempre nell' orbite delle comete, bisogna avere dell' osservazioni molto esatte. Ciò determinò l' Autore ad aggiungere alle suddette un' altra Memoria, in cui fa vedere la grande utilità di provvedere gli osservatorj d' un quarto di cerchio verticale mobile intorno a un asse con un' alidada, che in un gran cerchio orizzontale segna gli azimuti. Ei prova, che con un tal istrumento e con un buon orologio si può avere l' altezza del polo, e la posizione di tutte le fisse indipendentemente

mente dalle refrazioni, la tavola delle refrazioni indipendentemente da ogni ipotesi fisica, il luogo d'un pianeta o d'una cometa col soccorso di questa tavola mediante un' osservazione momentanea, il che ne procurerebbe un grandissimo numero in pochissimo tempo per ridurle alla medesima epoca, ed ottenere così, prendendone il mezzo, la più grande esattezza. Le formole differenziali, e trigonometriche da lui applicate a molti problemi astronomici con soluzioni facilissime, la dimostrazione semplicissima d'alcuni teoremi di trigonometria elementari, ma di grand'uso, varie osservazioni e riflessioni sulla coda delle comete e sopra altri fenomeni celesti, varj metodi nuovi per verificare tutti i differenti strumenti, che ora adoprano gli astronomi, l'invenzione di nuovi, la teoria delle refrazioni, la dimostrazione dei teoremi e la soluzione dei problemi appartenenti alla sparizione dell'anello di Saturno, mediante la linea dei seni ~~come~~ proprietà interessanti di questa curva dimostrate colla sola geometria lineare, la maniera d'impiegare il ritorno di Venere o di Mercurio nella medesima longitudine dopo la loro stazione per correggere tutti gli altri elementi delle loro orbite, delle quali si fa con tutta la precisione possibile il tempo periodico e il luogo del nodo, una nuova maniera di verificare lo strumento dei passaggi, il piano per erigere un nuovo Osservatorio furono soggetti di molte altre memorie, che mostrano un uomo nato per facilitare la cognizione d'una scienza, che è spesso involta tra le tenebre di calcoli astrusissimi, e che domanda diligenze infinite per liberare dagli errori gl'istrumenti, di cui fa uso. Nello stesso tempo che serviva all'astronomia, e che dava agli astronomi occasioni di adoperare e di esporre i suoi felici ritrovamenti (a) non

Tomo IV.

f

(a) Vedaſi tra l'altre opere l'Aſtronomia del Sig. de la Lande dell'ultima edizione, in cui ſi dà un lungo eſtratto della teoria delle refrazioni, e

dimenticava l'oggetto principale del suo impiego, che riguardava i cannocchiali acromatici. In un'opera latina diede la descrizione d'un istrumento, sul quale posta una specie di prisma di vetro a angolo variabile composto di due parti, l'una piano-convessa, l'altra piano-concava, scorrendo l'una sull'altra, fa variare l'angolo. L'idea della variazione dell'angolo è del P. Labbat; ma l'istrumento, la maniera di tagliare i due vetri, e la maniera di servirsene è tutta propria del Boscovich. Per mezzo di esso si trova facilissimamente la qualità refrattiva e dispersiva dei differenti vetri, mediante il paragone d'un piccolissimo prisma di ciascuna sostanza con questo prisma variabile. L'inventore espone la maniera di servirsene, le formole per dedurne queste qualità, e i raggi della sfericità sì per gli obbiettivi, che per le oculari acromatiche, di cui dà le dimostrazioni molto più semplici delle comuni, colle espressioni le più facili per la pratica. Dà ancora degli esempj di tutto il calcolo numerico per formare un obbiettivo a due, e a tre lenti. E' ingegnoso il metodo per paragonare insieme due vetri rapporto alla qualità dispersiva, non solamente dei raggi estremi, ma anche di qualunque di due raggi colorati, il che sarà di grand'uso per riunire più esattamente in un foco i raggi con tre lenti di tre sostanze diverse, quando la chimica avrà finalmente trovato un mezzo sicuro d'avere dei vetri di differenti sostanze bastantemente omogenee e pure, perocchè avea dimostrato altrove, che due sostanze, come il *flint-glass* e il *crown-glass*, non possono riunire che due soli colori, ond'è che impropriamente si chiamano acromatici i nuovi telescopj. Anche la maniera di correggere i colori, che derivano dalle oculari, fece la materia d'un

si fa menzione di molti altri metodi inventati dal Boscovich. Il Bailly nel-

la storia dell'Astronomia loda ancora il poema degli Eclissi.

opuscolo, e trattò in un altro il metodo di trovare con tre certi fochi d'una lente già formata un diretto e due riflessi, i raggi delle due sue sfericità e la quantità refrattiva del suo vetro, lo che serve per vedere se un artefice ha bene eseguite le sfericità date del calcolo, e qual sia la difettosa, e di quanto per emendarla. Ma quello, di cui mostrava di compiacersi estremamente, era il metodo di calcolare l'errore residuo d'un obbiettivo già calcolato, maravigliandosi egli medesimo del buon successo di questo suo ritrovamento (a). Le molte e belle cose trattate prima nelle cinque dissertazioni pubblicate in Vienna furono da lui riordinate e meglio esposte per confermare vie più la prova del suo valore in una scienza, che, creata di fresco e maneggiata da ingegni sublimi, aveva bisogno di chi la promovesse, e ne fa-

f ij

(a) Una sua lettera de' 25 di Settembre dell' an. 1783 ne è una prova. Ella è diretta al Sig. Abate Puccinelli, e noi ne riporteremo una porzione. „ L' ultimo supplemento è „ riuscito lungo; ma è essenziale. „ Son restato sorpreso della precisio- „ ne, con cui nel primo degli ogget- „ tivi a due lenti determinati nel se- „ condo opuscolo, per cui ho fatto i „ calcoli esatti per vedere gli errori „ residui, sono stati corretti amendue „ gli errori di refrangibilità e sferi- „ cità, e ciò non solo per li raggi „ infinitamente prossimi all' asse rossi „ e violacei, e arrivati al fine dell' a- „ pertura, ma anche per gli arrivati „ fra il centro e il bordo. Nell' og- „ gettivo comune l' errore di refran- „ gibilità v'è alle centesime; quello „ di sfericità alle millesime; nell' og- „ gettivo composto appena alcuni arri- „ vano alle decime millesime e po- „ chissime; sicchè nè la determina- „ zione degli m, nè il lavoro mate- „ riale della superficie può arrivare „ ad evitare questi residui. Bisogna „ dire che gli errori nati dalle quan- „ tità disprezzate si sieno compensa-

„ ti. Vi si vede poi, che dove il New- „ ron in quel suo obbiettivo avea „ trovato l' errore della refrangibilità „ più di 4000 maggiore di quello del- „ la sfericità nell' apertura di un pol- „ lice per ogni piede di distanza fo- „ cale, che si dà agli acromatici, il „ longitudinale appena è a 12 doppi „ maggiore; onde se si considera in „ oltre il mio ritrovato dell' essere la „ densità della luce nel circoletto di „ quello della sfericità infinita e nel „ centro e nel lembo, dove in quel- „ lo della refrangibilità verso il lem- „ bo s'vanisce, si vede, che la corre- „ zione di quel primo è essenzia- „ le almeno quanto quella del se- „ condo e forte più; onde gli acro- „ matici fanno il grande effetto, per- „ chè appunto in essi si correggono „ amendue. Vedo da que' risultati, „ che gli oggettivi a due possono es- „ sere ugualmente buoni che quelli a „ tre quando i vetri sieno ugualmen- „ te buoni, e le misure calcolate be- „ ne su gl' individui vetri che si ado- „ prano. Vi vogliono di buoni ve- „ tri, e questi si aspettano dalla Chi- „ mica.

cilitasse la cognizione. Vorremmo ancor dare al nostro Ottico il merito dell'invenzione del micrometro prismatico col moto rettilineo dentro il tubo, ma poichè o per infedeltà di chi credeva suo amico, a cui aveva comunicato le sue idee, o perchè realmente altri trovassero nello stesso tempo, o prima la stessa cosa, da dover dividere con questi la gloria della scoperta, noi non decideremo una questione, che porterebbe seco l'accusa e la condanna di celebrate persone. Le lettere del Boscovich su questo articolo sono scritte con quella libertà, cui sembra non potere ispirare che la giustizia della causa e il testimonio della propria coscienza; oltre di che vi sono degli uomini, che hanno diritto di rendere testimonianza a loro medesimi, e il genio dell'invenzione è naturalmente ardito nelle sue espressioni, e qualche volta presuntuoso. Può dirsi ancora per giustificazione di lui, che l'amore ardente per l'immortalità del nome, che tanto ci occupa, e che tanto poco ci appartiene, era scusabile nel tempo e nel luogo, in cui si procurava di persuadere il Governo, ch'ei non meritava le straordinarie beneficenze accordategli. Condannato a combattere, finchè ei visse, cogli invidiosi, domandò ed ottenne la licenza di tornare in Italia col fine di pubblicare le sue nuove opere, il che eseguì nel 1785 dopo di aver dimorato quasi due anni in Bassano presso il Remondini, che ne fu l'editore. Le divisè in cinque tomi, ed annunziò in italiano, in francese, e in latino su quali argomenti si aggiravano. Il primo e secondo tomo abbraccia tutto ciò, che appartiene all'ottica; e alle molte cose nuove da lui trovate, e da noi accennate deesi aggiungere quella d'un cannocchiale ad-acqua, col quale aveva fatte molte belle e curiose esperienze in Milano. Il terzo, oltre le sue meditazioni per determinare le orbite delle comete, ha la teoria del nuovo pianeta scoperto poco prima in Inghilterra. Il quarto contiene tutto ciò che serve alla

verificazione degl'istrumenti astronomici. Il quinto finalmente, consecrato anch'egli all'astronomia, tratta del comparire e scomparire, che fa l'anello di Saturno in certe sue particolari posizioni per rapporto al Sole ed alla Terra; d'un metodo per determinare il movimento del Sole intorno al suo asse per mezzo delle osservazioni delle sue macchie; d'un altro per determinare gli elementi meno sicuri dell'orbita di Venere, impiegando il ritorno di essa alla medesima longitudine; e di altri metodi per correggere gli elementi sì di una cometa, quando si ha la longitudine del suo nodo e l'inclinazione dell'orbita, sì d'un pianeta per mezzo di tre osservazioni. Vi sono altri opuscoli, che determinano la curva nata dalla proiezione d'un'orbita inclinata sul piano dell'ecclittica o su qualunque altro piano, che insegnano il modo di calcolare l'aberrazione degli astri nata dalla propagazione successiva della luce coll'ajuto di certe formole differenziali esposte nel terzo tomo, che sciolgono il problema, in cui si cerca qual sia il lembo illuminato della Luna, il cui arrivo al meridiano debba aspettarsi, e che danno delle dimostrazioni semplicissime d'alcuni bei teoremi appartenenti ai triangoli. L'opuscolo sulla maniera di determinare la lunghezza del pendolo semplice è per se solo una prova evidente della maravigliosa sagacità del nostro Astronomo. Non facciam menzione d'un compendio d'astronomia fatta per uso del Duca di Chartres perchè egli non ha altro merito se non che quello della brevità e della chiarezza. Tutte queste opere portano in fronte il nome di Luigi XVI, e l'espressione della più sincera gratitudine verso un Monarca, che riguarda la protezione delle scienze come uno degli affari il più utile allo Stato, e il più glorioso al suo regno.

Dopo l'edizione di questi cinque volumi ritornò il Boscovich in Toscana, e vi si trattenne più mesi presso i Padri Vallombrosani. Di qui passò a Milano, e con un manifesto





MEMORIE

D I

MATEMATICA E FISICA

L' OPPOSIZIONE

DEL NUOVO PIANETA OSSERVATA NEL 1788.

Dal Sig. ANTONIO CAGNOLI.

COn un quadrante di tre piedi fodamente affettato, e fornito di ottimo cannocchiale acromatico con eccellente micrometro a fili, ho osservato tre volte nel Meridiano, cioè li 16, li 18, e li 20 Gennajo, la differenza apparente d'ascensione retta e di declinazione tra il novo pianeta e la stella η del Cancro. La posizione di questa stella determinata dal *Mayer* pel 1756 e ridotta al 1760 differisce da quella del *Bradlejo* di 3" nell' ascens. retta e di 1", 2 nella declinazione. Ho preso il mezzo fra le due posizioni, e vi aggiunsi la precessione perfino ai rispettivi giorni delle osservazioni, facendo quella in longitudine = $50^{\circ}, 252 + 0'', 221$ per l'azion de' pianeti; e impiegando $- 0'', 241$ per il moto del punto equinoziale sull' equatore dipendentemente dall'azione medesima. La

Tomo IV.

A

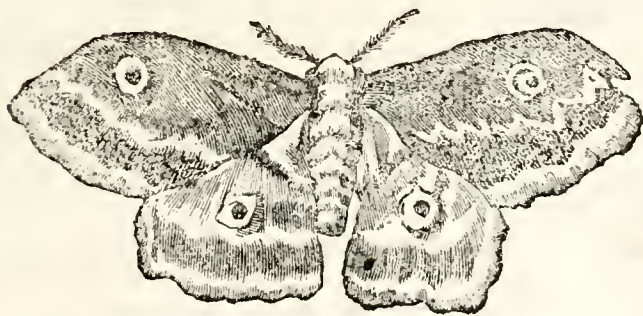
prima quantità fu stabilita dal Sig. *de la Lande* mediante un gran numero di comparazioni (Astronom. Tom. IV. Supplem. ai n. 917, 2745). Le altre due quantità suppongono, in primo luogo che le perturbazioni, prodotte da Mercurio, Marte, Giove e Saturno, sieno tali quali vennero valutate dal medesimo celebre Astronomo (Ibid. Supplem. al n. 2737), e in secondo luogo che la diminuzion secolare dell' obliquità dell' eclittica sia di $57''$ conformemente alla teoria ed alle osservazioni di rispettabili Astronomi, della qual diminuzione vengono ad imputarsi $38''$ all' azione di Venere. L' uso poi della seconda quantità, non ancora generalmente ricevuto, è stato dimostrativamente inculcato dalla sagacità del Sig. Ab. *Oriani* nelle Efemeridi Milanesi degli anni 1781, 1783. Ho inoltre adoperato $23^{\circ} 27' 56'' \frac{1}{2}$ per obliquità apparente dell' eclittica nel calcolar le longitudini geocentriche osservate, ho preso il luogo del Sole dalle tavole del *la Caille* pubblicate dal Sig. *de la Lande*, e il luogo del pianeta da quelle del Sig. *de la Place* calcolando però direttamente l'equazione del centro e la latitudine eliocentrica per averle con ogni esattezza.

Se si chiamano $L' L'' L'''$ le tre longitudini geocentriche calcolate, $\lambda' \lambda'' \lambda'''$ le osservate, i risultati furono: $L' = \lambda' + 6'', 6$; $L'' = \lambda'' + 1'', 3$; $L''' = \lambda''' + 3'', 2$. Preso il mezzo, l'error delle Tavole nella longit. geocentrica viene ad essere $+ 3'', 7$, che poi si trova di $3'', 5$ nell' eliocentrica. Diminuite pertanto di tali quantità rispettivamente la longitudine geocentrica e l' eliocentrica date dalle Tavole pel momento dell' osservazione del dì 18, risulta l'opposizione nel giorno stesso a $0^{\text{h}} 4' 27''$ tempo medio del meridiano di Parigi, con $3^{\circ} 28' 10' 19''$, 5 di longitudine geocentrica ed eliocentrica vere del pianeta contate dall' equinozio medio, e con $9^{\circ} 28' 10' 19''$, 5 di longitudine vera del Sole, nella quale è compresa l'aberrazione, non già la nutazione.

L'error medio delle Tavole nella latitudine boreale geocentrica è $-4'', 5$ che diventano $-4'', 3$ nell' eliocentrica. Esse latitudini, aumentate di queste rispettive quantità, e ridotte al momento dell' Opposizione, sono, la geocentrica $34' 45'', 2$, l' eliocentrica $32' 54'', 4$.

Se nel calcolo di questa Opposizione si adopera $33''$ per

diminuzione secolare dell' obliquità dell' eclittica come vuole il Sig. *de la Lande*, allora l' effetto delle perturbazioni planetarie da aggiungere alla precessione in longitudine è solamente $0'', 072$, ed il moto annuo del punto equinoziale sull' equatore — $0'', 0785$, donde viene a crescere di $4''$ l' asc. retta di η del Cancro, e per conseguenza quella di Urano o Herschel. Cresce pure di $8''$ l' obliquità attuale dell' eclittica: e questi incrementi aggrandiscono di $3'', 6$ le longitudini geocentriche osservate, e diminuiscono di $6'', 3$ le latitudini. Quindi l' error delle Tavole in longitudine sparisce, e quello nella latitudine geocentrica diviene $+ 1'', 8$, nell' eliocentrica $+ 1'', 7$. Con questi dati risulta l' Opposizione li 18 Gennajo 1788 a $0^{\text{h}} 5' 51''$ t. m. con $3^{\circ} 28' 10'' 23''$ di longitudine geocentrica ed eliocentrica del pianeta, e con $9^{\circ} 28' 10' 23''$ di longitudine vera del Sole, alle condizioni già dichiarate; con $34' 38''$, 9 di latitudine geocentrica, e $32' 48''$, 4 di latitudine eliocentrica.



CONSIDERAZIONI SINTETICHE

SOPRA DI UN CELEBRE PROBLEMA PIANO,
E RISOLUZIONE DI ALQUANTI ALTRI
PROBLEMI AFFINI

Del Sig. D. ANNIBALE GIORDANO DI OTTAIANO.

P R E S E N T A T A

Dal Sig. CAVALIERE LORGNA. (a)

LE ricerche geometriche, che qui mi son proposto esporre, da altro principio non nacquero, che da un problema famoso sì per la sua eleganza, che per essere stato l'oggetto delle occupazioni de' sommi Geometri *Castillon*, *la Grange*, *Euler*, *Fufs*, *Lexel*: eccone breve istoria.

Il Sig. *Cramer*, rinomato Analista, e degno Professore in Ginevra, propose nel 1742 al Sig. *de Castillon* il problema d'inscrivere in un circolo un triangolo rettilineo, i di cui lati distesi passassero per punti dati: impegnandone codesto Geometra a risolverlo coll'analisi degli antichi (forse perchè se ne sembrava sterile qualunque giudiziosa applicazione di quella de' moderni), ed obbligandolo alla soluzione colle seguenti parole „ Nella mia gioventù amava, come voi, il metodo geometrico degli antichi. Un vecchio Geometra per saggiare „ le mie forze in questo genere mi propose il problema, che

(a) *Nota del medesimo.* Questo scritto è stato mandato da Napoli alla Società dal Sig. Balì Co. de' Sagramosti fin dal dì 2. Ottobre del 1787, sicchè il Geometra che n'è l'Autore il compose nella tenera età di poco più che sedici anni. Parvemi pertanto dicewole il dargli luogo negli Atti della Società sì per questo, che per ef-

sere stati occupati intorno allo stesso soggetto prima del nostro giovanetto diversi illustri matematici, e sì ancora per il di più ch'egli fece risolvendo il Problema principale in tutta la sua generalità con facile metodo, che ricorda non già propriamente la sintesi, ma l'analisi degli antichi.

„ io vi propongo: tentate di risolverlo, e vedrete quanto il „ medesimo sia difficile,,. Il Sig. *de Castillon* accettò questo amichevole invito, e seriamente applicatovisi altro non rinvenne, che alcuni teoremi che sembravano menarne allo snodamento senza però mai produrlo; sicchè quasi disperandone dopo varj tentativi lasciò l'impresa. Coll'occasione poi che l'istesso problema fu nel 1755 pubblicamente da un Anonimo proposto in Hays, l'illustre M.^r *Bouquet* riputandolo come niente indegno delle considerazioni de' Geometri ne incoraggiò il Sig. *de Castillon* alla soluzione. La riprese egli invero, ma il problema come restò alle sottili indagini di un sì valente Sintetico, lo trattenne fintantochè, secondo le sue stesse espressioni, quasi piccato dall' inutilità de' suoi sforzi rinvenne alcuni lemmi a tale uopo, mediante l'ajuto de' quali giunse alla desiderata soluzione; ma sì tardi, che non si discorreva più nè del problema, nè dell' Anonimo. La pubblicò poi negli Atti dell' Accademia di Berlino per l'anno 1776; ove leggesene ancora una puramente analitica del Sig. *de la Grange*.

Or essendomi imbattuto in questo luogo de' suddetti Atti ammirando l'eleganza, e semplicità del problema, pensai di esercitarmivi in risolverlo; e perchè M.^r *de Castillon* nella prefazione della sua Memoria ne avvisava, non essere il medesimo che il 40.^{ma} di Pappo universalizzato, andato un giorno a riscontrare l'istesso luogo delle Collezioni Matematiche del medesimo, tosto mi riuscì, come è facile avvenire, di risolvere il problema generale partendo da que' medesimi semplicissimi principj, onde n'era stato elegantemente risoluto il particolare dagli antichi; e comunicatane la soluzione ad un illustre Geometra mio amico, giudicò costui esserne la medesima molto più semplice, e secondo il raffinato gusto degli antichi, che quella del Signor *de Castillon*; il perchè incoraggiato ardi tentare lo snodamento dell' istesso problema concepito sotto aspetti incomparabilmente più universali, ed impiegarmi in questo dilicato, e piacevole lavoro in quelle poche ore, che mi era permesso vacare dalle serie, e dure occupazioni analitiche: ci pervenni seguitando i medesimi principj degli antichi, e ne distesi una breve dissertazione al solo fine di dimostrare con tali esempj, quanto il metodo geo-

metrico degli antichi in alcune circostanze superi in eleganza, semplicità, ed universalità l'istessa moderna analisi: avverandoli alcune volte, che partendo da semplicissimi principj scoperti con raziocinio sintetico, si pervenga alla soluzione di problemi sommamente astrusi, alla quale l'algebra non arriva se non che per tortuosi giri, ancorchè maneggiata da' più valenti analisti.

Ma dopo qualche tempo essendo qui capitati i *Commentarij* di Pietroburgo per l'anno 1780, mi avvidi, che questo istesso problema ne avea occupati, dopo il grande *Euler*, i rinomati Signori *Fufs* e *Lexel*, de' quali quest'ultimo esamina principalmente se la soluzione di *M.^r de la Grange* sia suscettibile di costruzione, come ne faceva dubitare ad *Euler* la prolissità della medesima. Le soluzioni di codesti Signori sono analitiche; ma siccome vengono interamente quasi appoggiate al medesimo principio degli antichi, mi sembra doverli le medesime riputare sintetiche. Del resto devo credere, che i soprallodati Geometri non abbiano voluto prendersi la pena di considerare la secondità dell'istesso principio, altrimenti non mi sembra che trascurato avrebbero di applicarlo ad altri problemi elegantissimi.

Per vendicare dunque in qualche maniera il metodo geometrico degli antichi dagl'ingiusti torti di alcuni de' moderni Geometri, mi è sembrato convenevol cosa premettere il problema particolar di Pappo colla genuina soluzione degli antichi, di esporre indi la mia soluzione del problema di *Castillon*, e passare man mano a problemi sempre più universali fino al 6.º, che se non erro, è uno de' più semplici, e generali problemi, che fra geometrici possano proporsi.

Prego intanto il savio ed imparziale lettore ad esaminare il filo, e l'universalità de' seguenti problemi, e a giudicare, se di molti de' medesimi si possono dare soluzioni puramente analitiche, cioè senza servirsi di qualche lemma sintetico a tale uopo ricercato. La cosa mi è sembrata se non disperata, almeno difficilissima; ma credo, che ciò unicamente dipenda da mia insufficienza: perciocchè di molti problemi, che un tempo vantavano i Signori Sintetici, ne sono state date delle soluzioni puramente analitiche da sommi Algebristi, nel che specialmente si è distinto l'incomparabile *M.^r de*

la Grange. Ma quello, che principalmente mi fa disperare di una tale impresa, si è l'esserne la soluzione puramente analitica del sopraccitato problema data dal medesimo Sig. *la Grange* cotanto intralciata, che come abbiain detto, ne dubitava *Euler* della possibilità della sua costruzione. Si giudichi da questa quale dovrebbe esser quella degli altri problemi tanto più universali, che noi qui ne rechiamo.

Del resto se di questi problemi si diano delle eleganti soluzioni analitiche da qualche Genio superiore, la conseguenza, che credo ragionevole dedursene, si è di dover si il Geometra esercitare sì nel metodo sintetico, che nell'analitico per servirsene poi, come più gli riesce comodo, nelle occasioni. L'avversione, che hanno alcuni de' migliori Geometri per la sintesi, credo di esser nata dalla poca cura, che i medesimi si han preso di formarsene una giusta idea. Mi sembra che il metodo geometrico degli antichi in altro non consista, che nell'industria di scovire que' tali principj d'invenzione, d'onde poi quasi da se stesso fluisca il resto della soluzione, sia che si prosiegua con raziocinio semplicemente geometrico, sia con un' arte simbolica, come è l'Algebra. Infatti se attentamente si esaminino nel fondo le opere de' sommi Geometri tanto antichi come *Archimede*, *Apollonio*, che moderni, che sono passati pe' migliori sintetici, come *Ugenio*, *Newton*, si ravviserà esser questo stato il loro fare, che forse è l'unico per pervenire alle immortali invenzioni. Ma veniamo al problema.

PROBLEMA I. (Fig. 1.)

In un dato cerchio NG iscrivere un triangolo DEF, i di cui lati prolungati passino pe' tre punti A, B, C dati di sito, e posti in linea retta.

O sia (secondo lo stile degli antichi) inclinare *ADB*, e mettere in direzione le rette *EF*, *FC*.

S O L U Z I O N E.

1. Si unisca *ABC*, alla quale s'intenda condotta per *E* pa-

S C O N S I D E R A Z I O N I S I N T E T I C H E

parallela EG , e congiunta GF la medesima si distenda in H . E perchè l'angolo EGF adegua sì l'angolo EDF , che l'altro FHB , faranno uguali i due angoli EDF , FHB , e quindi simili i due triangoli DAB , FHB , che hanno l'angolo DBA di comune, e 'l rettangolo ABH uguale al dato FBD , e con ciò dato il punto H .

2. Si tiri per G al medesimo circolo la tangente GK , che incontri AC in K .

Sarà dato ancora il punto K : imperocchè l'angolo HGK è uguale all'altro GEF ; ma questo a cagione delle parallele EG , AC , adegua il suo alterno FCH ; sarà dunque l'angolo HGK uguale all'altro FCH ; ed essendo quindi simili i due triangoli HGK , HFC , ne farà il rettangolo CHK uguale al dato FHG , e conseguentemente essendo dato il punto K si ridurrà il problema a condurre dal punto K la tangente KG al circolo NG . Come b. r.

P R O B L E M A I I . (Fig. 2.)

*In un dato cerchio NG iscrivere un triangolo DEF, i
di cui lati discesi passino pe' tre punti A, B, C
dati di sito.*

S O L U Z I O N E .

1. Si unisca AB , alla quale s' intenda condotta per E parallela EG e congiunta GF la medesima si protragga in H . Sarà dato il punto H , dimostrandosi con quella istessa brevità, che nel Prob. I.

2. Similmente unita HC , alla medesima si concepisca tirata per E parallela EI , e congiunta IG la medesima si distenda in K .

Sarà nell' istessa guisa, che prima, dato il punto K : imperocchè l'angolo EIG costituisce due retti sì coll'angolo EFG , che coll'altro HKG ; dunque l'angolo EFG o l'altro HFC farà uguale all'angolo HKG , ed essendo quindi simili i due triangoli HFC , HKC , farà il rettangolo KHC uguale al dato FHG , e con ciò dato il punto K .

Essendo quindi le rette EG , EI rispettivamente parallele
alle

alle rette HB , HC , farà l'angolo IEG uguale al dato CHB , ed unito il raggio LG farà parimenti dato l'angolo LGK ; e perciò costruendosi sopra di LK una porzione di circolo capiente un tale angolo, l'intersezione di questa col circolo NG determinerà il punto G . Come b. r.

A V V E R T I M E N T O I.

Si ravvisa, che due sianò i passi, che si danno nella soluzione di questo problema, ambedue derivati dal semplicissimo principio degli antichi. Il Sig. *de Castillon* diede invece il primo, ma appliciatosi poi ad altri principj venne a privare la sua soluzione di quella eleganza, di cui era suscettibile.

C O M P O S I Z I O N E (Fig. 2. n. 2.)

Da questa semplicissima analisi si deduce la seguente costruzione, che ne rapportiamo in grazia della celebrità di siffatto Problema, ed affinchè si veggia non aver bisogno la sua dimostrazione nè di alcun lemma, nè di deduzione ad assurdo.

C O S T R U Z I O N E.

1. Congiunta AB si divida la medesima in H , sicchè il rettangolo ABH pareggi il quadrato della tangente condotta per B al circolo NI .

2. Similmente unita HC si divida la medesima in K , sicchè il rettangolo CHK sia uguale al quadrato della tangente tirata da H al medesimo circolo.

3. Dal punto H elevata ad HB la perpendicolare HM , si costruisca su di LK una porzione di circolo capiente l'angolo CHM , che intersechi il circolo NI in G .

4. Si congiunga primieramente la retta HG , che tagli il cerchio NI in F , indi le BF , CF , che prodotte incontrino di nuovo il medesimo circolo in D ed E , e finalmente si uniscano i punti A , D mediante la retta AD , che dico passare per E , sicchè DEF sia il triangolo richiesto. Come b. f.

D I M O S T R A Z I O N E .

Imperocchè si congiungano le rette KGI , EG , EI , e da L si cali su di KI il perpendicolo LO . E perchè il rettangolo KHC è uguale dalla costruzione all' altro FHG , i due triangoli FHC , HKG , che hanno l'angolo GHC di comune, saranno fra di loro simili, e l'angolo HKG adeguerà l'altro HFC , o sia EFG , il quale costituendo due retti coll'angolo EIG , saranno conseguentemente ancora gli angoli HKI , EIK uguali a due retti, ed EI ne sarà parallela ad HC .

Inoltre gli angoli GLO , LOG sono uguali all' altro LGK , o sia CHM , e tolto di comune l'angolo retto, resterà l'angolo OLG , o sia IEG uguale all'angolo CHB ; ma dalla dimostrazione EI ne giace parallela ad HC , dunque lo sarà pure EG ad HB , e l'angolo EGF uguaglierà il suo alterno FHB . Or dalla costruzione il rettangolo HBA è uguale all' altro FBD , dunque i due triangoli FHB , DAB , che hanno l'angolo ABD di comune, saranno simili, e l'angolo FDA farà uguale all'altro FHB ; ma si è dimostrato esser questo uguale all'angolo EGF , dunque saranno uguali i due angoli FDA , FGE , e perciò AD passerà per E . Come b. d.

A V V E R T I M E N T O II.

Per brevità tralascio i differenti casi di questo problema, come pure quando i punti A, B, C , sono tutti dentro del cerchio; o pure parte dentro, e parte fuori, giacchè le soluzioni sono molte analoghe alla presente, e di leggieri si ravvisa il filo delle medesime.

P R O B L E M A III. (Fig. 3, 4, 5)

In un dato cerchio inscrivere un triangolo, di cui due lati passino per due punti dati di sito, e pel terzo quella retta, che col terzo lato costituisce un dato angolo.

S O L U Z I O N E.

CASO I. Nel circolo NI sia da inscrivarsi il triangolo DEF , di cui i lati DE , DF passino per A , e B , ed unita FC l'angolo EFC pareggi un dato.

1. Ad AB si conduca parallela EG , e congiunta indi la retta GFH , farà dato il punto H .

2. Si unisca ora HC , e si divida la medesima in K , sicchè il rettangolo KHC adegui il dato FHG : e congiunta KG si distenda la medesima in I , e si tirino le rette EI , LG .

E perchè sono simili i due triangoli HKG , HFC , saranno uguali i due angoli HKG , HFC ; ma queste coll'angolo EFH , o sia EIG costituisce un dato angolo EFC : farà dunque data la somma de' due angoli HKI , EIK , e perciò se le rette EI , HC si producano, dovranno incontrandosi costituire un dato angolo. Or le rette HC , HB sono date di posizione, dunque ancora EI incontrando AB deve formare con questa un dato angolo; il quale essendo uguale all'altro IEG , a cagione delle parallele EG , AB , farà dato un tale angolo IEG e conseguentemente l'altro LGK , e 'l punto K . Come b. r.

CASO II. Debbano ora i lati DF , EF del triangolo DEF passare pe' punti B , C , ed esser dato l'angolo DEA .

1. Per D menata DG parallela a BC , ed unita GEH , farà dato il punto H .

2. Si unisca HA , e fatto il rettangolo AHK uguale al dato EHG , si congiunga KG , e si produca in I , e si tiri la retta DI .

Ed essendo simili i due triangoli GKH , EAH , farà l'angolo GKH uguale all'altro AEH ; ma questo coll'angolo HED , o sia GID costituisce un dato angolo AED , dunque saran-

no ancora una data somma i due angoli DIK , HKI , e seguitando il medesimo raziocinio, che nel CASO I. si ritroverà esser dato il punto G .

CASO III. Si richiegga finalmente, che i lati DE , EF passino per A , e C , e sia dato l'angolo DFB .

La soluzione di questo caso immantinente si rimette a quella del 2.^o imperocchè si produca BF in S , ed uniscasi ES : sarà il dato angolo DFS uguale all' altro DES ; ed essendo quindi dato ben anche il suo conseguente AES , il problema ridurrassi ad inscrivere il triangolo SEF , i di cui lati SF , EF passino per B e C , e sia dato l'angolo SEA . Ma affinchè si ravvili l'universalità de' nostri principj, rapportiamone la soluzione secondo i medesimi principj.

1. Alla retta AC si conduca per D parallela DG , e si unisca GFH . Sarà dato il punto H .

2. Si congiunga HB , e fatto il rettangolo BHK uguale al dato FHG , si unisca KG , che tagli di nuovo il circolo in I , e tirisi la retta DI .

Simili essendo i due triangoli BFH , GKH , sarà l'angolo GKH uguale all' altro BFH ; ma questo, essendo dato l'angolo DFB , differisce dall'angolo DFG , o sia DIG per una data differenza; sarà dunque ancora data la differenza de' due angoli GKH , DIG , e perciò le rette DI , HK , incontrandosi prodotte devono formare un dato angolo, e seguendo il medesimo raziocinio, che ne' due precedenti casi, si troverà il punto G . Come b. r.

A V V E R T I M E N T O (Fig. 6.)

Moltissimi altri casi o si risolvono nella medesima maniera, o si rimettono facilmente ai rapportati. Così sia da inscriverti il triangolo DEF , sicchè i lati DE , EF passino per B , e C , ed unita DA dato sia l'angolo FDA . In siffatto caso, che affatto sembra rassomigliar agli antecedenti, unita SE è dato l'angolo SEC , e l' problema si è immediatamente ridotto ad inscrivere il triangolo DSE , i di cui lati DS , DE passino per A e B , e dato sia l'angolo SEC (CASO I.).

PROBLEMA IV.

In un dato cerchio inscrivere un triangolo, di cui un lato passi per un punto dato di sito, e per due altri punti passino quelle rette, che con i due rimanenti lati costituiscono angoli dati.

S O L U Z I O N E.

CASO I. I punti A, B, C , (Fig. 7.) e 'l cerchio EF sian dati di polizione, e sia d' uopo inscrivere in questo un triangolo DEF , sicchè il lato DF passi per B , e dati siano gli angoli DEA, EFC .

1. Unita BC , e fatto il rettangolo CBH uguale al dato FBD , si uniscano le rette DGH, EG .

Si proverà facilmente, che se le rette EG, BH si distendano finchè s'incontrino, debbono formare un dato angolo. Onde per H condotta HR parallela ad EG , dovrà questa costituire con BH quel dato angolo, e perciò esser data di polizione.

2. Si prenda ora in HR ad arbitrio un determinato punto R , e si uniscano le rette DIR, EIS . Sarà evidentemente dato ancora il punto S : imperocchè essendo l'angolo DHR uguale all'altro DGE , o sia DIE , o pure RIS , i due triangoli DRH, RIS saranno simili, e 'l rettangolo SRH uguale all'altro IRD , ch'è dato per essersi preso il determinato punto R . E perciò il problema si rimetterà ad inscrivere il triangolo DIE , i di cui lati DI, EI passino pe' dati punti R ed S , ed unita AE dato sia l'angolo DEA (CAS. II. prob. 3.) Come b. f.

ALTRI CASI. Se sia diversa la posizione de' punti B, C, A , come per esempio il punto A si ritrovi in a , la soluzione è analoga all'esposta; e tralascio i moltissimi casi di questo Problema, che con un poco d'industria si rimettono ai problemi antecedenti, o si risolvono seguendo il metodo, che si è praticato nel CAS. I., come io stesso ho veduto sempre riuscir: v. g. se sia da inscrivere (Fig. 8.) il triangolo DEF , il di cui lato DF passi per B , e dati siano gli angoli $DEA,$

EFC, questo caso si può ridurre all' esposto producendo le rette *AE*, *CF* in *S* ed *R*, ed unendo *SR*: cioè si dovrà inscrivere il triangolo *RSF*, sicchè siano dati gli angoli *SFB*, *RSA*, ed *RF* passi per *C*. Che se poi non si voglia fare siffatta riduzione, si potranno unire i punti *B*, *C*, e seguire l'istesso raziocinio, che nel *CAS. I*.

PROBLEMA V. (Fig. 9.)

Inscrivere in un dato circolo un triangolo rettilineo, sicchè condotte a due angoli del medesimo tre rette da tre punti dati di sito, queste comprendano con i rispettivi lati angoli dati.

S O L U Z I O N E.

Agevolmente rimetto tutti i possibili casi di questo Problema agli antecedenti, come si ravvisa da ciò che siegue.

CASO I. Nel cerchio *RS* sia d' uopo inscrivere il triangolo *DEF*, sicchè unite le rette *AE*, *BF*, *CF*, siano dati gli angoli *DEA*, *DFB*, *EFC*.

Prodotta *BF* in *S*, ed unita *ES*, farà l'angolo *DES* uguale al dato *DFS*; ma l'intero angolo *DEA* è dato, dunque ne farà data la loro differenza, cioè l'angolo *SEA*, e con ciò il problema sarà ridotto ad inscrivere il triangolo *SEF*, il di cui lato *SF* passi per *B*, e sian dati gli angoli *DEA*, *EFC*; cioè si rimette al *I. CASO* Prob. anteced.

CASO II. Debban essere dati gli angoli *DEA*, *EFB*, *DFC*.

Si distenda *CF* in *R*, e si congiunga *ER*: farà l'angolo *RED* uguale al dato *DFR*; ma è dato ancora l'angolo *DEA*, dunque farà data la somma de' medesimi, ch' è l'angolo *REA*, e'l problema si rimette ad inscrivere il triangolo *REF* sicchè *RF* passi per *C*, e dati siano gli angoli *EFB*, *REA*.

ALTRI CASI. Se la posizione de' punti *A*, *B*, *C* comunque si muti, o pure si cangi la grandezza de' dati angoli, le riduzioni, che per altro di per se stesse si presentano, poco vengono a differire; onde per questa ragione tralascio moltissimi altri casi, potendo per questi servir di norma i già esposti.

A V V E R T I M E N T O (Fig. 10.)

Il chiarissimo Sig. *Lexel* verso la fine della sopraccitata Memoria dice, che avendosi proposto il problema d'inscrivere in un dato cerchio un quadrilatero, di cui due lati opposti passassero per un dato punto, e gli altri due per un altro, rinvenne che il medesimo in generale era piucchè determinato; ma che in un certo caso diveniva indeterminato; il che, secondo lui, discovre una proprietà niente indegna della considerazione de' Geometri. Comunque la cosa si sia, mi sembra che una tale proprietà quasi di per se stessa fluisca dal soprallodato principio degli antichi: infatti la medesima si può trovar col seguente semplicissimo raziocinio.

Sia *DCFE* un quadrilatero inscritto nel cerchio, i di cui lati opposti *DC*, *FE* prodotti si uniscano in *A*, e gli altri due *CF*, *DE* in *B*. Uniscasi al solito *AB*, e se li conduca per *C* parallela *CG*; ed unita *GE*, si distenda la medesima in *H*. Il rettangolo *ABH* adegua il quadrato della tangente condotta da *B* al cerchio, o sia (unito il centro *L* col punto *B* mediante la retta *LNB*) alla differenza de' quadrati di *LB*, e di *LN*. Similmente unita *AL* dev'essere il rettangolo *BAH* uguale alla differenza de' quadrati di *AL*, e di *LM*: dunque sarà l'intero quadrato di *AB* uguale ai due quadrati di *LB*, e di *AL* meno il doppio quadrato di *LM*. Ma si sa, che abbassato il perpendicolo *BP* i quadrati di *AL*, ed *LB* devono superare quello di *AB* pel doppio rettangolo *ALP*. Sarà dunque il doppio quadrato del raggio uguale al doppio rettangolo *ALP*, ed il rettangolo *ALP* uguale al quadrato del raggio *LM*, e con ciò il raggio medio proporzionale fra *LA* ed *LP*, ch'è la proprietà del quadrilatero scoperta dal Sig. *Lexel*. (Fig. 11.)

Mi sembra che uno de' problemi molto eleganti sia quello dell'iscrizione nel cerchio di un quadrilineo, i di cui lati distesi passino per punti dati: problema, di cui non trovo fatto menzione, ma che si risolve con gran semplicità mediante il principio, che ci è stato solamente di scorta in queste nostre ricerche. Infatti nel circolo *GI* si desidera inscrivere il quadrilatero *MNQP*, i di cui lati prodotti passino

pei punti A, B, C, D dati di posizione. Unite le rette AB, CD , che prodotte si uniscano in X , si menino per M rispettivamente alle medesime le parallele MI, MG , e si uniscano le rette IPH, GPK . Saranno dati i punti A , e K . Ma l'angolo HPK uguale dev' essere ad IPG , o sia IMG , o pure al dato CXA ; dunque si è trovato il punto P , che bisognava trovare.

Ma vediamo di risolvere il seguente generalissimo Problema, affinchè non si delideri la soluzione di alcuno elegante quesito in siffatta materia.

(Fig. 12.) PROBLEMA VI. UNIVERSALE.

In un dato cerchio inscrivere una figura rettilinea di un qualunque dato numero di lati, i quali distesi passino per altrettanti punti dati comunque di sito.

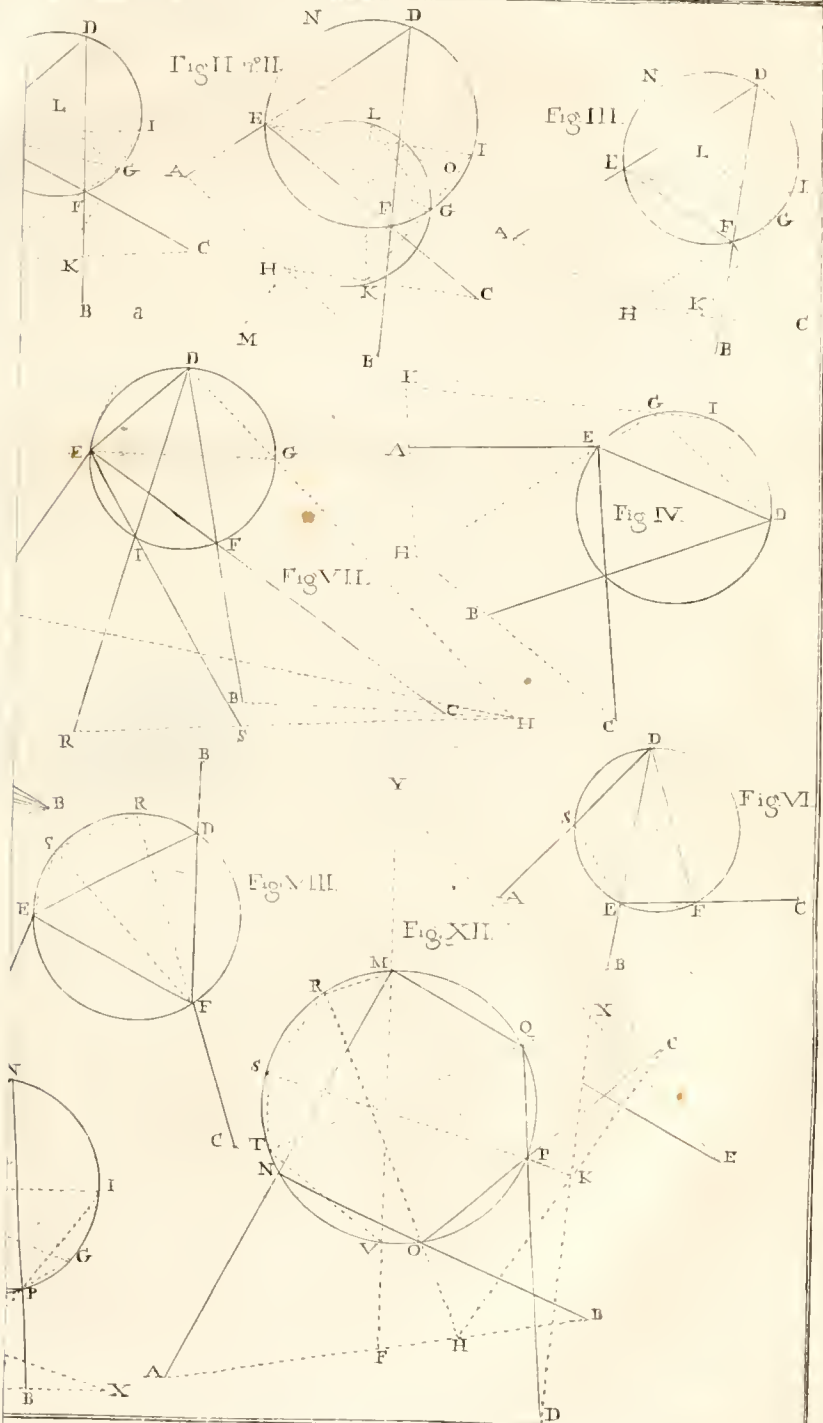
S O L U Z I O N E.

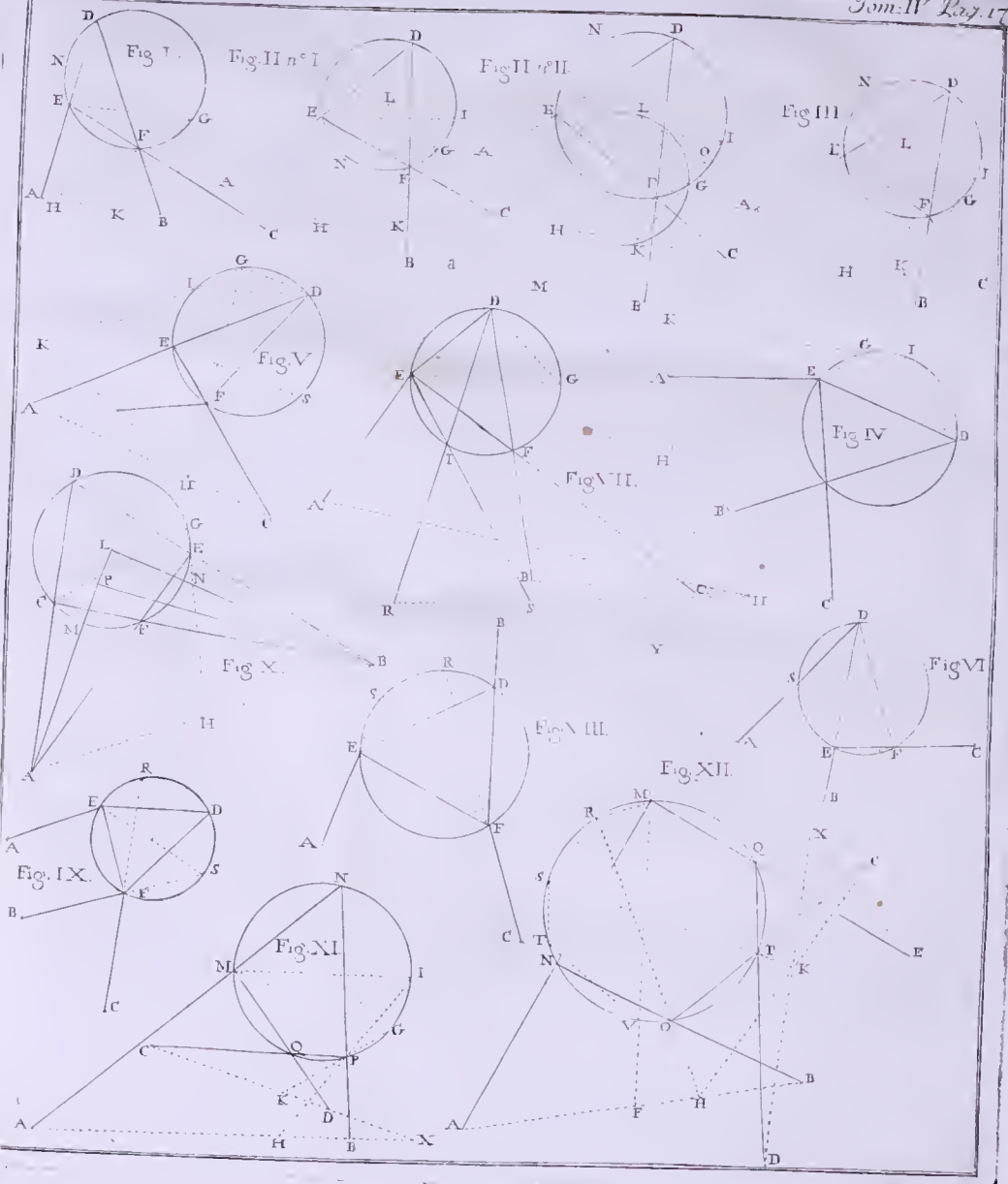
Dati sian di posizione i punti A, B, C, D , ecc., e'l circolo SR : e sia di mestieri nel medesimo inscrivere il poligono $MNOPQ$ ecc., i di cui lati prodotti passino per que' dati punti.

1. Uniscasi AB , ed alla medesima condotta intendasi per M parallela MR , e congiungasi ROH .
2. Si congiunga HC , e menatavi per R parallela RS , si unisca SPK .
3. Uniti i punti K, D mediante la retta DKX , si conduca alla medesima per S parallela ST , e si congiunga TQX .
4. Si unisca EXY , e condottavi per T parallela TU , si unisca ben anche UMY .

E così si seguiti innanzi se vi sono più punti dati.

Immediatamente si vedrà esser dati gli angoli, MRS, RST, STV ecc. del poligono $MRS TV$ ecc., come quelli che pareggiano i dati AHK, HKX, KXY ecc. Se dunque è pari il numero de' lati MR, RS, ST, TV ecc. di esso poligono (il che avviene quando la figura da inscriverti ha un numero dispari di lati) comprendendo angoli dati il primo lato MR col 2.º RS , il 3.º ST col 4.º TU , ecc. sarà dato l' intero arco





arco $MRSTU$ ecc., e quindi UM che n'è sottesa, ed il punto M che basta a determinare tutti gli altri necessarj per l'iscrizione della suddetta figura.

Che se la figura $MNOPQ$ ecc. da inscriverti abbia un numero pari di lati, allora quello delle rette MR , SR , ST , TU ecc. sarà dispari, e quindi non verrà ad essere MU la sottesa di un dato arco; ma essendo intanto pari il numero delle rette RS , ST , TU ecc. sarà dato l'arco $RSTU$ ecc., e quindi l'angolo RMU ; e distesa YMU in F , ne sarà dato ancora l'angolo YFA a cagione delle parallele RM , AB , onde sarà ancora in questo caso determinato il punto M . Come b. f.

A V V E R T I M E N T O I.

Se il poligono $MRSTU$ ecc. venga ad angoli rientranti, il raziocinio per la determinazione del punto M è evidentemente il medesimo.

A V V E R T I M E N T O II.

Sarebbe veramente cosa desiderabile, che qualche perspicace Algebrista si prendesse la pena di rinvenire una soluzione puramente analitica di un sì elegante problema piano, che nella semplicità non la cedesse alla sintetica già rapportata.



C O N F E R M A

DELLE OSSERVAZIONI ANATOMICHE

Intorno agli Organi della respirazione degli Uccelli.

Al Chiarissimo Sig. Dott. MICHELE GIRARDI Medico di Camera di S. A. R. di Parma, Presidente al Gabinetto di Storia Naturale, e Professor primario della medesima, e di Notomia in quella R. Università.

I Naturalisti avranno sempre motivo d' ammirare la sagacità, e la diligenza vostra, Illustrissimo e Dottissimo Signore, nell' esame di tante parti diverse, minute, intrecciate, e nell' esposizione degli usi ed officj d' ogni menoma porzion loro, tanto risguardanti la special funzione a cui son destinate, quanto relativi a tutto il corpo degli uccelli, classe d' animali in cui piacque alla *Sapienza increata* di prodigare con sublime artificio le meraviglie, come d' accordar a voi alacrità e talento per manifestarle al mondo.

La descrizione per esempio della laringe, quella dell' organo, ch' agli uccelli serve d' epiglottida; quella de' muscoli destinati a muoverlo; la laringe inferiore, e le sue diversità nelle differenti specie, anzi nel solo vario sesso d' alcuna specie; la multiplice origine de' bronchi, e le membranucce che n' attraversano il calibro delle diramazioni, e falsamente si credettero servir soltanto alla voce, ed al canto; la struttura de' polmoni, e le mirabilmente utili adesioni loro a' parieti del torace, e comunicazioni con le cavernette scolpite in tutti gli ossi della spina insieme pure comunicanti; la conveniente disposizione delle cavità aeree, e dell' ampie membranose vesciche, ond' è separato l' abdomine dal torace, non compresovi lo stranamente collocato diaframma; il numero, e 'l sito de' fori, per mezzo de' quali scambievol commercio si mantiene tra le mentovate vesciche, tra le me-

desime e le cellule annidate fra' muscoli pettorali e dorsali, tra queste e l'interne cavità dell'ossa principalmente delle parti anteriori, o superiori di que'corpi ec. ec. in somma la serie intiera delle osservazioni è delle verità, che ne dipendono intorno al volo, e al canto degli uccelli, delle quali è doviziosissimo il *Discorso* vostro inserito fra le *Memorie della nostra Italiana Società* (a), tutta è sommamente pregevole per la novità, per l'evidenza, e l'esattezza dell'esposizione, per le cognizioni rilevanti, che somministra, e per lo diletto, che apporta ad ognuno, a cui stia a petto instruirsi in così fatte materie.

Ed io non me ne sono punto maravigliato, natural cosa essendo per un Notomista il persuaderli, che chi dilucidò con tanta verità, dignità, e delicatezza non solamente le Tavole del *Santorini* rendendole utili e famose, ma pubblicò tante altre lodatissime fatiche, non può non posseder un immenso tesoro di cognizioni anatomiche d'ogni genere, e sovra ogni classe d'animali. In fatti questo vostro *Saggio d'osservazioni Anatomiche intorno agli organi della respirazione degli uccelli* da me con somma gratitudine, contento, e vantaggio ricevuto, e riletto, è un Trattato, al quale non rimangono da aggiungere salvo alcune varietà da voi per avventura a bella posta non numerate, nè descritte. E di queste, giacchè mi preme ubbidire a' cenni vostri, io ardirò rammentarvi qualcheduna in pegno della buona volontà, che nutrisco d'incontrarne pur alcuna essenziale, onde aver l'onor di presentarvela.

Le mie osservazioni hanno per iscopo la laringe superiore, la trachea, e la laringe inferiore o interna d'un Papagallo (b), e d'un Anitrocolo, i quali mi trovo appunto avere sotto gli occhi; e siccome non è possibile descriver la laringe senza premetter qualche notizia dell'osso ioide, che la sostiene, così dalla spozizione della struttura e dell'

C ij

(a) Verona MDCCCLXXXIV. Parte II. sez. III. pag. 732.

(b) *Esivus* 32. *Pittacus brachyurus*

viridis luteo submaculatus, fronte caerulea, humeris sanguineis, orbitis incarnatis. Linnei.

aderenze, che ha questo con essa nel Papagallo, avrà principio questo mio tenue lavoro.

C A P I T O L O I.

Dell' osso Ioide d'un Papagallo.

§. 1. Quest'osso è composto di tre porzioni distinte principali, e di varie altre subalterne: le prime sono il *corpo*, e le *due gambe*; l'altre appartenenti al corpo sono il *capo*, il *collo*, le *braccia*, il *tronco*, e la *coda*.

2. Il *capo* forma l'estremità anteriore di tutto l'osso lungo un pollice, e consta di due eminenze divise per un' incavatura semicircolare, dove in altri uccelli s'articola quella cartilagine a guisa di saetta, ch'è immersa nella sostanza della lingua, e ch'è mobile non solo da' lati, ma puranco in alto, e in basso. La superiore dell'eminenze suddette ha una spina alla sua faccia superiore, a cui per un ligamento s'attacca la cartilagine *tiroide*: l'inferior più rotonda è più estesa in avanti.

3. Il *collo*, destinato a sostener le mentovate eminenze, è di mediocre grossezza, quasi rotondo, e tra questo e quelle sono lunghi cinque linee.

4. Il *tronco* è alquanto più grosso, piatto in alto, dove serve d'appoggio alla laringe, triangolarmente incavato alla faccia opposta. E' lungo sette linee, e termina con una coda, che s'allunga sotto la trachea, con la quale un forte ligamento, e varj musculetti tenacemente l'uniscono.

5. Le *braccia* sottili, elegantemente costrutte, lunghe tre linee, nascono da' lati del tronco a' confini del collo (§. 3.) per una larga base appiattita: s'elevano alquanto nel nascere, e curvanti al davanti quasi a foggia di mezza luna, e tra amendue occupan due linee di spazio trasversale. Con l'estremità loro piatta e sottile, rivolta in su, sostengono mobilmente le corna posteriori della cartilagine *tiroide*.

6. Le *gambe* sono mobilmente articolate co' lati del tronco (§. 4.) in una faccetta per parte scolpita immediatamente alla base delle braccia; sono divergenti; lunghe undici linee senza comprendervi le appendici, ch'a guisa d'aghi se

n' allungano dalla minor estremità: sottili ma fodamente flessibili ed elastiche, occupano quivi sette linee di spazio trasversale, e rappresentano assai bene la doppia clavicola de' polli.

7. Tutto l'osso ioide è compatto, e trasparente, fuorchè nel sito d'onde s' allungano le braccia (§. 5.), e le gambe (6).

8. Serve non sol di mobile, e solido attacco alla radice della lingua, ma fa pur lo stess' uffizio a favore della laringe, e della sommità della trachea del Papagallo.

C A P I T O L O II.

Della Laringe del medesimo uccello.

Tal organo v'è composto di cinque corpi distinti; un de' quali è ossofo, e quattro cartilaginei. Il primo tiene per vostr' avviso il luogo, e'l nome della cartilagine *Tiroide*, e i quattro altri terranno pur quelli di *Cricoides*, ed *Aritenoidi*, fra le quali ultime cartilagini ve n'ha una, che ho giudicato meritar il nome di *Trifoglio*, o cartilagine *comune*. Terremo nel descriverle ad una ad una l'ordine, con cui si presentano all'osservatore dal davanti allo 'ndietro.

A R T I C O L O I.

Della Tiroide.

§. 1. Non aggiungerei nulla intorno a quest' elegante particella a quanto da voi ne fu pubblicato, o Signore (a), se dal volume delle sue parti nel Papagallo, per cui molto meglio si distinguono i caratteri loro essenziali, non vi ci fossi, ugualmente che dall' urbanità vostra, invitato. Situata davanti alla laringe occupa la tiroide in quest' uccello il corpo della lingua, ed è composta, appunto come voi c' in-

C iij

(a) l. c. p. 135.

segnate, di due cartilagini triangolari, simmetriche, convesse in alto, incavate a' lati, congiunte per l'angolo acuto loro; e nel sito del congiungimento loro scambievolmente s'articolan pure mobilissimamente col capo dell'osso ioide (cap. 1. §. 2).

2. Le due cartilagini ond'è composta la tiroide col tempo diventano perfettamente osse; e siccome il corpo delle medesime ha molta spessezza, così non è raro trovarlo munito interiormente di quelle cellule, che tolgono tanto di peso a tutte l'ossa de' volatili.

3. Vi si considerano quattro *corna*, fra le quali al davanti, e a tergo sonvi due spazj voti, ogni cosa destinata a render più facile l'uso degli organi a' quali essa appartiene.

4. Le corna anteriori sono acute, uncinatè, rivolte alquanto in fuori ed in giù; la distanza tra le due punte loro è di tre linee; vi s'attaccano varj fascetti muscolari del corpo della lingua.

5. Le posteriori sono piatte; hanno l'estremità larghe, ed incavate alla faccia superiore, e lascian tra di loro lo spazio voto di quattro linee.

6. Quello spazio vien ristretto ad una linea sola sul davanti per un apofisiè piatta, tagliente, la quale dopo 'l corso di mezza linea si restringe per formar un'incavatura romboidea limitata al dinanzi dal punto d'unione delle due porzioni principali di questa cartilagine, al di dietro dal margine anterior incavato dell'orlo superiore della *cricotide*.

7. Il voto fra le corna anteriori (4) è lungo due linee; l'opposto lin. 3 $\frac{1}{2}$: 2.

8. L'articolazione de' due pezzi è ginglimoidea, conseguentemente accorda alla spessa, larga, e bruna lingua del Papagallo il rendersi longitudinalmente ora concava, or convessa.

9. In alto la tiroide co' suoi larghi margini femicircolari elevati e col centro molto depresso, rappresenta una mezza girella; la faccia opposta, o inferiore è convessa.

A R T I C O L O II.

Della Cricoide.

§. 1. Affai più larga al davanti, com' è stato da voi opportunamente notato (*a*), questa bizzarra cartilagine è lunga cinque linee, avendovi due risalti arcati separati per un'incavatura semilunare, che corrispondendo allo spazio voto poco fa mentovato, (*b*) formano uniti quello spazio voto romboideo, che nello stesso luogo accennai. Que'risalti sottili, e taglienti non occupano in alto spazio maggior di due linee. Ha quasi la forma d' un anello, se non ch' è alquanto obliqua; ed avendo in avanti capacità minore di due linee, allo 'ndietro tal capacità è larga linee cinque.

2. E' composta d' un sol pezzo dilicato, e sottile, l' obliqua larghezza anterior del quale s' accosta alle linee due.

3. Dicendosi obliqua dee intendersi, che i margini arcati sporgono molto in avanti ed in su, come la punta d' un cucchiar ordinario da mensa, mentre che 'l resto di tal porzione si porta obliquo verso il centro dell' anello, dove manca.

4. Le porzioni laterali ne son alte appena un quarto di linea per lo spazio di lin. 2; indi acquistan rapidamente una linea di larghezza rendendosi affatto orizzontali, e l' estremità se ne riducono in punta convergendo, ed abbassandosi alquanto nel voto della sommità della *trachea*.

A R T I C O L O III.

Della cartilagine comune, o Trifoglio.

§. 1. Nel punto d' unione dell' estremità posteriori pur ora descritte della cricoide s' attacca mobilmente la picciola cartilagine comune, simile al *trifoglio*, o *fiore* delle car-

(*a*) l. cit. pag. 374.

(*b*) ved. l'artic. preced. §. 6.

te da giuoco. E' stata da me così nominata perchè non solo vi s'attacca con le dette estremità la cricoide, ma vi s'articolan pure le due *aritenoidi* precisamente nel sito dove son divise, col mezzo d'un'incavatura per parte, le due foglie laterali del *fiore*, o *trifoglio*, che questa rappresenta, dalla foglia di mezzo, che s'innoltra verso il centro dell'anello.

2. La cartilagine comune, o il trifoglio è spesso, convesso in alto, situato orizzontalmente, largo, e lungo una linea: porta a' lati le due incavature, o *faccette* articolari, a cui dissi già che s'uniscono mobilmente le due aritenoidi.

3. Anche 'l trifoglio nel Papagallo è ossoso, il che forse non osservasi eccetto quando l'animal è già molto vecchio.

A R T I C O L O IV.

Delle Aritenoidi.

§. 1. Non meritano queste due porzioni della laringe del Papagallo un tal nome per la figura loro; tuttavia continueremo a chiamarle così ad imitazione vostra, e per lo sito, che occupano corrispondente a quello, che nelle laringi umane vien da simili cartilagini tenuto. Nel Papagallo sono due lisce irregolari, concave in alto, sottili, poste orizzontalmente nel voto della cricoide a livello dell'orlo superior della medesima.

2. Allungandosi dalle incavature laterali del trifoglio (*a*) colle quali s'articolan per una specie di condilo, divergono insensibilmente a misura, che per lo spazio di tre linee s'avanzano senza toccar in nessuna parte la cricoide, il lembo esterno loro essendo arcato, e sempre ugualmente lontano dal concavo dell'anello, cui sono legate per una tela ligamentosa flessibilissima, e per varj muscolinucci mirabilmente intrecciati.

§. 3. Non si toccan nemmeno tra loro queste due cartilagini,

(*a*) Ved. l'artic. preced. §. 1.

lagini, il lembo interno alquanto obbliquo lasciando (com'è già stato detto (a)) uno spazio a foggia di V, cioè molto stretto a tergo, e largo poco men di due linee sul davanti.

4. Intanto che l'interno lembo delle aritenoidi s'avanza verso la lingua, ei s'eleva formando una specie di cresta, ch'è molto apparente al terzo anteriore della lunghezza loro.

5. L'estremità libera, ch'è l'anteriore, è una punta piatta, sottilissima, capace d'oscillare ad ogni minimo urto dell'aria che l'uccello caccia da' pulmoni, non essendo nelle laringi fresche sostenuta salvo da poche fibrille muscolari, e dalla membrana comune delle fauci.

6. Queste due cartilagini, disposte nella foggia descritta, non farebbero al Papagallo ciò, che i labbri dell'apertura de' ventricoli della laringe umana, detti altrimenti *corde vocali*, sono alla glottide nostra? A voi, prestantissimo Signore, s'aspetta il giudicarne.

C A P I T O L O III.

Della Trachea del Papagallo, e d'altri uccelli.

§. 1. La sommità di questo maraviglioso canale nel Papagallo è più ampia del rimanente, avendo la parte, da cui è sostenuta la laringe, larga lin. 5, ed alta, misurandone il diametro verticale, lin. 3 + 1 : 2; però discendendo appena mezzo pollice se ne riducono i diametri a lin. 2 + 1 : 2.

2. E qui ho pur occasione di notare, che in molt'altre specie d'uccelli, e particolarmente in questa, vedesi la trachea composta non già di perfetti anelli cartilaginei, ma di due serie di mezzi cerchj piatti, con le lor estremità finienti d'ordinario in altrettanti angoli acuti: e siccome la descrizione di questo canale fu già pubblicata negli *Opuscoli Interessanti di Torino* (b) unitamente a quella dell'*organo stenotorofonico* degli Anitrocoli, non dovrei qui farne più paro-

Tomo IV.

D

(a) Ved. il §. precedente.

(b) Esiste ne' volumi IV., e V. del

1777. pag. 87. e segg. del primo, 61, e segg. dell'altro.

la; tuttavia stante la rarità di quei volumi, che probabilmente non saranno pervenuti fino a voi, permettete ch'io ve ne trascriva ciò, che fa presentemente al nostro proposito.

3. „ Io avea già veduto in Torino, ed in Saluzzo più volte „ (sono mie parole dirette al chiarissimo Sig. Dottor *Marino* (a)) l'organo pneumatico, o diciamolo stentorofonico dell'anitre, e negli scritti di Storia Naturale da V. S. citati ne avea letto qualche menzione senza però prenderne in iscritto memoria; onde vi sono tenuto del passo del Sig. *Valmont de Bomare* (b), che avete gentilmente inserito nella vostra ornatissima lettera: e dubitando io, ch'altri non l'abbia ancora pienamente descritto, mi metterete d'aggiunger alle notizie, che ve n'ho date, le seguenti. “

„ La trachea, che s'apre in bocca fra le corna dell'osso „ ioide con una fessura longitudinale capace di stringimento, e dilatazione, ivi ha una specie di testa convessa in „ avanti, ed in basso, concava, e costrutta a guisa d'un „ cucchiajo in avanti, ed in alto; discende giù per lo collo sei pollici e più prima di comunicar con quell'organo, „ o gozzo ossofo; e per tutto quel tratto è soda, permanentemente cava perchè formata di mezzi cerchj piatti e

(a) Il titolo della serie delle mie osservazioni inserite negli opuscoli è il seguente.

„ Estratto di Lettere di *Vincenzo* „ *Malacarne* Chirurgo Collegiato nella R. Università di Torino, e Professore di Chirurgia nella città d'Aqui al Sig. *Dottore Gio: Antonio Marino* Medico primario dell'Ospedale della SS. Annunziata della città di Savigliano ecc. ecc. riguardo 1. ad un cuore ossofo in un'anitra selvaggia: 2. ad un'ossificazione dell'umor cristallino dell'occhio umano: 3. a varj calcoli dello sperma umano: 4. all'organo stentorofonico dell'anitre: 5. ad altre varie osservazioni anatomiche. Aqui 21 Dicembre 1776. e 13 febbrajo 1777.

(b) Le parole indicate sono come segue nell'opera del cel. *Valmont* intitolata *Dictionnaire Universel d'Histoire Naturelle* Tom. II. pag. 327. „ *Al-* „ *dyovande*, etonné de voir que cet „ oiseau pousse un cri si grand, & si „ aigu, & qu'il tient sa tête si long- „ tems dans l'eau, prétend qu'il en „ faut chercher la cause dans la figure de sa trachée, qui, à l'endroit „ ou elle se partage en deux branches pour aller aux poumons, „ une sorte de vessie dure, cartilagineuse, & concave, & qui est penchée du côté droit, ou elle paroît „ beaucoup plus grande. “

„ terminati ad angoli in guisa, che tutto questo canale rap-
 „ presenta due e tre curve a margini dentati, i denti
 „ della destra delle quali trovan opportuna sede nell'incava-
 „ ture, che sono tra' denti della sinistra, e forman quasi
 „ due *future* una al davanti, e l'altra al di dietro di tut-
 „ ta lunghezza del canale „.

„ Tutte le lische, o mezzi cerchj piatti benchè sieno di
 „ larghezza, e taluni di lunghezza diversa, rendon però
 „ uniformemente solido, ed uguale il canale; sono vicinissimi
 „ tra di loro, con tutto ciò la trachea tutta è molto pie-
 „ ghevole, ed elastica „.

„ Finisce in una specie di padiglione di tromba ossofo
 „ d'un sol pezzo, ch'è diviso al di dentro da una linguet-
 „ ta perpendicolare in parte ossosa, ed in parte ligamentosa,
 „ la qual rende il principio del bronco destro irregolarmente
 „ ovale, col diametro maggiore dal davanti allo
 „ 'ndietro „.

„ E' pur anco ovale il buco della tromba, che comuni-
 „ ca col bronco sinistro, ma d'un ovale più somigliante ad
 „ un cerchio, e col diametro maggiore in traverso. La me-
 „ tà di questa parte sinistra del padiglione della tromba è
 „ costrutta in maniera, che comunica col bronco sinistro, e
 „ coll'organo stentorofonico (a), in cui l'aria per certi an-
 „ fratti ossosi più vicini alla tromba può rifletterfi e rag-
 „ girarsi „.

„ La faccia posterior del padiglione, e del gozzo, ossia
 „ organo mentovato, che fanno un corpo solo, e continuo,
 „ è quasi piana salvo nel sito dell'union loro segnato da un
 „ solco, il quale piegasi alquanto calando a destra: l'an-
 „ terior è una specie d'elevazion angolare, che nell'organo
 „ chiude un seno proporzionato alla capacità del medesimo „.

„ I bronchi sono come gli umani terminati posteriormen-
 „ te da una sostanza membranosa, che ne fa il terzo della
 „ periferia, e talor meno. Qui l'esofago non rischia d'esser-

D ij

(a) Quest'organo è stato da voi scica ossea, e con ragione - L. cit.
 accennato con dirlo una grande ve- pag. 737.

„ ne compresso , eppur una porzion del canale de' bronchi
 „ è fatta da tal membrana . Non potrebb'egli questo far du-
 „ bitare se 'l tratto membranoso posteriore delle trachee
 „ umane esista solamente affinchè l' esofago non ne venga co-
 „ sì fortemente compresso come verrebbe ad esserlo da una
 „ serie di perfetti anelli cartilaginei,?

„ Chi sa, che quella membrana integrante non serva mag-
 „ giormente alla voce di quel , che si è creduto fin ora?

„ Ne' pulmoni si capisce , che se i bronchi fossero anelli in-
 „ tieri, mentre che son larghi, spessi, e duri, il respiro, o
 „ la sanguificazione potrebbero soffrirne; disordini, che non
 „ accadono dove i bronchi sono flessibili, sottili e minuti.

„ Nell' anitre selvatiche il bronco destro sembra una vera
 „ continuazion della trachea, e della tromba; il sinistro pa-
 „ re che più al gozzo, che alla trachea s' appartenga. Il
 „ principio loro è grande assai, e mobile, quasi fatto a
 „ guisa d' imbuto perchè tosto se ne stringe il calibro, e du-
 „ ra uguale fino a' pulmoni „.

„ Soffiando per essi su nell' organo stentorofonico, e nel-
 „ la trachea mentre che sono ancor freschi, e flessibili, s' imi-
 „ ta benissimo il rauco suono, e forte, che questi volatili
 „ fanno udire „.

4. Ho diligentemente osservato molte specie d' uccelli,
 ed ho sovente trovato la trachea costrutta a un di presso co-
 me qui venne descritta (a); ed in un Aghirone bianco (b),
 che ho sotto gli occhi, il qual ha il becco giallo-aranciato,
 e le gambe nere squamose, la trachea del qual è lunga ven-
 tidue pollici e mezzo, larga alla cricoide lin. 5 + 1 : 2,
 osservo non solamente, che alcuni de' mezzi cerchj inferiori

(a) Ho cercato invano qualche trac-
 cia della divisione denticolata sulle
 faccie anterior e diretana delle tra-
 chee de' vari uccelli rappresentate dal
 cel. Sig. *Vicq-d' Azyr* nella Tav. XII.
 annessa al Discorso intitolato „ Pre-
 mier Memoire sur la voix etc. Lu
 „ a l'assemblée publique de la Saint-
 „ Martin 1779. Memoir. de l' Ac. R.
 „ des Sciences MDCCLXXXII. pag. 206“

eppure nell' anitra, nel dindio, nel
 colombo, nell' usignuolo, nell' allo-
 dola, da' quali sono state copiate, io
 l'ho sempre veduta; e i volumi de-
 gli *Opuscoli interessanti* erano già pub-
 blicati.

(b) *Ardea alba* 24 A. *capite lævi*,
corpore albo, *rostro fulvo*, *pedibus ni-*
gris. Linnei.

s'allungano a segno di formar tante ellissi poco men che perfette; ma in cinque luoghi trovo, che due mezzi cerchj sono uniti mediante una lisca cartilaginosa obliqua; e in due altri siti veggo un mezzo cerchio dividerli dopo un breve tragitto, e formar due lisce distinte divise dalla solita membrana, però sono più strette, che non è il tronco dal quale partono.

5. E questo mi richiama alla memoria l'osservazion, che feci fin dall'anno MDCCLXXV su quel Folle di Morzasco, del qual ho fatto menzion più volte sì nell' *Encefalotomia*, che nel *Trattato delle osservazioni in Chirurgia*, allora che da' miei zibaldoni estraissi diverse altre particolarità per comunicarle in alcuna delle mie Lettere a V. S. chiarissima. E perchè non so se altri Anatomici, salvo *Ruischio* (a), abbian fatto cenno di simili biforcazioni, e congiungimenti de' segmenti di cerchj cartilaginei delle trachee umane, trattandoli di cosa molto rilevante per li Cerusici, che prendon a far l'operazione della tracheotomia (b), non voglio tardare a recarini davanti gli occhi quella medesima trachea, e riferendone a voi lo stato, informarne così perchè sappiano regolarli i Membri attivi della nostra Facoltà.

6. E' composta di venti segmenti cartilaginei, curvi al solito, e molto stretti, cioè di poca estension verticale. L' XI di questi, contando dalla laringe in giù dal centro della sua parte anteriore si biforca, e finisce a destra in due lisce, ognuna delle quali ha l' altezza uguale a' segmenti naturali. Il XIII biforcasi a sinistra, e la biforcazione comincia al terzo destro di sua lunghezza trasversale. Il XIV semplice

D iij

(a) *Observationum Anatomico-Chirurgicar. Centuria.* in 4 Tab. ad pag. 63. fig. 4 & pag. 70 num. xi.

(b) Si capisce agevolmente l'imbroglio, in cui sarebbe un Cerusico sul punto di far tale premurosissima operazione, quando incontrasse un istmo così fatto senza punto sospettar che diasi mai tale stravagante conformazion nella trachea. All'incontrario il Professore, che n'è persuaso,

fatto il taglio longitudinale degl'integumenti, e divise le carni, che cuopron la trachea, spiera coll'ugna dell'indice della man sinistra se fra il margine inferior d'un segmento, e l' superior del seguente siavi un tal ostacolo per evitarlo, scegliendo quell'intervallo fra due altri segmenti, pel quale con intiera libertà potrà far penetrare e la punta della lancetta, e'l tubo della cannuccia appiattito.

nel mezzo si biforca a tutte due l'estremità ; la biforcazion destra però è alquanto più lunga . Il XV segmento ha i margini molto flessuosi , cioè qua elevati e convessi , là concavi o depressi tanto in alto quanto in basso , ed è aderente alla porzion superiore del XVI , il biforcamento del quale è più strano degli altri poichè dal margine superior a sinistra s'eleva una lisca che vi fa un risalto assai disforme . Il XVIII è semplice nel mezzo , e molto rozzamente biforcato ad amendue l'estremità .

7. Il XX segmento ha nel centro un'appendice piramidale con la punta in giù , lunga quattro linee . Quest' appendice è cagione dell' obbliquità delle lisce seguenti , che da quel punto cominciano a volgersi le une a destra , l'altre a sinistra per formare i bronchi .

8. Il terzo e 'l quarto anello cartilaginoso del bronco destro son uniti per un istmo pure cartilaginoso come il settimo e l'ottavo dell'altro bronco .

9. Questa trachea ha qua e là principj d' ossificazione ; il condensamento preternaturale però in vece d' essere ne' segmenti , o di seguirne almeno la direzione , è fra la membrana comune interna e il pericondrio delle cartilagini stesse , disposto a striscie irregolari , dirette in basso ; in alcuni luoghi è anche visibile nella membrana muscular-ligamentosa , che occupa gl' intervalli tra i mezzi cerchj .

10. La sostanza muscular-ligamentosa perpendicolare , che compie la trachea posteriormente , è tutta sparfa di glandulette ancor adesso visibili , e sensibili al tatto ; e dirimpetto al chiaro lume del giorno , e della candela vi si scorgono per lungo moltissimi fasci di fibre ramosse , che dal centro di tale sostanza si portano irregolarmente verso le estremità de' segmenti .

11. Non sovviemmi d'avervi veduto fibra affatto trasversale , nè attualmente vi se ne scorge vestigio d'alcuna .

12. Avea quel Folle i ventricoli della laringe stranamente capaci ; infatti avendo io avuto la precauzion d' empierne la cavità col cotone , ciò fa , che ve ne posso dar un' idea . Immaginatevi due delle più grandi valvule semilunari dell' aorta , che sieno collocate una all' opposto dell'altra , o se più v' aggrada immaginatevi le palbebre , che co' nepi-

telli si toccano; tal era l'apertura di que' ventricoli, l'un e l'altro de' quali nella laringe fecca ha ancora diciannove linee di capacità verticale, quindici d'asse trasversale, e quasi un pollice d'apertura.

13. Non era dunque maraviglia, se quel Folle per un denaro si faceva gonfiare (trattenendo in maniera a lui solo agevole il fiato) come due grosse noci i lati del collo, e percuotendosi l'uno, e poi l'altro di que' gozzi artificiali volontarj, fortemente con la punta delle dita unite gli disfiava mettendo fuori un crepito simile al grugnito de' maiali. E fu buon per me l'aver notato diverse volte una tal proprietà, perciocchè mi fece andar cauto nell'esame di quell'organo, e scuoprir la strana ampiezza di que' ventricoli, che farebbero stati da me senza dubbio distrutti nel ripulir, e spogliar della glandula tiroidea, e delle carni, la faccia anterior e le laterali della sommità di quella trachea.

14. Que' due gozzi sussistono ancora benchè per l'essiccazione molto ristretti, e raccorciati, massime dopo che n' estrassi per meglio esaminarne le capacità il cotone (a), e le labbra dell'aperture loro sui lati interni della laringe ne son dure, ed elastiche al par de' più robusti ligamenti.

C A P I T O L O I V.

Della penetrazion dell'aria inspirata nelle diverse membra degli uccelli.

§. 1. In riguardo poi alle vostre bellissime osservazioni sulla penetrazion dell'aria inspirata dagli uccelli non solo nell'ossa, ma fin nel ceppo, e nella spugnosità delle penne, non vi so esprimere qual contento m'abbia recato il ricever da voi la dimostrazion di più verità, delle quali io non avea concepito fin ora salvo dubbj remotissimi ad onta delle molte notomie che ho fatte.

(a) Chi ne volesse un'idea molto conveniente potrebbe dar uno sguardo alla Tavola I di quelle, che ac-

compagnano la Dissertazione già citata del Sig. *Vicq d'Azyr*, che la troverebbe in grande nelle figure 1, e 3.

2. Non arrossirò dunque nel confessarvi, che osservando gli uccelli canori, ed esaminandogli al collo, ed alla testa nell'atto del canto, mi pareva di vedergli assai gonfi nel principio del modulare alla region anteriore del collo; e sempre d'un fiato cantando gonfiar di più, alzarfene anche le piume del capo fino alla posa; conseguentemente io giudicava il meccanismo principale della voce farsi alla sommità del collo, nelle fauci e nella laringe esterna, per quel che riguarda la modulazione, e la diversità de' tuoni, i bronchi, la trachea, le caverne nasali, e auricularie (a) contribuendovi soltanto per dar estension più grande al suono, come vi contribuisce indubitabilmente la cassa stessa del torace, e tutto 'l cranio anche negli uomini, a' quali mentre parlano, o cantano, vibrano sensibilmente ora queste ora quelle, ora tutte insieme l' ossa delle parti mentovate.

3. Dubitava inoltre, che negli uccelli tanta lena non regnasse onde sostener per così lungo tempo, e con sì mirabile varietà il canto in un sol fiato come sembra; ma tanto l'inspirazione, quanto l'aspirazione servirne alla modulazione della voce, al trillo, al gorgheggio, appunto come facciamo noi col fischiare a concerto quando a tal cosa ci siamo addestrati.

4. Ora però che voi ci avete manifestato i molteplici serbatoi dell'aria, e fatto conoscer la capacità, e gli orifici cui mediante essi comunicano co' polmoni, e co' bronchi per portare alle laringi degli uccelli quell'aria a lor piacimento, comincio a persuadermi non esser più tanto necessaria nel canto lungo e vario l'inspirazione, quantunque non ne sia totalmente rimosso dalla mia mente il dubbio. Lusingomi ad ogni

(a) Con una serie di sperimenti fatti sopra me stesso, ed altri sopra varie persone, e con osservar, che a coloro, a cui per malattia s'otturano le aperture esteriori delle trombe d'*Eustachio* nelle fauci, la voce si rende sempre men sonora e men chiara, ho tentato in una lettera diretta al chiarissimo Sig. Dott. *Allione* Profefs.

emerito di Botanica nella nostra Università, di manifestar la grand' influenza, che le caverne dell'orecchio umano interne hanno sulla chiarezza, e sull'estension della voce. Nuove osservazioni m'hanno sempre meglio convinto di tal verità, e ne randerò partecipe il Pubblico a suo tempo.

ogni modo, che la vostra acutezza nell' esaminar tali fenomeni metterà in chiaro ogni cosa. Intanto permettete, che io v' esponga un' osservazioncella più volte da me ripetuta, e che vien s'io non erro acconciamente in conferma delle vostre intorno all' adito, che l' aria inspirata ha negli ossi dell' ale degli uccelli.

3. Rompo un omero all' estremità più lontana dal petto; vi spingo dentro con forza il fiato, e a misura che l' aria fa gonfiar le parti, che circondano il torace da quel lato, e l' articolazion di quella spalla, indi riempie le vesciche aeree giù per l' abdomine, s' apre la strada verso la trachea, ed eccita l' ordinario suono della voce di quell' uccello, sul quale si fa lo sperimento, purchè sia stato ucciso di fresco; o s' è già morto da lungo tempo, e la stagione fredda, purchè si riscaldi al fuoco, s' immerga nell' acqua calda, o si rammorbidisca con altro simil mezzo. Capponi ed anitrocoli e dindj già pelati, e nell' acqua calda rammolliti, prima che dal coltello fosser tocchi, ubbidirono al soffio delle mie, e dell' altrui labbra, mettendo fuori della laringe suoni poco diversi da' consueti mentre ch' erano in vita, essendo certo che la cosa riesce meglio negli uccelli più grossi, come galli, anitre, oche, capponi, alocchi, e aghironi.

6. Pigliandomi queste specie di trastulli mi sono convinto anche dell' uso della laringe interna, che voi con tanta ragione esponeste (a) relativamente alla voce degli uccelli, osservando che qualor la superiore, o esterna, è nel sito naturale, la voce sembra tutta formarsi in quella molto distinta; ma quando io traeva ben addentro nel collo, vedea che la voce pur si genera, e capiva che si fa principalmente nella laringe interna, o inferiore, negli alocchi, e negli aghironi per lo suono limitato in quel sito, dove per la Notomia sappiamo trovarsi l' origine de' bronchi, ed applicando le dita su que' contorni sentiali la vibrazione, che 'l passaggio dell' aria spintavi per gli omeri eccita nelle parti, che la medesima laringe interna compongono.

Tomo IV.

E

(a) loc. cit. pag. 737.

7. E appunto in quattro individui di quest' ultime due specie di volatili, statimi favoriti dalla gentilezza, ed urbanità di Sua Eccellenza il Sig. Conte Don *Francesco Provana di Leyni* Gran Cacciatore, e Gran Falconiere di S. Maestà, Governor della Veneria R. Cavalier del Suprem' Ordine dell' Annunziata, dopo aver ripetute con elito uguale tali sperienze, m'è riescito d'empierle tutte le cavità aeree con l'iniezione, ed ho veduto per empierle con esattezza, e vederne l'ammirabile simmetria, comunicazione, e capacità, esser necessario injettare contemporaneamente tutti due gli omeri, altrimenti la cosa riesce disforme.

8. Anzi non ho mai veduto nulla di più elegante e bizzarro, che le cavità aeree d'un alocco, ch' io teneva immerso nell'acqua calda, injettate contemporaneamente per gli omeri, e per la trachea con tre sostanze fluide coagulabili diversamente colorite, in rosso quella della trachea, in verde quella dell'uno e in azzurro quella dell'altr' omero; e ne feci vedere, e ne imparai io stesso la disposizione, appoggiato a quanto vi siete (a) degnato di scriverne voi medesimo nell' eccellente opera vostra.

9. Tali iniezioni mai non ho potuto farle passar dagli omeri nell'altre ossa dell' ale, e nemmeno in quelle delle gambe, sebbene la materia siali cacciata nelle clavicole, nello sterno; fu per la colonna vertebrale fin nella sostanza laterale e posteriore dell' ossa della testa, e nelle caverne dell' orecchie; giù per la stessa colonna fin nell' osso sacro, in quello delle anche, da' quali ne' grossi uccelli di rapina diurni vidile penetrate in tutta la lunghezza de' femori (b) per tre buchi vicini, rotondi, scolpiti nella faccia concava dell' unico loro trocantere, e di là giunta pur ad empierle la capsula dell' articolazion del ginocchio per due grandi buchi esistenti nella profonda concavità onde a tergo sono divisi i condili de' femori.

10. Con lo stesso metodo riesce agevole numerar il sito

(a) 740, e 741.

(b) Fin ne femori penetrò anche l' iniezione in una crivella per due

fori ovali situati nella stessa faccia concava de' trocanteri.

preciso onde tutte le vesciche aeree , e l' altre anche ossose cavità comunicano insieme per vie diverse ne' differenti uccelli, l'unico guasto, che ne deriva incontrandosi nelle valvule da voi additate (a) buon numero delle quali ne viene irreparabilmente distrutto ; tuttavia , quand' anche non si potesse riparar a simil disordine (il che s' ottiene esaminando altri volatili simili non iniettati) ciò poco importa quando tante nuove cognizioni se n' acquistano .

11. A proposito di tali valvule , non sembravi egli per avventura , prestantissimo Signore , che d' esse valganli gli uccelli per far un voto sempre maggiore , capace di renderne i corpi ognor più specificamente leggieri , ed atti al volo , e al canto ? Io suppongo le cavità aeree di qualsivoglia uccello tutte piene d'aria inspirata : l' animale caccia fuori tutta quella , ch'è tra le prime valvule e la laringe ; chiude la laringe , apre le prime valvule e l' aria , ch' era tra quelle del second' ordine e le suddette raccolta , vien ad occupare quel tiro voto , che l' espirazione lasciò . Chiude quelle del second' ordine a suo tempo serrando la laringe per far un novello voto acciocchè dall' altre vesciche , o dalle cavità dell' ossa nuova quantità dell' aria interiore vi penetri , e così fin che ve n' ha .

12. La rarefazione farà che da tutte quelle caverne molta di quell'aria scorra verso la trachea , che la pression delle parti , e dell' atmosfera non vi potria determinare , ed in tal guisa la gravità specifica dell' uccello sempre diminuisca , purchè dell' aria inspirata sempre tanto rimanga nelle vesciche quant' è necessario per tener molto distese e quelle , e l' rimanente delle parti molli del corpo , e così la maggior superficie del medesimo venga con maggior facilità sostenuta dalla colonna dell' aria su di cui poggia , e quindi tanto più facilmente venga a librarli sull' aria quanto men usa di fatica nel sostenersi , abbandonarsi al volo , e far viaggio . Voi medesimo l' avete detto a chiare note „ la rarefazione , che

E ij

(a) l. cit. pag. 738.

36 CONFERMA DELLE OSSERVAZIONI ANATOMICHE.

„rende i volatili a guisa di tanti palloni volanti, mostra
„ad evidenza quanto debba in loro influire, e facilitare
„ancora l'azione, la speditezza del volo„. Conseguentemen-
te non estendo più oltre il mio discorso, sicuro, che con due
parole vi degnerete trarmi d' errore quando veggiate mal
fondata, ed erronea la mia supposizione.

Sì ragionevole sicurezza mi tranquillizza su tutto 'l rima-
nente, e mi rende con sempre più profondo rispetto, ed
inalterabile riconoscenza

Illustrissimo e Celebratissimo Signore

Torino li xxvii. Dicembre MDCCLXXXIV.

Vostro Devotiss. Servit. ed Obbligatiss. Amico e Collega.
Vincenzo Malacarne.



ESPOSIZIONE ANATOMICA

DELLE PARTI RELATIVE ALL' ENCEFALO DEGLI UCCELLI

TRATTATO IV.

*Del Cervelletto, della Midolla allungata, e della
Glandula pituitaria*

Del Sig. VINCENZO MALACARNE Direttore delle R.
Terme Aquesi, e Chirurgo Maggiore del Reale Presidio
di Torino.

Al chiarissimo Sig. MICHELE GIRARDI Medico di Ca-
mera di S. A. R. il Duca di Parma, Presidente al Gabi-
netto di Storia Naturale, Professor primario della mede-
sima, e di Notomia in quella Regia Università.

NON mi dipartirò dal metodo tenuto nelle parti prece-
denti della mia esposizione prima di comentar il rima-
nente dell' operetta d' *Alberto Allero* sul cerebro degli uccel-
li, richiamandovi alla memoria, pregiatissimo Amico, le
poche notizie, che ci vennero sullo stesso oggetto lasciate
dal celebre *Willis*, che sono le seguenti tratte dal Trattato
De Cerebri Anatome.

„ *Cerebellum* in quibusdam animalibus unica compage con-
stat, ejusque omnes circelli eodem situ parallelo conliti,
eandem inter se proportionem servant „.

„ Quæ (animalia) cerebrum diversimode ab homine con-
figuratum habent, uti *Volucres*, & *Pisces*, item inter qua-
drupedes *Cuniculi*, & *Mures*, quorum cerebra gyris seu
convolutionibus carent, his *cerebelli* species eadem, simi-
lis plicarum dispositio, & partium cæterarum compositio-
ne existunt „.

E iiij

„ In Volucris aut omnino deest (Protuberantia annularis) aut præ tenuitate ejus vix oculis conspicua est „.

„ In quibus animalibus protuberantia annularis paullo major est, his processus ab eadem ad rectos angulos producti ampliores, conspectioresque existunt; & contra in Volucris plane desunt „.

„ Glandula Pituitaria in cunctis animalibus perfectis reperitur; ea namque homo, quadrupedes omnes, imo Volucres, & Pisces instruuntur: unde ipsam necessarios quosdam usus in cerebro habere concludimus „.

„ Cum in his (Volucris) licuti in cæteris quibuscunque animalibus, etiam cavitas cerebello subjiçatur, ventriculi in toto Encephalo existentem numero pariter ac figura & positione differunt „.

C A P I T O L O I.

Idea generale del cervello.

TESTO ALLERIANO.

„ Posteriormente a' talami (de' nervi ottici) appunto dove le gambe del cervello si trovano già unite insieme, s'aggiungono quelle del cervello, semplice, con un solo corpo, non diviso, fregiato però di solchi a foggia d'anelli come nell'uomo (a) „.

A R T I C O L O I.

Sito, figura e colore del cervello.

§. 1. I margini posteriori de' talami de' nervi ottici serano come in una incavatura semilunare il cervello degli uccelli, cioè quel corpo cilindrico, ottuso all'estremità

(a) „ Pone thalamos, ad conjuncta „ jam crura cerebri addunt se crura „ cerebelli. Cerebellum nunc pone „ Saccos opticos sequitur, azigon,

„ simplex, non divisum, anularibus „ tamen sulcis percursum, ut in „ homine.

sua superiore, che d'ordinario s' eleva un cotal poco al di sopra del livello della parte posterior degli emisferi del cerebro; differente da tutto ciò che gli sta dintorno sì pel color e per la struttura, che per la disposizione delle sue parti.

2. Il color della superficie del cervelletto suol esser alquanto più incarnato di quello di verun' altra porzion cinerizia dell'encefalo negli uccelli.

3. In parecchi più piccioli delle gazze sembra un femicono cinerizio-rossigno con la superior' estremità notabilmente elevata, simile alla coda de' piccioli gamberi piegata sovra se stessa per li solchi onde n' è tagliata in traverso la superficie, come in tanti segmenti di cerchio paralleli.

4. Ne' volatili più grossi, massime di rapina (a), il cervelletto elevasi oltre al livello degli emisferi, ed ha la base anche più larga in traverso, che lunga dal davanti all' indietro: proprietà distinta nel nibbio, nel gallo, nel fruscone, nel passero da muro, nel cardellino, e nell' altre spe-

(a) E' singolare per la sua elevazione il cervelletto d' un uccello di rapina della classe degli Avoltoi stato preso al laccio in Val di Lanzo dodici miglia distante da Torino. Essendo stato regalato al Sig. *Spirito Giorna* mio amico, industriossimo cultore della storia Naturale, che m' invitò a farne seco lui notomia, curiosamente s' esaminarono da noi tutte l' opere de' più celebri Ornitologisti senza trovarlo in nessuna mentovato; nè sapemmo scoprir nelle descrizioni degli altri, a' quali maggiormente rassomigliavasi, que' caratteri, che lo distinguono. Ci determinammo pertanto a scriverne con diligenza tutte le proprietà corporali esteriori, e darne la definizione seguente. „ *Vultur coma-*
„ *tus fusco-griseus; coma nigra; ca-*
„ *pite ultra dimidium lanato; nari-*
„ *bus fetis fulvis obiectis; rostro ad*
„ *apicem gibbo, adunc; mandibula*
„ *inferiore nigro-barbata, fetis ni-*
„ *gris superioribus horizontalibus, in-*
„ *terioribus inclinatis lateraliter in-*
„ *structa; tibiis plumosis; digitis squa-*

„ *mosis ceruleo-griseis.* “Era maschio, e fu veduto con un altro, che probabilmente n' era la compagna ad aggirarsi per quella valle: fu promessa buona ricompensa a chi presela ce l' avesse portata, ma invano. Nel ventricolo in alto semicarnoso, in basso di robustissimi muscoli fornito ed aspramente rugoso e cavernoso di quello, che notomizzammo, fu trovato un lepre, le maggiori ossa del quale erano state trangugiate senza aver sofferto rottura. Pubblicheremo a suo tempo il risultato delle nostre osservazioni su tal uccello per essere instrutti dell' origine e della natura della specie da chi per avventura ne incontrasse maggior numero, e di genere diverso. Già il *Vultur Alpinus*, „ *quem Helvetii aureum cognominant:* „ del Gemero (icones Avium omnium „ &c. Tiguri. Froschoverus. M. D. LV. „ in fol. Avium Ord. I. pag. 12) non ha che poca rassomiglianza col nostro in riguardo al becco ed agli artigli, per non recarne qui tutte l' altre differenze di sommo rilievo.

cie di questa numerosissima classe, ha maggior elevazione ancora: nelle gazze, nelle beccacce, negli storni, ne' merli ec., arriva appena con l'estremità superiore al livello della porzione diretana più alta degli emisferi del cervello.

A R T I C O L O II.

Appendici laterali.

§. 1. Ne' galli d'India, nelle galline, faggiani, sparvieri, nibbj, oche, anitre, e barbagianni si veggono distinte due appendici di color cinerizio, delle quali anche negli augelletti più piccioli si ravvisano traccie proporzionate alla massa de' cervelletti loro, una per lato, nascenti dalla faccia esterna delle gambe del cervelletto stesso, alquanto inferiormente al livello de' talami de' nervi ottici.

2. Sembra che dall' accennato sito s'allunghi in fuori un' apofise midollare, che s'immerge con varj picciuoli, e lisce pur midollari, in molta sostanza cinerizia, creSPA, qua e là bernoccoluta, paragonabile a' picciolissimi cavol-fiori in miniatura.

3. Quest' appendici avvolgono il principio molle de' nervi acustici o auditorj; sono costanti in tutti gli uccelli, ed occupan le fosse ovali state già descritte da noi nel primo Trattato di quest' operetta (a). Non mi reca però maraviglia il non trovarne motto negli scritti d'Allero, nè di verun altro notomista, perciocchè la mollezza della corticale onde sono in gran parte costrutte, e l'inserzione de' filuzzi componenti i nervi acustici nella dura-madre, fanno che, mentre s'estrae il cervelletto dal catino, se non s'usa qualche destrezza, il corpo principal delle medesime resta nelle fosse ovali suddette (b) nascosto.

4. Per

(a) Parte seconda, cap. II. Artic. II., §. 13 e segg.

(b) I Cercopitechi, o Macachi, e i Cinocefali hanno puranco nella faccia diretana della rupe degli ossi temporali una fossa molto profonda; il margine della quale è pur fatto, co-

me negli uccelli, dal più lungo de' canali femicircolari destinati alla perfezion dell'udito; ma non vi s'insinua punto di sostanza cerebrale, ed è occupata da un seno della Dura-madre, che votasi nella porzion vicina de' laterali. Darò altrove la de-

4. Per separarne più facilmente onde poterle con libertà esaminare, è meglio spaccar il cranio verticalmente dal becco all'occipite, indi con le forbici distrugger a poco a poco tutta la volta del cranio stesso da ambedue i lati fin a livello delle fosse de' talami, ed osservato quanto v'è nel cerebro da questi in alto ed in avanti, reciderne affatto la sostanza già esaminata. Così lo stecco, o 'l nevrotomo più facilmente con semplici pressioni fatte sulla superficie dal di fuori in dentro procura lo snicchiamento dell'appendici intiere.

A R T I C O L O III.

Solchi scolpiti nel cervelletto.

§. 1. Il numero de' solchi, da' quali è diviso il cervelletto alle sue faccie anteriore e diretana, è maggiore negli uccelli più grossi; per esempio il verzellino, il reattino, il fanello non n' hanno più di nove: il passero, la rondinella, l'uffignuolo, il capinero fino a dieci: il nibbio maggiore, la crivella, lo sparviere, il barbagianni fino a quattordici: le galline, i faggiani, l'anitre sedici: le oche, i galli d'india n' hanno diciassette (a).

2. Tal è il numero più alto a cui ho veduto ascendere i solchi, onde il cervelletto è diviso in altrettanti segmenti paralleli, nelle specie d'uccelli mentovate, numerandoli dalla base del semicono a tergo, e salendo sulla sommità per continuar l'enumerazione di que', che per la faccia anteriore discendono fra i talami fin al velo midollare, che separa il cervelletto dall'acquidotto di Silvio: però in parecchi individui della medesima specie il numero de' solchi è talvolta minore, com'esser può maggiore dell'accennato, del che abbiám procurato di rendere plausibil ragione altrove.

Tomo IV.

F

scrizion di tre individui di tal classe, e il paragon delle parti dell'encefalo loro con le corrispondenti dell'encefalo umano, ch' emmi sempre paruto molto importante per levar molti er-

rori introdottisi nell' Antropotomia.
(a) Diciassette appunto n' avea puranco l' *Avoltojo Chiamato* di cui favellammo nell'artic. precedente.

3. Posto che lo stesso *Allero* attribuisce agli uccelli il *verme* nel cervelletto (*a*), non dobbiam obbligar d' avvertire, che se la denominazion di tal parte si prendesse dalla figura derivante da' solchi paralleli equidistanti, tutto il cervelletto dovrebbe avere il nome di verme non consistendo esso che in un semicono equidistantemente solcato in traverso: e non negherò, che il segmento più basso anteriore rotondato, immerso fra le gambe midollari giù per l'acquidotto, ha veramente la figura della testa d'un verme.

4. Ne' pulcini ancora non usciti dall' uovo trovammo già impressi su questa porzion dell'encefalo i solchi (*b*), e v' osservammo una positiva tenacità di sua figura ad onta della somma tenerezza, che n'aveva la sostanza, in cui non appariva se non un sol colore tanto all' esterno quanto al di dentro.

C A P I T O L O II.

Dell' Albero della Vita.

TESTO ALLERIANO (c).

„ In esso (cervelletto) trovasi un picciol Albero della vita quasi simile all' umano, formato dalla midolla nata da corticale abbondantissima; e le radici di tal albero, disposte con ordine l' une dopo l' altre, s' uniscono in un tronco bislungo „.

§. 1. Un cono midollare voto è guernito al davanti, e

(a) De corporis Humani Fabrica &c. Vol. viii. pag. 118. *Ut Sulcos transversos, ita Vermem & quadrupeda habent, & Aves, quibus ceterum indivisum cerebellum est, si a thalamis opticis recesseris. N. Cotter. p. 130 in struthiocamelo Parisini.*

(b) Assai più distinti, costanti, e profondi sono i Solchi anche ne' cervelletti de' feti umani estratti dall' utero prima de' cinque mesi di gravidanza, di quel che sieno ne' cervelli, ed in un feto quadrimestre, ch' estraissi dall' utero della madre, moribonda

per un emorragia di ventricolo micidiale sofferta dieci giorni prima, chiaramente li dimostrai, anche dopo spogliato della pia-meninge il cervelletto, tenacissimo di sua figura, e di color bianco di perla sì nell' intime sue parti, che nell' esteriori. Lo stesso fu del cervello non solcato.

(c) „ In eo arbuscula vitæ fere humanæ similis est, medulla nempe est „ uberrimo cortice nata, radicibus „ ex ordine se consequentibus, in „ oblongum truncum unitis. “

allo indietro ugualmente, che in alto, di parecchie lastre midollari, piatte, sottili, disposte orizzontalmente in guisa che col lembo libero risguardano la superficie del cervelletto, e coll'altro, ch'è fisso ed interno, e serve alle lastre suddette di radice, stanno al mentovato cono affisse.

2. Il numero delle lastre midollari è ugual a quello de' segmenti di sostanza cinerizia che fregian la superficie del cervelletto di tutte le specie d' uccelli: uguale per conseguenza debb'esser il numero de' ramuscelli, che vedremo spiccarsi anteriormente, e posteriormente al cono midollare per far l'albero della vita, quando l'avremo spaccato dall'alto al basso, e divise in due le faccie anterior e diretana: taglio, che rende più evidente la verità del numero de' segmenti da me assegnato a ciascheduna specie.

3. E siccome i segmenti della faccia anteriore non sono continui con que' dell'opposta, nè i lati del cervelletto hanno solchi traversali; così se taglieremo il cervelletto verticalmente di modo che la division passi nel mezzo delle faccie laterali, non appariravvi albero, nè ramuscello; e tanto meno alla base del cono dove su' lati non avvi che schietta midollare, salvo le appendici descritte (a).

4. La base della faccia posteriore così divisa in tal caso vedrebbe libera; e quella dell' anteriore continua con quel velo di sostanza midollare, che s' allunga dalla lastra di simile natura, ond' accennammo esser uniti i talami, e coperta in traverso una parte dell'acquidotto.

C A P I T O L O III.

Del Ventricolo del cervelletto degli uccelli.

§. 1. Abbiamo già, calcando le pedate del Willis, e dell'Allero, veduto l'encefalo degli uccelli provvisto di due ventricoli di più che l'uomo ne' talami de' N. O.; prerogativa, ch'è pur comune anche alle vipere, e altri rettili; ora

F ij

(a) Ved. qui sopra l'Artic. II.

ci conviene descriverne ancor uno, del qual mi reca propio stupore che l'esistenza sia sfuggita agli occhi curiosi di que' due diligentissimi esploratori delle parti più recondite dell'encefalo degli animali. Questo (*a*) è una cavità conica verticale, scolpita nel centro di tutta l'altezza del cervelletto degli uccelli, tappezzata di morbidissima lanugine alquanto men bianca della sostanza, che ne fa le pareti, e la volta.

2. Lo rendiamo facilmente visibile non solo co' tagli verticali proposti nel capitolo precedente, ma eziandio quando solleviam la base del cervelletto dal di dietro premendolo in avanti, contro la commessura posteriore del III ventricolo (*b*), con le dita della sinistra, ed abbassiamo la midolla allungata piegandola con la destra in giù, e intanto fissiamo l'occhio su per lo sfondo romboidale del IV ventricolo. Allora si vede fra le gambe del cervelletto una fessura ellittica traversale, che guida ad un vaso dal basso all'alto, ed in avanti diretto.

3. E' indubitato però, che se ne ravvisa meglio la capacità, e la figura con l'una, o l'altra delle spaccature verticali poc' anzi indicate; perciocchè allora scostando le due parti divise, si vede in ciascuna d'esse un triangolo isoscele descritto dalla midolla, che fa 'l centro del cervelletto, e manda esteriormente le lische, dalle quali sostenuta la cinerizia ne risultano i segmenti.

4. La base de' mentovati due triangoli sta inferiormente, ed è superata in estensione da' lati midollari, da' quali salgon obliquamente altrettante lische della sostanza medesima quanti segmenti si contavano su tutte due le faccie del cervelletto intiero.

(*a*) N' avevam già fatto motto nel Tratt. III. cap. VI. Artic. II. pag. 203. nota a.

(*b*) Ved. Tratt. III. cap. V. §. 57. e seg.

CAPITOLO IV.

Del Ponte.

TESTO ALLERIANO (a).

„ Le gambe del cervelletto abbracciano come nell' uomo
 „ quelle del cervello, e fanno il ponte „.

„ Questo ovalmente conico come nell' uomo è però più
 „ lungo, diviso per mezzo da un solco dove scorre l' arte-
 „ ria basilare; solco , che continua giù per la midolla spi-
 „ nale „.

§. 1. Alquanto sotto al livello de' talami la midollare del
 cervelletto si scosta dal centro della base del medesimo , rac-
 cogliendosi tutta a' lati per formar due colonne tonde al di
 fuori, appiattita verso' l' centro, o quel voto ellittico da cui
 principia il ventricolo del cervelletto , che fece il soggetto
 del capitolo antecedente.

2. Tali colonne dall' *Allero* nominate gambe del cervellet-
 to, si curvano su' lati , e sotto la colonna midollar centrale
 per confondersi in avanti ed in basso la destra colla sinistra,
 mantenendosi amendue alquanto prominenti, sebbene s' ap-
 piattiscano, e s' allarghino di modo ch' occupano quattro li-
 nee di spazio orizzontale mentre che le colonne poco più
 d'una linea presentano d'estensione.

3. A simil elevazioncella daremo anche noi il nome di pon-
 te, sebbene qui meno ch' altrove se ne veggano le apparenze:
 ed osserveremo che tutta la lunghezza della faccia inferiore,
 appoggiata sul fondo del catino, è priva nell' oche , e nell'
 anitre di solco (b), questo non rendendosi visibile salvo al di

F iij

(a) „ Ejus crura cerebri crura ut
 „ in homine amplectuntur, & pontem
 „ efficiunt.

„ Is pons ovato conicus, ut in ho-
 „ mine, sed longior medio Sulco di-
 „ viditur, in quo perinde arteria ba-

„ silaris est, sulcus in medullam spi-
 „ nalem continuatur. “

(b) Ved. Della osservaz. in Chir.
 Tratt. ec. Parte II. Cap. III. pag. 62,
 e 63.

dietro del ponte stesso sulla midolla allungata, corrispondentemente alla cresta, che vedesi sul parete posterior del catino.

4. In molt' altre specie d' uccelli però non sol vedesi la cresta suddetta elevata su tutta la lunghezza del fondo del catino, ma il solco longitudinale sul ponte altresì, proprio dove l' *Allero* indicò, cioè sulla faccia anteriore della midolla allungata.

5. Ho trovata quella cresta molto più distinta, ed elevata negli uccelli di rapina quali sono il nibbio, il falchetto, lo sparviere, la crivella (a) ec., e nel ponte loro vidi scolpito il solco, non meno che giù pel rimanente della midolla allungata, e per la faccia anterior della spinale.

C A P I T O L O V.

Della Midolla allungata.

TESTO ALLERIANO (b).

„ Tolte via tutte le sostanze vicine si vedono le gambe
 „ del cervello cinerizie, le quali s' allungano in giù per lo
 „ spazio d' un dito prima che vi s' attacchino i talami,
 „ appunto là dove questi sono stati coperti dall' eminenza
 „ quadrigemella. Si vede pure l' acquidotto coperto dalla
 „ stessa midollare quadrigemella eminenza „.

§. 1. La faccia superiore della midolla allungata porta scolpito in alto l' acquidotto già stato da noi mentovato (c), il quale a misura che s' avanza sotto quel velo midollare, che unisce la commessura posteriore (d) alla lastra midollar

(a) L' *Avoltojo Chiomato*, il catino del quale è lungo lin. 10, largo lin. 7, alto lin. 5, non ha cresta, ed il ponte non n' avea solco.

(b) „ Diductis nunc omnibus adparent crura cerebri corticæ naturæ, descendentia, digitum longa, priusquam thalamos adnatos accipiant

„ qua eadem eminentia quadrigemina „ testa fuerant. Adparet aquæductus „ testis illa eadem medullari quadrigemina eminentia. “

(c) Tratt. III. Cap. VI.

(d) Tratt. III. Cap. VI. Art. II., pag. 29, 63.

de' talami altrove descritta (*a*), e questa al cervelletto, dà principio allo sfondo romboideo del IV ventricolo.

2. Abbiamo già veduto i ventricoli de' talami a sboccarvi mediante due aperture (*b*): ora ci resta da notare, che la parete anterior, e le laterali del medesimo ventricolo son fatte dalla midolla allungata, come la volta n' è formata dalla commessura posteriore del III ventricolo e dal velo, che ne dipende (*c*); successivamente dalla lastra midollar de' talami (*d*), dal velo, che se n' allunga per venirsi ad unir con la midollare dell' anterior faccia del cervelletto (*e*); finalmente dalla base scavata di questo (*f*).

3. Non furon da noi dimenticate le quattro picciole eminenze midollari, immerse nella lanugine tappezzante i pareti anterior e laterali dell'acquidotto (*g*), nè il solco longitudinale che divide il parete anteriore in due parti, e stendesi per lo sfondo romboideo suddetto fin sulla faccia posteriore della midolla spinale.

4. Ad onta di tutte le diligenze usate dattorno a' cerebri degli uccelli anche più grossi, non mi è riuscito ancor di trovare un segno costante, che indichi il vero termine posteriore del ponte, affin di conoscere positivamente il sito dov' incomincia la midolla allungata; perciocchè io non soglio comprender sotto questo nome tutto 'l tratto, che da' talami stendesi fino al gran foro occipitale.

5. La midolla allungata però, in tutto quel tratto, che si stende al gran foro occipitale da quel sito, dove pur sembra che 'l ponte dovrebbe terminar, non è sempre liscia, ed uguale del pari in tutti gli uccelli; anzi in varie specie vi si scorgono due leggieri elevazioncelle longitudinali, parallele sì tra di loro, e sì al solco pur longitudinale mezzano anteriore, che stendesi poi anco lunghesso la spinal midolla, ed in tali specie molto più apparente si vede; sono es-

(*a*) Tratt. III. Cap. VI., Art. II., e Cap. VIII.

(*b*) Ivi Cap. VI. Art. I. §. 61 pag.

161.

(*c*) Ivi Art. II.

(*d*) Ivi §. 63.

(*e*) Ivi §. 65 e segg.

(*f*) Ved. il Cap. III. del presente Trattato.

(*g*) Ved. Tratt. III. Cap. VI. Artic. III.

se paragonabili alle fascie delle midolle allungate umane altrove da me ampiamente descritte (a); e nell'aquile (b), ne' nibbi, ne' galli d' india, nelle galline numidiche, m'è riescito di seguirne coll' occhio le traccie, raschiando con leggerezza la superficie anterior inferiore del ponte, fino a' lati dell' *Antro de' Nervi motori comuni degli occhi*.

C A P I T O L O VI.

Del IV ventricolo secondo l' Allero.

TESTO ALLERIANO (c).

„ Il quarto ventricolo grande, e rotondo si trova limi-
 „ tato fra le gambe del cervello e la midolla allungata, i
 „ processi del cervelletto, la midolla spinale, il cervelletto
 „ stesso, e quell' eminenza traversale, di cui abbiamo già
 „ favellato „.

„ Termina al principio della spinal midolla dov'è un ar-
 „ co tumido, immediatamente al di sotto di cui la stessa
 „ midolla è come strozzata „.

„ E' cinerizio al di dentro, e la penna da scrivere ne fa
 „ l'asse anteriore come il cervelletto gli sta a tergo, e le
 „ gambe del medesimo a' lati. Ha il suo plesso corioideo „.

„ La penna da scrivere è la parte mezzana dell'acquidotto „.
 „ Vi

(a) Ved. Encefalotomia Nuova U-
 niversale Parte III., §. 104. Nuova
 Esposizione della vera strutt. del Cer-
 velletto Um. ecc. pagg. 76, 77, 78.
 Delle Osservazioni in Chirurgia ecc.
 Par. II. Cap. III., artic. VI., e VII.

(b) La distinsi con molta facilità
 nell' *Avoltojo chiomato*.

(c) „ Ventriculus quartus magnus
 „ & rotundus intercipitur inter cru-
 „ ra cerebri, atque medullam oblon-
 „ gatam, processus cerebelli, medul-
 „ lam spinalem, cerebellum, & emi-

„ nentiam transversam, quam dixi-
 „ mus. “

„ Finitur in principio medullæ spi-
 „ nalis, arcu terminatus tumente,
 „ sub quo medulla subito quasi con-
 „ stringitur. “

„ Intus corticeus est, calamusque
 „ habet pro axi anteriori, uti cere-
 „ bellum posterius est, & ejus crura
 „ lateralia. Habet suum plexum cho-
 „ rioideum. Calamus scriptorius est
 „ pars media aquæductus. In eo striæ
 „ transversæ. “

„ Vi si veggono dentro strie trasversali .

(a) „ A' lati della penna da scrivere si trova da tutt' e
 „ due i fianchi una linea midollare, bianca , larga , quasi
 „ dipinta nella midolla delle gambe del cervello insieme uni-
 „ te : questa linea principia dalle gambe mentovate nel sito
 „ appunto dove i talami cominciano ad allontanarsene .

(b) „ La medesima linea vedesi pure nel quarto ventri-
 „ colo „ .

(c) „ Nel principio del medesimo ventricolo s' aprono an-
 „ che i sacchi de' talami , proprio dove l' acquidotto è co-
 „ perto dell' eminenza quadrigemella , tra le gambe del cer-
 „ vello e i talami „ .

A R T I C O L O I.

Della figura, e del sito di tal ventricolo.

§. 1. Il quarto ventricolo degli uccelli (così nominato da tutti gli Anatomici sebbene in realtà siane il settimo a tenor di quanto venne da noi costantemente osservato , ed in quest' operetta espresso) consiste in uno sfondo romboideo, scolpito nella faccia superiore, e diretana, della colonna midollar centrale opposta al ponte .

2. Tal figura gli è propria in tutti gli animali, de' quali ho fatto notomia , come sono uomini, e quadrupedi, e scimmie, e serpi, e vipere, e lucertole, e rane ec. ec.: e in questo ventricolo, il centro del quale corrisponde a quello della base del cervelletto, si osservano tre angoli ottusi, cioè il superiore, che può dirsi anche anteriore, in cui termina l'acquidotto, e i due laterali, che corrispondono alle gambe

Tomo IV.

G

(a) „ Ad calami latus extat utrin-
 „ que linea medullaris alba, lata, in
 „ conjuncta medulla crurum cerebri
 „ quasi picta, quæ ab iis cruribus in-
 „ cipit, qua parte ab iisdem thalami
 „ hætenus adplicati recedunt. “

(b) „ In ventriculo IV eadem
 „ stria est. “

(c) „ In ejusdem ventriculi princi-
 „ pium etiam sacci thalamorum ape-
 „ riuntur qua aquæductus eminentia
 „ quadrigemina tegitur, inter crura
 „ cerebri, & thalamos. “

del cervelletto; ed uno acuto, ch'è appunto il becco della penna da scrivere, il quale confina quasi col gran foro occipitale.

A R T I C O L O II.

De' limiti del medesimo ventricolo.

§. 1. L'acutezza del becco della penna da scrivere ne' cervelletti degli uccelli non è uguale a quella, ch' in simil particella de' cerebri umani s'osserva; nè quest'angolo suol esser allungabile fin nel canale della spina spogliandone della tenace pia meninge la midolla; perciocchè negli uccelli è limitato a tergo da un travicello midollare (a), che vi passa in traverso, oltre ad alcune lastre midollari, che descriveremo.

2. Quel travicello interrompe bensì la continuazion della maggiore profondità del solco scolpito longitudinalmente per l'asse maggiore del ventricolo, ma non cancella il segno del combaciamento delle parti superficiali del midollo allungato degli uccelli; segno, che si continua puranco lungheffo la faccia superior, o diretana dello spinale.

3. Tutto quel tratto di sostanza, che dalle gambe del cervelletto s'allunga verso il gran foro occipitale, detto la midolla allungata, è abbracciato nell'anitre, e nell'ocche da due lastre oblique, midollari, gli orli convergenti delle quali seguitano la direzion de' lati inferiori del settimo ventricolo, e si vengon a perdere nel solco longitudinal posteriore del principio della midolla spinale.

4. Sono larghe più d'una linea, e fanno in quel sito per l'ordinario un sensibile risalto, lasciando veramente di minor diametro, e per conseguenza quasi strozzata (com'è stato dall'Allero osservato) la porzion della midolla, che vi sta subito a tergo.

(a) Un travicello simile al qui mentovato si trova costantemente nella stessa region delle midolle allungate de' cavalli, degli asini, de' montoni, de' cani ecc. e vi fa pur ostacolo a' prolungamenti del IV ventricolo, a'

quali è soggetto l'umano, com'è stato espresso da me nella Parte III. dell' *Encefalot. N. Univ.* §. 114, e 115, e di nuovo nel *Tratt. delle Osservaz. in Chirurgia* Parte II. pag. 6, ed altrove.

A R T I C O L O III.

Osservazioni sul becco della penna. ✓

§. 1. Se 'l chiarissimo Autore, di cui seguitiamo in queste osservazioni le tracce, avesse nel testo da noi riferito voluto accennare, ch' il becco della penna da scrivere nell'encefalo degli uccelli è fatto dalla metà posteriore del ventricolo, come in fatti si vede, noi nella traduzione avremmo dovuto far menzione del ventricolo stesso, dicendo „ la penna „ da scrivere è la metà posteriore del quarto ventricolo „; ma vi leggiamo *est pars media aquæductus* nè io saprei come spiegar tal passo uniformemente alla vera disposizione delle parti, che vi si descrivono.

2. Avea inoltre già detto il lodato nostro Maestro „ La „ penna da scrivere essere scolpita nell' unione delle gambe „ del cervello (a), il che ci lascia in sempre maggior confusione ed incertezza, e ci obbliga a pregar i dilettanti di *Notomia comparata* ad esaminar essi stessi la verità in questi non rari encefali.

A R T I C O L O IV.

Delle strie del suddetto ventricolo.

§. 1. Quelle, che l' *Allero* ha descritte, realmente vi sono; ma non hanno costanza nel numero, e nella direzione; e se in alcuni encefali se ne scuopron molte, in altri se ne cercano indarno alcune poche tra le meno rare. Qui ad ogni modo si darà notizia di quelle, che ci venne fatto d'osservarvi.

2. Alcune ve n'ha, che salgono divergenti verso le gambe del cervelletto seguendo l' obbliquità de' lati inferiori dell'

G ij

(a) „ Et calamus scriptorius commissis cruribus cerebri inscribitur.“

Ved. la gran Fisiologia Tratt. II. §. LI.

aja romboidea : altre partono più o meno traversali dal folco longitudinale ond'è divisa quell' aja , e si portano fuor della medesima per curvarsi dintorno alla midolla allungata .

3. Ve n'ha, che a foggia di filuzzi ascendon oltre alle gambe del cervelletto per unirsi alle radici numerose del nervo trigemello, che vedremo nel Trattato seguente, in così strana guisa diverso da quel, che lo troviamo negli encefali umani: altre portandosi ancor più basso al davanti del ponte, vanno a congiungersi con le radici del nervo motor comune degli occhi .

4. Più costanti, e più distinte però son quelle, che nascendo più verso l'angolo posterior dell' aja montano più obliquamente, si curvano sulle gambe del cervelletto circonscettendosi sulla faccia esterior delle medesime per confondersi con le radici del molle nervo auditorio .

5. Nell'angolo superior dello stesso sfondo poi, immediatamente al di sotto di quelle due prominenzucchie, che occupano i lati del fondo dell' acquidotto, state da me paragonate a' testicoli cerebrali umani, si veggon partire dal folco longitudinale due filuzzi midollari per parte, che traforano i lati del primo velo midollare che pur è anteriore, e superiore (a), ed escono sulle gambe del cervello per unirsi con le radici del nervo patetico, il quale spiccasi dal fianco della lastra midollar, ond'è fatta porzion della volta dell' acquidotto .

(a) Ved. Memorie ec. della Soc. III. pag. 162, e 163, cioè Tratt. III. Italiana . Verona MDCCCLXXXVI. Tom. cap. VI. art. II., e III.

A R T I C O L O V.

Esame delle cose esposte dall' Allero nelle note a, b, c, sovra riferite.

§. 1. Non saprei distinguere qual altra particella midollare il nostro Maestro abbia voluto di nuovo accennare nella nota *a* sotto il nome di *linea midollare bianca*, se non è per avventura quella, che nella sezione settima della stessa ope- retta da noi comentata avea già indicata sotto quel d' *arcus tumens*, di cui abbian favellato poco addietro.

2. I ventricoli de' talami de' N. O., assai grandi relativamente al volume de' sacchi midollari, in cui si trovano rin- chiusi, sono già stati nel precedente Trattato (*a*) ampia- te descritti insieme col canal ond' essi comunicano coll' ac- quidotto (*b*) mediante un' apertura negli uccelli più piccio- li capace d'una setola, e ne' più grossi a proporzione più ampla (*c*) poichè nell' oche, nell'anitre, ne' galli d' india, e ne' nibbj è capace del capo d'una spilla comune, e 'l cana- letto v' ha una direzione quasi traversale. Aggiungeremo qui soltanto, per render più chiaro il testo Alleriano, le ma- niere di manifestar più facilmente il canaletto di cadaun de' ventricoli de' talami, e la sua foce.

3. Tagliati obbliquamente quanto son alti i talami, si sos- sili nella porzion del ventricolo, che resta aderente alla co- lonna midollar centrale, verso l'acquidotto, e sen vedranno ad elevar i veli midollari, che ne compiscono la volta, e ciò rinnoverassi a misura, che vi s'andrà di nuovo introdu- cendo il fiato a riprese, e con dolcezza.

4. Vedremo poi a gonfiar l'uno o l'altro de' talami quan- do soffierassi su per l'angolo superior dell' aja romboidea do- po aver tolti via gli emisferi, e la sommità del cervelletto,

G iij

(a) Cap. VIII.

(b) l. cit. Cap. VI. Art. I. §. 61.

(c) Nell' Avoltojo Chiamato ammi-

se agevolmente il ceppo d'una penna
maestra dell'ala d'un canarino.

purchè si tengano dolcemente otturati sì l'apertura superior dell'acqidoto alla commessura posteriore, come il ventricolo del cervelletto (a) che col taglio della sommità di questo resta aperto.

5. Non ripeteremo in questo luogo le notizie, ch'altrove abbiamo già date della polposa morbidiissima lanugine cenognola, che tappezza tutte le finora mentovate cavità, dovendo bastar le suddette.

C A P I T O L O VII.

Della Glandula Pituitaria.

6. 1. Parvemi strano che l'Autor nostro diligentissimo non avesse ravvisata negli uccelli la glandula pituitaria, posto che in tutta l'operetta, nel comento della quale ci siamo occupati, favellando dell'ocche, e dell'anitre mai non ne fece menzione. Convien dire però che ciò sia stato una mera dimenticanza giacchè finalmente al Num. 12. de' *corollarj fisiologici* dell'opuscolo stesso leggiamo „ la glandula pituitaria è „ perpetua: ne' pesci manda qualche fibrilla a' nervi olfattori, e al cervello stesso, come vedesi nel lucio: è probabile adunque, ch'eziandio negli altri animali somministri „ qualche poco di midollare al cervello „.

2. L'*Allero* qui non nomina gli uccelli, tuttavia non credo sbagliarla quando interpreto quelle parole è *perpetua* quasi che avesse detto è *in tutti gli animali*.

3. Nell'ocche, nell'anitre, in somma in quegli uccelli, che hanno quasi piano il pavimento della cavità del cranio, questa glandula è nascosta in una profonda fossicella dond'è cosa malagevol estrarla (b), ed ivi benchè l'orlo posterior di

(a) Ved. il Cap. III. del pres. Trattato.

(b) In un gallo d'india l'encefalo di cui ho sotto gli occhi

lungo Pol.	1.	lin.	2.
largo	1.		o.
alto	1.		o.

la fossa pituitaria dalla qual estrarro la glandula femicorticale ed esteriormente membranosa, è lunga 0.4, larga 0.2, alta 0.2.

taie fossetta (cioè quello, ch' equivale alle apofisi clinoides posteriori de' cranj umani) sia considerabilmente elevato, il catino però non n'è molto profondo.

4. Negli altri uccelli, massime ne' rapaci, sta innicchiata sul margine d'un risalto, da cui discendesi nel catino, che suol essere in questa classe più sensibilmente bipartito mercè la cresta longitudinale (a) che v'abbiamo indicato.

5. La glandula pituitaria degli uccelli è picciolina, di color fosco-rossigno, attaccata debolmente alla base del cervello per un tenue picciuolo; che guida l'occhio dell' osservator diligente a vederla ne' siti accennati profondamente nascosta, immediatamente dietro all' aja quadrata de' nervi ottici, ravvisandolo tosto che questa è stata recisa, e sollevato destramente ciò, che sul fondo mezzano della cavità del cranio vi riman di cervello.

6. Io la vidi però non poche fiate ne' grossi uccelli, probabilmente molto vecchi, e specialmente ne' galli, ad uscire dal proprio nicchio solamente sollevandone la base del cervello dal fondo della cavità del cranio, e rimaner appesa dietro a quell' aja all' arrendevole pia-madre, ch' avvolge, e rinforza il breve, tenero imbuto, o picciuolo, che non ha d' un imbuto eccetto la figura.

7. Questo è sovente pellucido, nè meglio se ne scuopre la figura, e se ne comprende la solidità del suo corpo, che soffiando in avanti nel terzo ventricolo immediatamente dietro alla commessura anteriore; perciocchè allora veggiamo dietro all' aja ergerli un non so che di lucido, breve e sottile, che s'accosta alla figura d' un picciol cono a base in alto, concava dal canto suddetto del III ventricolo; la sostanza interna però di tal cono è polposa, e tanto morbida, che non v'ha cotone di tanta finezza, che le si possa giustamente paragonare.

8. Con l' accennato metodo semplicissimo s' allargan le pareti del ventricolo, per la qual cosa meglio se ne può co-

(a) E' pur anco stata da noi recata l' eccezion a tal regola nel grosso *Avoltojo Chiamato*.

noscere la capacità, e la profondità, ch'è molto maggiore in avanti; dove si rende più manifesto il padiglione cavo, da cui s'allunga il picciuolo della glandula, e se ne ravvifa la morbida lanugine cenerognola, che tutto il concavo ne tappezza, e in basso l'ottura; finalmente più al davanti si distingue il candor della midollare, che formando le papille, diviso per le pareti del ventricolo in due striscie per parte, divergenti in alto; v'ha lo stess'ufficio, ch'è stato da noi amplamente esposto nell'Encefalotomia (a), ed altrove.

C A P I T O L O VIII.

De' vasi dell' Encefalo degli uccelli.

TESTO ALLERIANO. (b)

„ Dalla Dura-madre, che tappezza la base del cranio, molti vasi rossi vanno a diramarsi nella Pia,,.

Qui sarebbe opportuna la descrizione estesa de' vasi, che penetrano nel cranio, vi si diramano, e per diverse strade ne sbocciano: molto se n'è già esposto ne' primi trattati di quest'operetta, al che non ho mai avut'ozio bastante per far succedere con ordine le necessarie ulteriori osservazioni a maggior appagamento vostro, Urbanissimo Signore; perciocchè il diletto, ch'io ricavai finora dalle ricerche sulle radici più profonde ed intime de' nervi trasse a se tutta la mia attenzione. Non siavi pertanto discaro il riunirsi da me prima il risultato di queste, che sembrami assai più importante, che dell'altre (qualora non basti quello, che se n'è pubblicato) a più bell'agio daremo ragguaglio. Avvertirò soltanto, che l'arterie carotidi prima di sboccare nella fossa pituitaria per li proprj fori loro, passano rasente il tramezzo dell'occhiaje, e ne traforano le due lamine obbliquamente là dove si scostan in alto per dar luogo alla glandula pituitaria.

CAPIT-

(a) *Offerv. in Chirurgia* Parte II. Cap. VI. pagg. 98, e 99.

(b) „ Ex dura membrana basin cra-

„ nii vestiente multa vasa rubra in „ piam meningem subeunt. “

CAPITOLO IX.

Del peso de' cerebri degli uccelli rispetto a quello de' corpi intieri onde facean parte.

TESTO ALLERIANO (a).

„ Tutto l' uccello pesava cent' ott' oncie e 'l cerebro ventinove centesime parti, ed un quarto d' oncia.

Neppur a questo riguardo mi vennero fatte osservazioni abbastanza serie, e costanti, perchè meritino d' esservi presentate, e crederò d' adempir almeno in parte il dover mio se vi recherò la traduzione di quanto ce ne lasciò scritto l' Autor nostro nell' ottavo Tomo della *fabbrica, e funzioni delle parti principali del corpo Umano*. (b)

Negli Uccelli.

„ Nella maggior parte degli uccelli il cerebro è grande ;
 „ non tanto però negli struzzi, in uno de quali il *Valisnieri* (c) non lo trovò più pesante d' un' oncia; ne' tordi,
 „ che *Browne* (d) assicurò aver mezza dramma di cerebro
 „ passando essi trentaquattro dramme; ne' dindj, a' quali *Schneidero* (e) non ne accordò più di novantanove grani; nell'
 „ anitre, in cui lo stesso *Schneidero* (f) non lo trovò pesante oltre a tre dramme; ed io medesimo in un' anitra;
 „ che pesava cent' ott' oncie, conobbi, che il cerebro pesava solo grani 144, il che non era più della trecentesima
 „ sessantesima parte del peso di quell' animale: picciolo è pure nella classe degli uccelli carnivori, perciocchè l' aquila non n' ha più ch' una centesessantesima parte del suo corpo se crediamo al *Borrichio* (g): e però alquanto maggio-

Tomo IV.

H

(a) „ Animal universum 108 uncias pendit, pondus cerebri fuit „ 29 + 1 : 4 centesimalium uncias. “

(b) „ Alberti Halleri &c. De Partium Corporis Humani Præcipuar. „ Fab. & Functionib. Tom. VIII. Cerebrum. Nervi. Lib. X. Sect. I. §. „ IV. pag. 13. & 14.

(c) Opere. Notomia d' uno Struzzo, pag. 250.

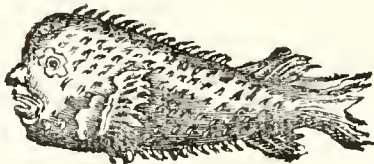
(d) Erreurs Populaires L. IV. pag. 239.

(e) De Cath. pag. 181.

(f) Ibidem.

(g) Hermet. Ægypt. Sap. pag. 265.

- „ re nelle civette, gli Accademici delle Scienze di Parigi (a) avendo nelle Memorie loro pubblicato l'anno 1636, che quest' uccello ha il cervello più grosso e pesante, che il gallo d' india. Tanto è degno tal uccello d'esser veramente dedicato a Minerva !
- „ Osservossi inoltre, che 'l gallo volgare ha di maggior peso il cervello, il Pozzi (b) avendolo trovato d' un' oncia in un corpo, che ne pesava 25; nè fu minore in una colomba, in cui assicurò lo *Schneidero*, che pesava grani ventisei .
- „ Il *Lindenio* avea già scritto (c) che i passeri hanno grande il cervello, essendone ben pieno il capo che non pesa gran fatto meno della quinta parte di tutto il corpo, il che dal *Pozzi* (d) fu ridotto nel pettirosso ad 1 : 32 ; nel passero (e) volgare ad 1 : 15 ; nel canarino ad 1 : 14 (f) il qual ultimo uccello è fra tutti il meglio provveduto di cervello .
- „ Ed io mentre che registro queste osservazioni apro un fringuello, e servendomi de' pesi più esatti docimastici trovo, che tutto l' uccello è di parti 71 + 1 : 4, il cervello tutto di parti 2 + 5 : 8 , la qual ragione s' accosta ad 1 : 27 non diversamente da quanto scrisse il chiarissimo *Pozzi* .



-
- (a) pag. 127.
 (b) Lettere pag. 86.
 (c) *Physiolog.* pag. 397.
 (d) „ L. cit. ubi Grana II. erant
 „ in granis 346.
 (e) „ Grana 21 in gr. 380. Pondus
 „ 526 in Passere reperit Cl. *Muys De*
 „ *fibra musculari* pag. 301. Grana 15 in
 „ avicula 584 gr. sive sui partem 1:39.
 „ *Browne* l. cit.
 (f) Grana 13. in gr. 180.

OSSERVAZIONE

SOPRA UN TUMORE SINGOLARE CISTICO INTERNO.

Del Sig. GIOVANNI ANTONIO MARINO Medico Primario dell' Ospitale della SS. Annunciata di Savigliano in Piemonte.

P R E S E N T A T A

Dal Sig. VINCENZO MALACARNE.

§. I.

QUanti vantaggi, e di quanta importanza abbia la Medicina ricavati a profitto della salute degli uomini da che con mano diligente, ed occhio attento i Professori della medesima si sono avvezzati nell' arte di sparare i cadaveri a fine di rintracciare ne' medesimi le cagioni, ed i principj delle malattie, lo attesta sopra tutto l' eccellente Trattato *De sedibus, & causis morborum per anatomen investigatis* dell' immortale Morgagni.

§. II.

Egli ci ha in quello indicata una strada la meno equivoca per dirigerci, e condurci, nelle varie circostanze de' casi al rischiaramento de' segni, e de' sintomi, i quali possono caratterizzare certe rare infermità, sopra li quali ci mancano i diagnostici per riconoscerle, e distinguerle; cosicchè sebbene alcuna di sì fatte ricerche possa qualche volta sfuggire all' occhio dell' indagatore il più attento, si troverà egli spesso fiate pienamente compensato delle intraprese fatiche, qualora fra le numerose investigazioni avrà

H ij

egli una qualche volta acquistata nuova cognizione sopra la natura, e la sede di malattia sino allora o rarissima, od equivoca, o non conosciuta.

§. III.

Fra le non rare malattie di tale sorta si possono annoverare quelle, le quali l'anatomia de' cadaveri ci ha dimostrate dipendenti da' tumori nati, ed accresciuti nell'interno de' visceri di sostanza singolare, e totalmente dissimile dalla natura di quelle, che i segni apparenti ci facevano supporre; lo che singolarmente suole accadere qualora si tratta d'infermità prodotte da tumori formati nell'interno de' corpi da sostanze, che raramente s'incontrano lontane dalla periferia del medesimo, cioè a dire de' tumori adiposi, chiamati dall'arte *steatomi*.

§. IV.

Ed in vero chi avrebbe mai sospettato, che in quell'infermo da sì lungo tempo afflitto per mille gravimali, i quali dopo d'averlo interamente acciecatò lo condussero finalmente alla tomba, vi si fosse formato tra il cervello ed il cervelletto uno steatoma della grossezza d'un pugno, quale glielo rinvenne nel suo cadavere Teofilo Bonetto col mezzo della apertura del cranio? Un tumore di contumile natura di sei libbre di peso pendente nella cavità del petto formatosi fra le cellule del mediastino fu egli mai sospettato trovarsi dal sagacissimo *Boeraave* nel corpo di quell'infermo, il quale, come ci instruisce la sua storia *atrocis, & rarissimi morbi*, non morì, se non dopo avere lungamente tollerate angosce estreme ed orribili? Un terzo tumore interno di tal natura fu osservato dal saggio *Mead*, prima che ne avesse avuto dubbio alcuno, attaccato alla sostanza del fegato istesso.

§. V.

Questi tre esempi di tumori adiposi interni connessi ad alcun viscere erano i soli, che fossero pervenuti a mia cognizione (non comprendo fra questi le congestioni di grasso, che si rinvencono soventemente nei reticoli dell' omento, o del mesenterio, che ne sono il naturale suo ricettacolo, poichè di raro accade, che riescano d'occasione di grave morbo, se non se pel loro eccessivamente accresciuto volume) quandochè un quarto singolare esempio, il quale mi somministra l'osservazione presente, venne ad offrirsi a' miei occhi in occasione che feci sparare un cadavere, in cui mai prima d'allora non mi era venuto in mente la sua esistenza.

§. VI.

Prima però d'inoltrarmi nella narrazione di quanto ho osservato, penso non riuscire inutile cosa, il far precedere la breve storia della malattia, per cui cessò di vivere il soggetto, poichè dall'esame de' sintomi, che l'hanno preceduta, ed accompagnata, se ne potranno forse rintracciare i principj, che hanno dato luogo alla formazione del tumore nel viscere, in cui fu ritrovato, e concorrere potrebbero al rischiaramento de' segni equivoci, che dimostravano la sede del morbo di tutt'altra natura.

§. VII.

Il Sig. Cavaliere *Solere*, che forma il soggetto di questa osservazione, morto nell'età sua di settanta cinque anni storpio, e deformato sino dalla sua prima infanzia per conseguenza di vizio rachitico, portava una grossa, e lunga testa, aveva tutte le articolazioni sì fattamente ingrossate, e rannicchiate singolarmente quelle delle ginocchia, che non potendo nè camminare da per se solo, nè restare ritto sopra piedi lungamente, era forzato di strascinarsi, dirò così, appoggiato sopra un forte bastone colle ginocchia piegate in dentro in angolo acuto, restando le natiche applicate, e quasi parallele ai popliti delle gambe, incrociandosi al-

ternatamente l' uno de' ginocchi sopra l' altro ad ogni passo, ch'egli moveva, od altrimenti era costretto di restare od assiso, od inginocchiato, o disteso in letto.

§. VIII.

Codesta difficoltà gravissima nel camminare essendosi insensibilmente accresciuta coll' età in proporzione, che s' aumentava la rigidezza ne' ligamenti, lo costrinse qualche anno prima di sua ultima infermità a restare quasi sempre in camera, e quivi a strascinarsi sopra le ginocchia per la medesima coll' appoggio delle mani in terra, o sostentandosi con bastone, movendosi così colla sola azione, e forza dei muscoli delle coscie, non più in caso di valersi delle gambe, e de' piedi. Egli visse celibe, divoto, solitario, pigro, melanconico, d' appetito vorace, mangiando assai, e sovente, onde impinguava in proporzione.

§. IX.

Lagnavasi egli da qualche anno prima d' una specie di torpidezza, che non sapeva bene esprimere co' termini, e che diceva egli riuscirgli più molesta, e grave ogni qual volta si accingeva ad orinare, sebbene però corrispondesse mai sempre la quantità delle orine alla contrazione della vescica, ed alla pressione de' muscoli dell' addome. A questa molestia succedettero col tempo dolori ottusi, gravativi alla regione de' reni, e del pube; lo scarico delle fecci si rendeva restio, e le vene emorroidali interne, ed esterne allora si gonfiavano.

§. X.

A tutti questi incomodi, i quali aumentavano sensibilmente sul cominciare dell' anno 1783 s' aggiunse una elevazione dolente della regione ipogastrica nel sito, che corrisponde al fondo della vescica, accompagnata da tormini, e dolori ottusi intestinali periodici, che si rendevano regolarmente molesti nell' entrare della notte, e che non cessavano se non verso le ore due, o tre del mattino. Qualunque rimedio fra i molteplici

esplorati non gli recò giammai alcun sollievo, anzichè crebbero ognora gl'incomodi, e le molestie unite a vigilia insuperabile dai sonniferi, ed a ripugnanza insuperabile a nutrirsi, cosicchè passò gradatamente in una estrema magrezza, senza che le urine abbiano cessato di uscire in proporzione corrispondente alle bevande.

§. XI.

Queste finalmente cominciarono a diminuire nel mese di febbrajo dell'anno seguente, indi poi non potevano più espellerli a zampillo, ma involontariamente uscivano a goccia a goccia ora tinte in rosso deponenti renelle, qualche volta miste di sangue grumoso, che gli recavano atroci dolori, quandochè più sovente ancora uscivano facilmente in abbondanza di colore, e consistenza naturale senza lasciare sedimento. Frattanto la stitichezza del ventre era cresciuta in foggia a resistere all'azione, e forza d'ogni rimedio purgativo, e la contrazione dello sfintere dell'intestino retto a non permettere l'applicazione de' clisteri. Finalmente sopravvenuta la febbre, agitato da convulsioni universali, in mezzo a spasmi, e delirio cessò di vivere nella notte delli 12 Aprile dell'an. 1784.

§. XII.

Sino da' primi giorni dell'ingravescenza della malattia i sintomi, che l'accompagnavano, somministrato avevano dubbio, e sospetto della presenza di qualche calcolosa concrezione formata nella rena, e per gli ureteri caduta nella vescica. Desideravo di assicurarmene col mezzo esplorativo del catetere; ma non ci fu modo giammai di persuadere l'infermo di assoggettarvisi. Un tale dubbio sembrava accrescersi poichè furono osservati dal Sig. Chirurgo Paglini alcuni fragmenti calcolosi fissi tra il prepuzio e la ghianda, lo che m'indusse a credere, od almeno a sospettare, che una simile concrezione poteva esserli accumulata nella vescica in forma d'incrostazione, siccome m'era avvenuto di osservare in qualche analogo caso. Riflettevo per altra parte, che nello sparare cadaveri in conseguenza di sintomi a questi consimili m'ero

avveduto, che la malattia dipendeva da una congerie di varici formatesi in tutte quali le diramazioni della vena porta, che si distribuiscono alla vescica, ed al retto intestino. Affine impertanto di rischiarare i miei dubbj ottenni da' Parenti del diffonto di far procedere alla ispezione anatomica del cadavere, la quale fu eseguita l'indomani da' Signori Pagnini, e Bruera Chirurghi sperimentati di questa città.

§. XIII.

Poichè s'ebbe tagliata la pelle, ed aperto in forma di croce il tessuto cellulare, recisi i muscoli, e spaccato il peritoneo, comparve elevato, ed enormemente disteso il corpo della vescica in ogni parte duro, resistente, e livido. Egli era totalmente per la sua faccia anteriore attaccato al peritoneo in fondo agli intestini, siccome anche lateralmente agglutinato a' medesimi elevandosi, ed ampliandosi fino sotto all'ombelico. Sciolto da tutti i vincoli si spaccò in lungo la membrana esterna della vescica, che s'era spezzata di tre in quattro linee, sotto la quale, e contenuta nella sua cavità, apparve una sostanza bianca, compatta, liscia, ed interamente somigliante al sevo di capra con cui formansi le candele, e siccome lo stesso friabile in maniera, che nel distaccarla dalla vescica si ruppe in molti pezzuoli di singolare figura assai somiglianti ai grappoli, o mazzetti, che formano la testa del cavolfiore strettamente fra loro compressi, e formanti una superficie assai liscia aderente alla parte concava della tonaca della vescica esterna, ma che di leggieri colle dita si distaccava dalla medesima. Di questa sostanza ne furono tagliate alcune laminette sottili, le quali erano dure, lisce, lucenti, e bianche, della quale era interamente ripieno il cavo della vescica sin verso il centro della medesima, dove dividendosi, e formando una infinità di piccoli tubercoli rotondi comprendeva fra quelli verso la parte anteriore riguardante il pube un corpo membranoso ineguale, floscio, di grossezza d'un buon pollice, e di quattro in lunghezza, il quale per la sua faccia posteriore quali alla metà della vescica era annesso, e connesso alla medesima, e di là insensibilmente allargandosi, e applicandosi poscia in ogni parte

a tutta la superficie interna del cavo discendeva fino allo sfintere della vescica ripiegato sopra se stesso, e ripieno di liquido, che riconobbi essere vera orina, ed il sacco, che la conteneva formato dalla tonaca interna della vescica divisa dalla esterna per mezzo della stessa sostanza adiposa, in cui ci trovammo un piccolo calcolo friabile bianco della grossezza, e della figura d' un pisello schiacciato.

§. XIV.

Sebbene per premura de' miei affari non siensi potute esaminare con diligenza le due porzioni dalle membrane della vescica così divise, egli è probabile però, che l' esterna fosse formata dalla espansione del peritoneo, e l' interna continente l' orina comprendesse la muscolare, la nervosa, e l' intima, e che la sostanza del grasso, che le separava, si fosse raunata nella cellulare. Questa divisione aveva luogo fin dove s' incontra il tragitto degli ureteri per le membrane della vescica in modo, che sebbene questa fosse occupata per le sue due terze parti, e ripiena dal grasso raunatosi, non restava nulla meno impedita la continuata filtrazione dell' orina per gli ureteri nel sacco sottoposto a riceverla. Questo sacco adunque formava una vescica floscia, molle, tenue, ripiegata, di figura allungata di quattro in cinque pollici lunga sopra un diametro di dieci a dodici linee largo, tortuoso, il quale s' andava allargando finchè alla inserzione degli ureteri diveniva dello stesso diametro della vescica in istato naturale. Tutta la sostanza del grasso estrarra pesava quattro libbre, la totale lunghezza di tutto il sacco era di nove pollici, e mezzo, ed il suo diametro nel centro era di cinque in sei pollici.

§. XV.

Tutti gli altri visceri esaminati del basso ventre si trovarono nel loro stato naturale; non si riconobbe altra alterazione nelle rena se non se d' alcune idatidi sopra le loro capsule. Gl' intestini crassi erano pieni zeppi di pallottole fecali durissime, e l' omento era assottigliato in modo a non più ritrovarvi traccia di grasso.

RIFLESSIONI, E CONGETTURE.

In conseguenza di un tal fatto si presentarono alla mia mente le questioni seguenti.

1. Perchè, e come in questo sacco si potè raunare una così prodigiosa quantità di grasso?

2. Come si potrebbe caratterizzare, e distinguere una tale malattia dalle altre comuni alla vesfica?

3. Riconosciuta la malattia, potrebbe l'arte ritrovare mezzi per superarla, od almeno per palliarla?

Ci vorrebbero molte consimili osservazioni insieme raccolte di casi analoghi per potere rispondere a queste tre questioni con qualche soddisfacente probabilità, nè io m' accingerò ad intraprenderne la soluzione. Cercherò nullameno esponendo semplicemente, quanto io ne pensi, d' indicare una strada, la quale col soccorso, e colla guida d'altri casi, che a sorte si potrebbero rincontrare, possa forse portarci al rischiarimento de' segni univoci di sua esistenza, e natura, e quindi alla scoperta delle indicazioni curative, o palliative.

Prescinderò io di trattare della formazione del grasso nel corpo animale, poichè oltre che questo si è un articolo fisiologico sopra il quale non s' hanno fin' ora, che soli ragionamenti plausibili a produrre, riuscirebbe assai estraneo al mio scopo il tentarne la teoria. L'ingegnoso Sig. *Teofilo di Borden* ne ha invano cercata l'origine nel suo Trattato del tessuto mucoso, e nelle sue ricerche sopra la cachessia adiposa esposte nell' analisi del sangue umano, ed il Sig. *Lorry*, che se ne occupò specialmente, nelle investigazioni sopra lo stesso soggetto esposte in una sua Memoria letta all' Accademia Reale di Medicina di Parigi il 7 Settembre 1779 si restringe a conchiudere, *che il grasso deve la sua origine ad un prodotto immediato della prima secrezione somministrata dal chilo destinato a contribuire alla formazione degli altri umori, e che deve aver luogo fra le prime distribuzioni degli umori recrementici.*

Dopo questa premessa non saprei come altrimenti soddisfare alla prima questione, se non se risalendo, ed esaminan-

do l'azione meccanica della ordinaria posizione del soggetto, e dei movimenti violenti a' quali era obbligato nel camminare, per i quali i muscoli del dorso, delle natiche, de' lombi, delle coscie, del basso ventre agivano con violenza continuata sopra i visceri inferiori situati nell'addome, e comprimevano principalmente le rena, l'omento, il mesenterio serbatoj ordinari del grasso, ne doveva necessariamente risultare una direzione forzata determinante incessantemente il grasso contenuto, od avviato nel tessuto di questi visceri verso quel solo, che nel sacco del peritoneo in ragione di sua posizione diveniva il centro confinante di tutte le sovrapposte compressioni, cioè la veslica, dove forzato a trapelare per mezzo della reticolata mucosa fra le altre tonache della medesima doveva raunarsi, e fissarsi. La premessa descrizione del temperamento, del genere di vita, della figura, della difformazione del soggetto sembra concorrere a provarne la probabilità: il modo, e le osservazioni continuate, che far si potrebbero sopra cadaveri di simili soggetti, che per avventura non sono rari nel nostro Piemonte, gioverebbero a confirmarla.

Si potrebbe frattanto azzardare qualche congettura sopra la maniera con cui una sì prodigiosa quantità di grasso si potuta raccogliere fra le tonache della veslica. Si deve premettere perciò la verità dell'esistenza, e della circonvoluzione generale del tessuto adiposo intorno a tutti i visceri non solamente, ma intorno ancora ad ogni fibra non solamente carnea, o membranosa del corpo umano, ma eziandio della stessa nervosa (a). Avvi fra gli anatomici chi crede, che il grasso animale contenuto nel suo tessuto abbia le sue cellette, le sue vessichette non tanto per riceverlo, ma i suoi vasi eziandio atti a promoverne la circolazione, onde si muova, s'agiti incessantemente ne' suoi serbatoj, dove dal calore vitale è ritenuto in istato di liquefazione, che poi la morte agghiaccia, ed addensa in maniera a formarne delle mas-

I ij

(a) Ved. *Morgagni*, de sedib., & caus. Morbor. &c. epist. 13. art. 8., e 9. epist. 52. art. 30.

fe, le quali acquistano tutta l'apparenza (siccome nella osservazione precedente) di sevo rappigliato. Il Sig. *de Borden* al §. 53 della sua Analisi del sangue umano tenta dimostrare con ragioni convincenti , che questa dottrina non è ancora provata dalla speranza , e da osservazioni sufficienti. Io sono del suo parere, e converrò collo stesso , ch' ella è cosa più ragionevol il credere , che queste masse , queste concrezioni di grasso non sono effettivamente , che un tessuto di sottilissime membrane tortuosamente ripiegate, le quali partecipano del movimento intestino vitale, e concorrono unitamente al calore, all' agitazione del grasso contenuto.

Ciò premesso, e seguitando i principj di questa teoria non contraddetta finora dalla speranza, resta facile cosa il concepire, che un tale steatoma formato , accresciuto , ed addensato fra le tonache della vescica per le ragioni esposte nel §. 7 , ed al n. 3 abbia dovuto estendersi concentricamente nel suo proprio sacco insino ad un certo termine finchè non incontrò maggior resistenza alla divisione delle membrane, e come abbia acquistata, e conservata una superficie liscia verso la tonaca esterna separata , sopra la quale si modellava, mentre che ripiegato, e disposto in forma di piccoli bocchettini coperti, e formati di sottilissime membrane ne dimostrava una scabra ineguale verso la tonaca interna , e perchè dovette circoscriversi ad una data profondità verso l'inferzione degli ureteri, che si opponevano alla ulteriore divisione delle lamine attraversandole , e per la aumentata quantità delle fibre muscolari , che verso il collo della vescica colà s'incontrano , e resistono , e per la maggiore spessezza di tutte le membrane , che s' oppongono , e per l' accresciuta compressione de' muscoli , che l' impediva. Da tutto questo risultare ne doveva il conseguente rinferramento della tonaca interna separata, e la sua riduzione informe, e ripiegata, non potendo più sostenere la sua figura di sferoide allungata divenendo più sfocia massimamente quando non era ripiena d' orina, che sostenesse le sue pareti.

Aggiugniamo a tutte queste conghietture , che essendo la fibra muscolare di sua natura irritabile , e legge riconosciuta, che l' irritabilità d' un organo secretore, od escretore au-

mentata attrae a se gli umori, la secrezione, od escrezione de' quali per legge economica animale doveva farsi per altri, co' quali il primo abbia una comunicazione diretta, a simpatia nervosa stabilita, doveva nel caso nostro conseguentemente accadere, che per l'irritazione indotta dal primo ammasso di grasso accumulatosi, s'andasse aumentando nell'interstizio formato fra le tonache della vescica in proporzione, ch'egli cessava di separarsi nel tessuto mucoso di tutta la periferia del corpo, dell'omento, del mesenterio anche per la compressione indotta dalla positura dell'infermo, e dalle altre cagioni sopraddescritte.

Che che ne sia di queste mie ragionevoli conghietture, le quali finora non sembrano avere altro prezzo, che quello di probabilità forse insufficiente a stabilire la diagnosi di una tale malattia; potrebbero nulla meno riuscire di un reale rischiaramento nel dato caso di un rachitico di grasso temperamento, di consimile alterata configurazione nelle ginocchia, onde ne seguissero le stesse compressioni contro l'addome, e che si trovasse poi nelle stesse date circostanze di conseguente magrezza universale con tumidezza alla regione della vescica, perchè si avesse ragione sufficiente a sospettare l'esistenza di un consimile tumore, la quale si potrebbe asficurare co' mezzi esplorativi del cateterismo, dello *speculum ani*, dell'introduzione delle dita nel retto, della compressione esterna, e di tutte quelle ricerche, che la sagacità dell'arte Chirurgica può inventare nell'occasione di dubbio, onde realmente distinguerla da ogni altra malattia analoga, e propria del viscere.

Assicurata con questi mezzi l'esistenza, e la natura della malattia continuerò le mie conghietture sopra la possibilità della cura o palliativa, o curativa, e primieramente in caso di diagnosi equivoca d'un tumore consimile al descritto, o d'un calcolo esistente nella vescica, sembrami che si potrà sempre mai esplorare senza rischio un rimedio adattabile al dubbio, siccome sono la maggior parte delle acque termali sulfuree alcaline usate in bevanda, in doccia, ed altre maniere. E questo parmi il solo equivoco, che possa nascere, poichè la nosologia non ci somministra altre infermità con cui possa questa confonderli se non si negligeranno i mez-

zi per esplorarne l'esistenza, e distinguerla da ogni altra.

Sebbene poi convengano gli autori Chirurghi tutti, che il solo mezzo di guarire i tumori cistici consista nel taglio, e nella estirpazione totale del sacco siccome il più pronto, ed il più sicuro quando s'offrono all'occhio, ed alla mano dell'operatore in sito conveniente alla operazione; nulla meno non è assolutamente deciso ancora, che sempre resistano ai rimedj risolvendi, e fondenti. Fra i Medici ritrovo, che il *Sagar* nel suo *Systema morborum symptomaticum* pag. 54. edizione di Vienna 1776 asserisce d' essersi felicemente servito una volta d' un linimento apposto sopra una meliceride composto di sale ammoniaco, d'estratti di cicuta, e d'iride di Firenze, e di croco d'antimonio a parti uguali spruzzate, e mescolate collo spirito di corno di cervo; e chi vorrà assolutamente negare l'efficacia di un tale rimedio topico, che porta seco tutto l'applauso di attività ben combinata? e chi vorrà negare, che avvalorata la sua azione esterna con rimedj interni di consimile natura non possa soddisfare pienamente all'impresa?

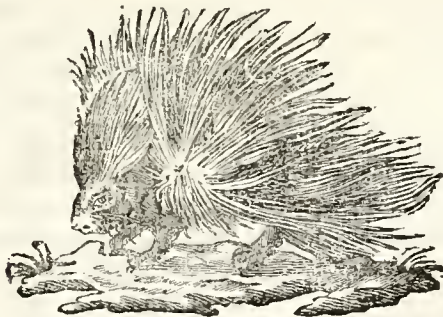
Io non dubito punto, che se si tentassero rimedj consimili a questo sperimentato dal *Sagar* sopra i tumori cistici esterni, e che fossero avvalorati coll'uso de' fondenti presi per bocca, che la medicina potrebbe suggerire, quantunque con minor prestezza, egualmente però si potrebbe riuscire nella risoluzione de' medesimi. Sarebbe questo un gran sollievo a quegli infelici infermi, i quali per debolezza d'animo sven-gono al solo aspetto del ferro, od alla voce d'altra operazione, ed un gran lume, col quale l'arte chirurgica verrebbe a rischiarare le indicazioni mediche ne' casi interni. S'avverta però, che nella speciale malattia di cui intrapresi a discorrere l'esterna apparenza del tumore renderebbe più agevole l'applicazione del rimedio topico sopra il medesimo, senza che si frapponessero ostacoli insuperabili alla sua azione.

Ciò premesso io ritrovo, che la Chimica a' nostri tempi portata pressochè al sommo di sua perfezione, o resa prossima almeno ad arrivarci col mezzo delle sue tavole di affinità, le quali pure si vanno perfezionando, ci ha scoperta in molte sostanze la loro virtù sciogliente, la quale ha corrisposto in varie occasioni alla comune aspettativa.

Fra queste è oramai cosa avverata, che l'etere, gli oli essenziali, e sopra tutti quello di terebinto sciolgono i calcoli biliari ne' condotti epatici, e nella cisti fellea, che pure sono composti per la sua maggior parte di grasso animale infiammabile. Questo rimedio usato colle dovute cautele farebbe il primo, ch'io bramerei si sperimentasse nel caso di simile infermità. Tenterei l'efficacia dell'alkali vegetale, minerale, volatile amministrato nella maniera la meno pericolosa, come pure quella dell'acido fosforico per ridurre il grasso in una specie di sapone solubile, onde reso scorrevole mescolar si potesse cogli altri umori escrementizj e recrementizj animali, ed espellersi dal corpo con quelli.

Unitamente a codesti scioglienti interni prudentemente praticati si potrebbe esplorare il valore della doccia sopra la parte esterna della congestione, e sceglierei fra le acque termali, che ce la somministrano, quelle che più abbondanti di epate di zolfo, o sia di gaz epatico aggiunger possono alla azione meccanica della percossa moderata la qualità sciogliente riconosciuta.

*Fungor vice cotis, acutum
Reddere quæ ferrum valet, expers ipsa secandi.* Hor.



APPENDICE ALLE OSSERVAZIONI
SOPRA UN TUMORE STEATOMATICO SINGOLARE
 DEL MEDESIMO.

Colla mia osservazione sopra il lipoma singolare ritrovato, e nato fra la duplicatura delle membrane della vescica d'un cadavere da me trasmessa nel mese di Giugno dell'anno scaduto a cotesta illustre Società Italiana di Verona per mezzo del chiarissimo Signor *Cavaliere Lorgna* degnissimo Presidente della medesima, io m'era proposto specialmente oltre alla singolarità del caso, e della malattia, di confermare quanto spesso accade, che i segni diagnostici manchino nelle innumerevoli malattie, alle quali soggiace il corpo umano, e per conseguenza manchino allora le indicazioni a chi deve trattarle, in cui ripone tutta la fiducia l'infermo. Affine impertanto di riparare per quanto può la sagacità umana ad un tanto essenziale mancamento e difetto non avvi miglior partito di quello da tanti bene affetti, ed infaticabili osservatori di già praticato di cercarne nei cadaveri con occhio diligente ed attento la sede, e la causa, raccogliere la storia esatta del morbo pregresso, ricavarne i segni, dedurne col parallelo de' simili l'analogia, e stabilirne la specie, od almeno il genere perchè indi si possa dopo un numero sufficiente di dati ritrarne le indicazioni curative, od almeno palliative. Sebbene però soventemente accade, che nè pure con questo così lodevole mezzo non sempre si soddisfaccia alle brame, ed alle ricerche dell'osservatore, poichè s'intralciano bene spesso sintomi così equivoci prima della morte, e s'incontrano varietà di cagioni, o per dir meglio di alterazioni così disparate, e così miste nello sparare i cadaveri, che anche dopo il più imparziale, o severo criterio resta dubbia tuttora la causa ultima della morte. Un fatto di consimile ambigua natura mi si presenta in oggi (14 febbrajo 1788) nel mio ospedale, il quale m'indu-

co di buona voglia a riferire, e porre sotto la disamina de' chiarissimi Membri, che compongono l' illustre Società italiana, sia perchè la specialità sua a me sembra possa meritarne l' onore, sia perchè contiene ricerca utile all' arte del medicare, ed aumenta la serie delle malattie dipendenti da tumori lipomatosi interni finora credute assai rare, l' esempio del quale nel sito in cui trovossi egli è il secondo nella storia Medico-anatomica, che a me sia noto dopo il solo osservato, e riferito da *Teofilo Bonnetti* di Geneva.

Addì 25 del trascorso Gennajo dopo una mia assenza di 18 giorni trovai *Maria Segneta* decombente nel nostro Ospedale civico della SS. Annunziata al n. IX giovane nubile di età, d' anni diciotto, d' abito di corpo pingue, pallida in volto, periodicamente menstruata, fervente in una osteseria. Era ella stata ammessa nel medesimo per una cefalea ribelle, antica, gli esasperamenti della quale le recavano alcuna volta vertigini, ed offuscamento di vista, siccome mi venne narrato di poi dal mio Collega, ed Assistente primario, da cui trattata sino allora giusta le varie indicazioni, che se gli presentarono, ne riportò vantaggio tale, che al mio arrivo era di già fra il numero delle convalescenti. E non lagnossi più meco da quel giorno sino a quello di sua morte d' alcun incomodo, se non se una sol volta di nausea, onde riconoscendo i suoi polsi intestinali le prescissi una polvere antelmintica di mia descrizione, e fu poco dopo licenziata dall' opera. Però sebbene una volta incamminata si fosse per restituirsi al suo antico padrone, ed altra fiata fosse sulle mosse d' essere condotta alla sua patria poco dalla città nostra lontana, sorpresa la prima volta da capogiro non lunge dall' ospedale, ne rivolse di nuovo i suoi passi, e la seconda rifiutò di partire temendo di non resistere al viaggio, sebbene da alcuno de' suoi parenti accompagnata.

Tutte codeste notizie non mi furono riferite se non dopo la sua morte avvenuta nella notte del 12 febbrajo corrente, in qual giorno alla visita pomeridiana fui condotto dalla solita infermiera al n. IX de' letti in cui la trovai decombente. I suoi polsi erano piccoli, stretti, minuti, e celeri, le pupille d' ambi gli occhi erano dilatate assai, nè discerneva alcuno degli oggetti, che se le presentarono, pallida

in volto si lagnava di acerbissimo dolore di testa più intenso nella parte destra occipitale con vertigine, prurito allo sternuto, e propensione al vomito. L' addome non era teso, od elevato, il calore al tatto pressochè naturale, non aveva a pranzo preso, che una sola minestra, e non eravi pregressa sospensione, o ritenzione di escrezione alcuna naturale. Parlava liberamente ma con voce tremola, moveva facilmente ogni membro, ma difficilmente inghiottiva. Mi ristrinsi perciò di prescriverle una mistura antispasmodica, ed antelmintica da prenderli a cucchiaj. Fu visitata verso notte secondo il costume dal Sig. Assistente, che l'aveva in prima curata, che trovolla ancora nello stesso stato, e nulla giudicò di aggiungere al da me prescritto rimedio. Al mattino del 13 vegnente mi fu riferito, che come la sera continuò sino verso la mezza notte senza avere mai più potuto inghiottire, quando sorpresa da convulsioni universali cessò di vivere come soffocata in un momento.

Si procedette alla disseminazione del cadavere sul mattino del 14 seguente in presenza mia e del prelodato Sig. Assistente Dottore *Melchior Siccardi*, del Sig. *Giacomo Arò* Chirurgo primario dell' Ospedale in sopravvivenza al Sig. Professore *Ramelli*, e Chirurgo Maggiore del Reggimento Provinciale di Mondovì, e siccome a tutti premeva di esaminare lo stato del cervello a riguardo della malattia per la quale era stata ritirata nell' Ospedale, di cui ne aveva fatta la relazione il Sig. Medico Assistente, si cominciò l'apertura del capo curiosi di rintracciarne coll' esame quale ne fosse l'alterazione.

Nelle prime smosse, e traballamenti della testa mentre già separatone il cuojo capelluto si cominciava a segare, viddimo a spontare da ambe le narici due prominenze acute, le quali attratte bel bello colle tanagliette dal Sig. Chirurgo, ed estrate trovaronsi essere due longhissimi lombrici grossi, pallidi, e morti. Segato, e rimosso il cranio, che nulla dimostrò di alterato, comparvero le diramazioni de' vasi sanguigni delle meningi oltremodo piene, ed intensamente colorite. Nudato il cervello non fece vedere vizio alcuno nella corticale, siccome nè pure nella midollare sua sostanza. S'andava tagliando a piccole, e sottili lamine la

porzione midollare fino sotto al corpo calloso, ed aperto il primo ventricolo laterale sinistro lo trovammo pieno d'acqua giallognola senza odore, e limpida al peso forse d'un'oncia; indi nell'aprire il destro ventricolo s'incontrò, e comparve una sostanza dissimile formante un corpo superiormente isolato, e ritondo di vario colore nella sua superficie, il quale compresso resisteva al tatto, e che tutta la capacità del ventricolo occupava. Era questo corpo involto in una sottilissima membrana pellucida siccome l'aracnoide aderente per la sua parte anteriore alle interne pareti del ventricolo, il quale trovavasi ampliato il doppio di più del suo stato naturale, siccome aderente si trovava al plesso corioideo, e la sua base posava, e premeva i talami de' nervi ottici ambidue, poichè il fondo del ventricolo destro piegava a sinistra coprendo i corpi fimbriati.

Estratta con diligenza dal ventricolo, che la conteneva, questa singolare sostanza pesava alla bilancia medica oncie quattro, la sua figura anteriore rassomigliava ad un uovo di gallo d'india, ma nella sua parte postica figurava quasi un rene compresso, e solcato verso la metà, il suo colore era variegato di rossigno oscuro pallido, e bianco, la sua circonferenza era di quattro pollici, e mezzo, tutta liscia fuorchè in fondo per l'estensione d'un pollice dove era conspersa di granelli aspri giallognoli. Nulla comparve d'alterato in tutta la restante porzione del cervello, siccome neppure nel cervelletto.

Tutto il tessuto cellulare era zeppo d'adipe in ogni sua estensione tanto esterna, che interna. L'omento poi soprattutto esteso fino all'estremo pube era pinguisimo, e pesava più di quattro libbre. Tutti i visceri posti sopra il diaframma erano in istato sanissimo. Il cuore era carico d'adipe.

La presenza di due lombrici estratti dalle narici ci fece sospettare dell'esistenza d'altro maggior numero nel canale intestinale; ma nessuno trovossene nel ventricolo, neppure nelle intestina. Nessun vizio ne' visceri ipocondriaci.

Le ovaja erano sensibilmente alterate nel colore, e nella consistenza, essendo flacide assai, e mostravano un aspetto di corruzione, sebbene non spirassero odore alcuno fetido. Fu giudicato vergine il soggetto, poichè l'utero era ristrettissi-

mo, aspra la vagina , appena apparenti le ale , distinte le caruncole, e quasi focchiuso l'ostio della vulva dalla caruncola superiore.

Eravamo per lasciare il cadavere, quando il Sig. Arò volendo intraprendere la dimostrazione de' muscoli della laringe, e della faringe ad alcuni suoi discepoli, li sottopose alla mano l'esofago , e trovandolo estremamente ampliato , accorciato , e difuguale lo spaccò longitudinalmente; ed ecco ripieno d' un gruppo informe di lunghi lombrici insieme attortigliati in numero di quindici.

R I F L E S S I O N I .

Oscura fu la diagnosi della malattia pregressa, e nulla più ci fu noto della medesima , se non che l' affezione primaria antica era una cefalea , che sopra tutto la infestava nella parte destra del capo, e che in conseguenza d' alcuni periodi di eccessivo dolore alcune volte la vista s' oscurava in uno, o nell' altro occhio, ed alcune altre in ambidue. Nè pure dagli effetti delle medicine presentatele nell' Ospedale (poichè prima, e fuori d' esso non si fa, se abbia cercato soccorso al suo male) si può con qualche fondamento dedurre conseguenza alcuna, che possa rischiarire la diagnosi della stessa malattia. Ciò che solo potei ricavare dal Sig. Medico Assistente a questo riguardo , si è , che da tutti gli evacuati praticati, siccome i salassi, le purgazioni, ed i vesicanti, ne ricavò sempre mai del sollievo , il quale riferir si potrebbe alla diminuzione della pressione , e della resistenza mediante l' evacuazione di qualunque umore, la di cui copia ne veniva sminuita per mezzo de' medesimi.

Comunque però s' ignori ogni altro sintoma conseguente da una tale malattia, e da un tal principio, contenere io mi voglio nella disamina della causa della cefalea emicranica, e della amaurosi relativamente alla morte.

Riferisce *Platero*, che in un giovane soggetto a violentissimi dolori di testa in seguito ad una febbre acuta sofferta, pei quali perdette prima la vista dell' occhio sinistro , poscia del destro , e finalmente morì ne' più crudeli tormenti, trovò nell' anatomizzare il cervello un tumore (senza speci-

ficarne la natura) che comprimeva i nervi ottici al loro uscire dal cranio , a cui ne attribuisce tutta la causa (*a*).

Drelincourtio ne rinvenne uno tra il cervello ed il cervelletto , che cagionò parimente la cecità , poscia la sordità, e successivamente la sospensione di tutte le funzioni animali e vitali, onde la morte (*b*).

Finalmente nel soggetto già riferito nella mia osservazione travagliato da varj e gravi sintomi, fra' quali prevaleva l'acerbo dolore di capo , e l'amaurosi trovò *Bonnet* un tumore steatomatoso siccome Drelincourtio fra il cervello ed il cervelletto .

Ora non v'ha dubbio , che consimili tumori nati , ed accresciuti nel cervello (i quali convien dire , che estremamente piccoli ne' suoi principj vadano insensibilissimamente crescendo, cosicchè l'infermo o poco , o nulla se ne risenta se non se a gradi a gradi sino a che giunti sieno ad una certa data mole) possano non solo essere causa di cefalee pertinaci, ed insuperabili, e di amaurosi, o sordità compite , o fugaci , siccome d' altri sintomi dipendenti specialmente dalla loro pressione, ma produrre alfine debbano l'apoplessia, e la morte.

Ma a dir vero questo non è lo scopo, ch'io mi sono proposto, poichè sopra una tal causa non avvi dubbio , o contrasto, se bene difficile cosa a spiegare riuscirebbe , come a tumori così enormi, siccome quello specialmente osservato dal *Bonnet*, resistere si possa e vivere così lungamente. Bensì di cercare ed esaminare se la causa della morte quasi repentinamente avvenuta al nostro soggetto ascrivere si debba all' esistenza del lipoma ritrovato nel ventricolo destro laterale del cervello, o non piuttosto alla numerosa quantità di lombrici aggomitolata nell' esofago del medesimo .

Per verità (nè mi vergogno in riferirlo) visto il lipoma esistente nel ventricolo del cervello, sebbene non interamente soddisfatto , nullameno pago di aver rinvenuta una

K iij

(*a*) *Fel. Plat. obser.* T. I. pag. 102.

pulcr. t. I. pag. 123.

(*b*) *Flammendinge de apopl.* 2. §2-

ragione sufficiente a dedurne la causa) io abbandonavo il cadavere senza ulteriore disamina, ma spaccato l'esofago, e visto, e considerato il gruppo enorme di vermi in quello esistente, mutai pensiero, e così ragionai.

Nelle tre riferite istorie di *Platero*, di *Drelincourzio*, e di *Bonnetto*, nelle quali la causa immediata della morte de' soggetti s' ascrive ai tumori ritrovati nel cervello oltre al dolore di capo, ed alla amaurosi, soli sintomi comuni colla nostra ammalata, osservo essere stati precursori alla morte loro varj altri sintomi prenuncj di apoplezia, o di paralisi (come si può vedere dalle loro istorie) malattie, che finirono colla morte loro. Ma nella inferna di cui io tratto l'esclusione d' ogni sintoma apopletico, o paralitico, lo stato de' polsi sovra menzionati da me, e dal Sig. mio Assistente osservati, lo stato del calore naturale, la pallidezza del volto, il prurito allo sternuto, al vomito, la lingua, e voce tremola, e le convulsioni soffocanti fra' quali ella morì uniti alla impossibilità di nulla inghiottire dal suo primo attacco fino alla morte, somministrano sufficiente motivo ad escludere la presenza del lipoma nel ventricolo destro del cervello, ed a sospettare altra causa di diversa natura produttrice della morte non residente nel capo. Questa sufficientissima a cagionare una morte anche repentina da ognuno conosciuta in pratica manifestossi nel cadavere colla presenza numerosa di lombrici nell' esofago, della quale ne' polsi specialmente ne diede segno non equivoco e prima, e nell' ultimo insulto, ed in vero sopra una tale indicazione le prescrissi la mistura sopra menzionata, la di cui base si era la polvere di radice di valviana selvaggia negli ultimi periodi di sua vita, e riandando il Ricettario dell' infermeria delle Donne ritrovo, che ne' primi giorni del mio ritorno quando ella era di già in convalescenza della cefalea (da me ignorata) prescritta io le aveva per qualche incomodo di cui meco lagnossi la polvere antelmintica di mia descrizione, dalla quale ella ne fu sollevata con un tale rimedio. La polvere antelmintica, ch' io pratico, si è composta di seme fantonico, corallina di corsica, radice di filice maschio, corteccia di arancio amaro, aloe, mirra, diagridio, e mercurio dolce in dosi proporzionate.

Che poi un numero considerevole siccome era quello di diecisettembrici esistente nel breve, e stretto canale dell' esofago, se da quello in breve o dalla natura, o dall' arte non s' espelle, recare possa e debba convulsioni, suffocazione e morte, non è così nuovo in medicina onde cercare si debba di provarlo con autorità, e ragioni: quandochè la sola malattia di dolore di capo, e tanto meno la sola amaurosi giusta il sagacissimo *Morgagni* non può mai essere causa di morte se non passa prima a fornire l' apoplessia (a); che però avuto riguardo ai sintomi narrati precursori della morte, e singolarmente al numero, ed al sito de' lombrici rinvenuti, non meno, che al modo violento con cui tentarono la loro uscita dall' esofago fino a cacciarsene uno per cadauna narice, ed allo stato de' polli riconosciuti, non v' ha dubbio, giusta il mio parere, che colla convulsione indotta, e lo spasmo a' muscoli della deglutizione, e della respirazione l' abbiano soffocata.

E non negherò però, che la causa della ribelle, ed antica cefalea, e della amaurosi fugace ascrivere si possa interamente al tumore nel cervello ritrovato, massimamente se riflettere si voglia alla posizione del tumore premente i talami de' nervi ottici, poichè l' illustre *Morgagni* tagliando cadaveri di persone morte cieche trovò una volta il nervo ottico ingorgato da un umore assai torbido, ed altra volta da denso mocchio (b). Così il Sig. *Parr* narra d' avere osservata una cecità in conseguenza di un' idatide, che comprimeva il nervo ottico, ed il *Blegny* un' altra cagionata da concrezione pietrosa nello stesso nervo. (c)

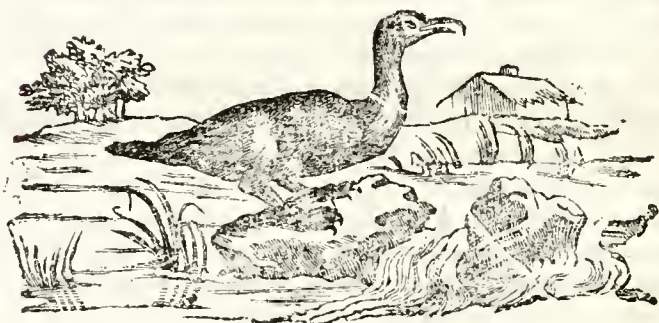
Ma considerer si deve, che l' amaurosi era fugace, e non permanente, che la cefalea neppure era continuamente forte, poichè se permetteva di vacare all' ufficio laborioso di cuoca d' osteria, e fu convalescente pel corso di due settimane nell' ospedale senza mostrarne gran caso; onde inferire si può, che o non sempre ugualmente una tal causa supposta

(a) *Quia solus (dolor capitis) ad interitum perducit fortasse neminem. De sed. & caus. morb. &c. epist. pag. num. 1.*

(b) *id. epist. 13. num. 8. 9.*

(c) *Tissot des maladies des nerv. T. 1. pag. 2. nota (a) p. 195.*

esistente nel capo induceva lo stesso effetto morbofo , o che nella esasperazione de' suoi incomodi s' aggiungeva altra cagione avventizia; s' aggiunga infine , che siccome ho di sopra notato , i sintomi precedenti e continuati fino alla morte piuttosto che ad un principio esistente nel cervello ad altra cagione capace d' indurre mobilità, irritazione , spasmo, e convulsione, siccome produssero, ascrivere si debbono nella cavità intestinale contenuta.



P R O B L E M A.

Determinare il massimo allungamento, che il peso di un pendolo produce nella corda, a cui è attaccato, che si suppone priva d'inerzia, e di gravità.

Del Sig. Co. GIORDANO RICCATI.

I. **Q**uesto problema è stato da me sciolto, quando tentai la costruzione della curva descritta dalla ghianda d'un pendolo, mettendo a computo la distensione della corda. Ecco la strada da me inutilmente battuta. Il pendolo CB (Fig. 1.) sia collocato in sito orizzontale: si dimanda qual curva BDA descriverà il punto B , mettendo a computo la distensione del filo, o corda CB . Sia giunto il pendolo nel sito CD , e poscia mova un minimo passo fino in CF . Col raggio CD descritto l'archetto DG , conduco pel punto D la perpendicolare EDH , e segno DH eguale al peso finito, o massa del volume infinitesimo B , e pel punto H delinea HI normale a CD prodotta. Finalmente pel punto F tiro la perpendicolare FK , e pel punto D l'orizzontale DL .

Pongo $CB=L$, $CD=L+l$, $ED=y$, $CE=x=\sqrt{(L+l^2-y^2)}$, $BD=s$, $GD=dz$, e si avrà per conseguenza $GF=dl$, $LF=dy$, $EK=-dx=-\frac{(L+l \cdot dl-ydy)}{\sqrt{(L+l^2-y^2)}}$, $DF=ds$, $dz=\sqrt{(ds^2-dl^2)}$. Sia in oltre M la massa, e peso del corpo B , u la sua velocità per la direzione DG , v la velocità per la direzione GF , ed V la velocità assoluta per l'archetto DF della curva.

II. Eguagliandosi ad u^2 il quadrato della velocità in D per la direzione DG , avremo la forza centrifuga nel detto punto $= \frac{Mu^2}{L+l}$. Il peso, o forza DH si risolve nelle due, IH

L

che stimola il corpo per la direzione DG , e DI che lo stimola per la direzione CI . La seguente analogia determinerà il valore della forza DI .

$$\begin{aligned} CD &: DE :: DH : DI \\ L+l &: y :: M : \frac{My}{L+l} \end{aligned}$$

S' inferisca, che il corpo B è spinto per la direzione CI dalla forza $\frac{Mu^2+My}{L+l}$. Da tale forza egli è d'uopo sottrar quella,

con cui la corda resiste all' allungamento, la quale pel numero XV. dello Schediasma I. della mia Opera *Delle corde, ovvero fibre elastiche* pareggia

$$\frac{1}{2}b \cdot \frac{(L+l)}{L} - \frac{1}{2} \cdot \frac{bL}{L+l}, \text{ dinotando } b \text{ la rigidità natura-}$$

le della corda non istirata da peso alcuno, cioè a dire d'essa corda situata nella positura orizzontale CB . Sarà dunque la forza residua

$$= \frac{Mu^2+My}{L+l} - \frac{1}{2}b \cdot \frac{(L+l)}{L} + \frac{1}{2} \cdot \frac{bL}{L+l},$$

la quale dee supporfi, che agisca per lo spazio $GF = dl$. Ho detto dee supporfi; perchè la forza centrifuga $\frac{Mu^2}{L+l}$ non è at-

ta ad esercitar vera azione, che alteri lo stato del corpo, ma può solo cangiare la proporzione fra le velocità per DG , GF , senza punto mutare dal canto suo la velocità assoluta per l'arco DF della curva, alla qual condizione dee il calcolo soddisfare: sopra di che veggasi la Dissertazione intorno la *vera Origine, e Natura della Forza centrifuga* contenuta nella Raccolta di Lucca del 1763. Avremo pertanto il quadrato della velocità per la direzione CD

$$= \frac{2}{M} \int \left(\frac{Mu^2 dl + My dl}{L+l} - \frac{1}{2}b \cdot \frac{(Ldl + ldl)}{L} + \frac{1}{2} \cdot \frac{bLdl}{L+l} \right) = v^2.$$

Il quadrato u^2 della velocità per la direzione DG ha da stare al già scoperto per la direzione CD , ossia GF come $(DG)^2$

$$= dz^2 : (GF)^2 = dl^2. \text{ Avremo dunque } u^2 = \frac{2}{M} \cdot \frac{dz^2}{dl^2}.$$

$$\int \left(\frac{Mu^2 dl + My dl}{L+l} - \frac{1}{2}b \cdot \frac{(Ldl + ldl)}{L} + \frac{1}{2} \cdot \frac{bLdl}{L+l} \right),$$

e quindi la somma de' quadrati delle velocità per le dette direzioni, essendo $dz^2 + dl^2 = ds^2$, $= \frac{2}{M} \cdot \frac{ds^2}{dl^2} \cdot \int \left(\frac{Mu^2 dl + Mydl}{L+l} - \frac{1}{2} b \cdot \frac{(Ldl + ldl)}{L} + \frac{1}{2} \cdot \frac{bLdl}{L+l} \right) (1)$.

III. Non esercitandosi altra vera azione, che la positura della gravità del corpo B , la quale si è applicata allo spazio $ED = y$, e la negativa della tensione della corda CD , che ha ripetuto i suoi contrasti per gli spazietti dl , si avrà $My - \int \left(\frac{1}{2} b \cdot \frac{(Ldl + ldl)}{L} - \frac{1}{2} \cdot \frac{bLdl}{L+l} \right) = \frac{MV^2}{2}$, o sia effettuando l'indicata integrazione, $My - \frac{1}{2} b \cdot \frac{(2Ll + l^2)}{2L}$

$- \frac{1}{2} bL \cdot \log. (L+l) = \frac{MV^2}{2} \cdot (2.)$. I logaritmi si debbono prendere nella logistica della sottangente $= 1$, riferita

al protonumero $CB = L$. Non ho aggiunta costante; perchè senza tale addizione, nella posizione CB del pendolo, in riguardo a cui $y = 0$, $l = 0$, si trova rettamente $V = 0$. Ora il quadrato della velocità per DF pareggia i due quadrati delle velocità per DG , GF ; dunque per le formole (2) e (1), moltiplicando questa per $\frac{M}{2}$, scopriremo My

$$- \frac{1}{2} b \cdot \frac{(2Ll + l^2)}{2L} + \frac{1}{2} bL \cdot \log. (L+l) = \frac{ds^2}{dl^2} X$$

$$\int \left(\frac{Mu^2 dl + Mydl}{L+l} - \frac{1}{2} b \cdot \frac{(Ldl + ldl)}{L} + \frac{1}{2} \cdot \frac{bLdl}{L+l} \right), \text{ e moltiplicando per } dl^2, \text{ e prese le differenze, supposto } ds \text{ costante,}$$

$$\left(Mdy - \frac{1}{2} b \cdot \frac{(Ldl + ldl)}{L} + \frac{1}{2} \cdot \frac{bLdl}{L+l} \right) \cdot dl^2$$

$$+ \left(My - \frac{1}{2} b \cdot \frac{(2Ll + l^2)}{2L} + \frac{1}{2} bL \cdot \log. (L+l) \right) \cdot 2dl ddl$$

$$= \left(\frac{Mu^2 dl + Mydl}{L+l} - \frac{1}{2} b \cdot \frac{(Ldl + ldl)}{L} + \frac{1}{2} \frac{bLdl}{L+l} \right) \cdot ds^2.$$

Fatta la divisione per dl , e sostituendo dz^2 in cambio di

$ds^2 = dl^2$, questa equazione si riduce alla seguente $Mdydl + \left(2My - \frac{2bLl - bl^2}{2L} + bL \cdot \log.(L+l) \right) \cdot ddl \times$

$$\left(\frac{-Mu^2 - My}{L+l} \right) \cdot ds^2 + \frac{(2bLl + bl^2)}{2L^2 + 2Ll} \cdot dz^2 = 0 \quad (3.)$$

Rifletta chi legge, che per la formola (2.) $MV^2 = 2My - b \frac{(2Ll + l^2)}{2L} + bL \cdot \log. (L+l)$ dee riferirsi ad Mu^2 , come

$ds^2 : dz^2$, onde s'abbia $Mu^2 = MV^2 \cdot \frac{dz^2}{ds^2} = \left(2My - b \cdot \frac{(2Ll + l^2)}{2L} + bL \cdot \log.(L+l) \right) \frac{dz^2}{ds^2}$. Surrogato questo valore in vece di Mu^2 nella formola (3.), si trova

$$Mdydl + \left(2My - \frac{2bLl - bl^2}{2L} + bL \cdot \log.(L+l) \right) \cdot ddl \times \\ \left(\frac{-2My}{L+l} + b \cdot \frac{(2Ll + l^2)}{L^2 + Ll} - \frac{bL \cdot \log.(L+l)}{L+l} \right) dz^2 - \frac{Myds^2}{L+l} \\ = 0 \quad (4.)$$

IV. Col mezzo delle equazioni $L+l = \sqrt{(x^2 + y^2)}$, $dl = \frac{xdx + ydy}{\sqrt{(x^2 + y^2)}}$, $ddl = \frac{dx^2 + xddx + dy^2 + yddy}{\sqrt{(x^2 + y^2)}}$, $-\frac{x^2dx^2 - 2xdxdydy - y^2dy^2}{(x^2 + y^2) \cdot \sqrt{(x^2 + y^2)}} = \frac{xddx + yddy}{\sqrt{(x^2 + y^2)}}$, $+\frac{x^2dy^2 - 2xdxdydy + y^2dx^2}{(x^2 + y^2) \cdot \sqrt{(x^2 + y^2)}}$, $ds^2 = dx^2 + dy^2$, $dz^2 = \frac{x^2dy^2 - 2xdxdydy + y^2dx^2}{x^2 + y^2}$ la formola (4.) si trasformerà

$$\text{così } M \cdot \frac{(xdxdy + ydy^2)}{\sqrt{(x^2 + y^2)}} + \left(2My - b \cdot \frac{(x^2 + y^2 - L^2)}{2L} + bL \cdot \log. \sqrt{(x^2 + y^2)} \right) \cdot \frac{(xddx + yddy)}{\sqrt{(x^2 + y^2)}} \\ + \left(b \cdot \frac{(x^2 + y^2 - L^2)}{2L} \right) \cdot \frac{(x^2dy^2 - 2xdxdydy + y^2dx^2)}{(x^2 + y^2) \cdot \sqrt{(x^2 + y^2)}}$$

$$-\frac{(My \cdot (dx^2 + dy^2))}{V(x^2 + y^2)} = 0. \text{ Levata la comune divisione per } V(x^2 + y^2), \text{ la formola dopo breve calcolo prende il seguente aspetto } M \cdot (x dx dy - y dy dx) + \left(2 My - b \frac{(x^2 + y^2 - L^2)}{2L} \right. \\ \left. + b L \cdot \log. V(x^2 + y^2) \right) \cdot (x ddx + y ddy) \\ + \left(b \cdot \frac{(x^2 + y^2 - L^2)}{2L} \right) \cdot \frac{(x^2 dy^2 - 2 x dx y dy + y^2 dx^2)}{x^2 + y^2} = 0 \quad (5.)$$

Avendo luogo in questa formola differenziale del secondo grado amendue le incognite finite, e non potendo ad essa adattarsi veruno dei tre metodi insegnati dal dottissimo Signor *Leonardo Eulero* nel Tomo terzo dell' *Accademia Petropolitana*, non è nota la maniera di ridurla alle prime differenze; e quindi non riesce di dar compimento alla soluzione del nostro problema.

V. Ho nondimeno giudicato opportuno il pubblicare il metodo da me usato, acciocchè possa servire di regola nella soluzione di quei problemi, nei quali ha luogo la forza centrifuga. Nel numero III. ho già detto, che la forza vera azione, che si esercita, è $My - \frac{1}{2} b \cdot \frac{(2Ll + l^2)}{2L}$

$+ \frac{1}{2} b L \cdot \log. (L + l)$, a cui deve uguagliarsi la forza viva

$\frac{MV^2}{2}$ del corpo M . La velocità V del predetto corpo per la direzione DF si concepisce risolta nelle due, v per la direzione GF , u per la direzione DG . Nel numero II. ho determinata la forza per la direzione DI , ossia GF derivata dal peso del corpo M uguale ad $\frac{My}{L + l}$. Si aggiunga la forza

centrifuga $\frac{Mu^2}{L + l}$ per la stessa direzione, e dalla somma

$\frac{My + Mu^2}{L + l}$ si sottri la forza $\frac{1}{2} b \cdot \frac{(L + l)}{L} - \frac{1}{2} \cdot \frac{bL}{L + l}$, colla quale per la medesima direzione la corda ripugna all' allun-

L iij

gamento, e rimarrà la forza $\frac{My + Mu^2}{L+l} - \frac{1}{2} b \cdot \frac{(L+l)}{L}$
 $+ \frac{1}{2} \frac{bL}{L+l}$, a cui si dee attribuire l'azione $\frac{Mydl + Mu^2dl}{L+l}$
 $- \frac{1}{2} b \cdot \frac{(Ldl + ldl)}{L} + \frac{1}{2} \frac{bLdl}{L+l}$; adempiuta l' obbligazione di
 aggiustar le partite detraendo dall' azione della forza per la
 direzione DG l'azione $\frac{Mu^2dl}{L+l}$, che non esiste in natura; per-
 chè alla forza centrifuga non si può assegnar vera azione.

Poichè $CD = L+l : CE = x :: DH = M : HI = \frac{Mx}{L+l}$, farà
 $\frac{Mx}{L+l}$ la forza derivata dal peso M , la quale spinge il cor-
 po per la direzione DG , ed agisce per lo spazietto $DG = dz$,
 onde s'abbia l'azione $\frac{Mxdz}{L+l}$. La resistenza della corda, che
 tira per la direzione DC della corda stessa, non può eserci-
 tare alcuna reazione per la direzione DG . Si farà la dov-
 uta compensazione, se la forza viva del corpo M per la di-
 rezione DG si ponga $= \int \left(\frac{Mxdz}{L+l} - \frac{Mu^2dl}{L+l} \right) = \frac{Mu^2}{2}$. In
 tal guisa la somma delle azioni elementari per gli spazietti
 $GF = dl$, $DG = dz$ si scoprirà $= \frac{Mydl + Mu^2dl}{L+l}$
 $- \frac{1}{2} b \frac{(Ldl + ldl)}{L} + \frac{1}{2} \cdot \frac{bLdl}{L+l} + \frac{Mxdz}{L+l} - \frac{Mu^2dl}{L+l} = \frac{Mydl + Mxdz}{L+l}$
 $- \frac{1}{2} b \frac{(Ldl + ldl)}{L} + \frac{1}{2} \cdot \frac{bLdl}{L+l}$, la quale s' eguaglia alla vera
 azione, che in natura si esercita $= Mdy - \frac{1}{2} b \cdot \frac{(Ldl + ldl)}{L}$
 $+ \frac{1}{2} \cdot \frac{bLdl}{L+l}$. Ed in fatti $\frac{Mydl + Mxdz}{L+l} = Mdy$. Sostituiti in
 vece di dl , dz i loro valori registrati nel numero IV. tro-
 veremo $My \cdot \frac{(xdx + ydy)}{x^2 + y^2} + Mx \cdot \frac{(xdy - ydx)}{x^2 + y^2}$

$$= \frac{Myxdx + My^2dy + Mx^2dy - Myxdx}{x^2 + y^2} = Mdy, \text{ come si doveva}$$

dimostrare. Avremo pertanto una nuova espressione di $\frac{Mu^2}{2} = \int \left(\frac{Mxdz}{L+l} - \frac{Mu^2dl}{L+l} \right)$ che ci somministra le sottoscritte conseguenze.

$$\begin{aligned} \frac{Mv^2}{2} &= \int \frac{(Mydl)}{L+l} - \frac{1}{2} b \cdot \frac{(2Ll+l^2)}{2L} + \frac{1}{2} bL \cdot \log.(L+l), \quad \frac{Mu^2}{2} \\ &= \int \frac{(Mxdz)}{L+l}, \text{ e la loro somma} = \frac{Mv^2}{2} + \frac{Mu^2}{2} = \frac{MV^2}{2} \\ &= My - \frac{1}{2} b \cdot \frac{(2Ll+l^2)}{2L} + \frac{1}{2} bL \cdot \log.(L+l), \text{ avendo poco fa} \end{aligned}$$

$$\text{dimostrato } \frac{Mydl}{L+l} + \frac{Mxdz}{L+l} = Mdy, \text{ e perciò } \int \frac{Mydl}{L+l} + \int \frac{Mxdz}{L+l} = My.$$

Computata la forza centrifuga, cresce la velocità v , e cala la u colla legge che sia $\frac{Mv^2}{2} + \frac{Mu^2}{2} = \frac{MV^2}{2} = My - \frac{1}{2} b \cdot \frac{(2Ll+l^2)}{2L} + \frac{1}{2} bL \cdot \log.(L+l)$; dimodo-
chè tanto s' aumenti $\frac{Mv^2}{2}$ quanto scema $\frac{Mu^2}{2}$ per la

$\int \frac{Mu^2dl}{L+l}$. Credo che quanto ho scritto sia sufficiente per mettere in chiaro lume la maniera, con cui deggionfi maneggiar quei problemi, nei quali c' entra la forza centrifuga.

VII. Se non s' ottiene la costruzione della curva $B DFA$, ci è non pertanto permesso di scoprire il massimo allungamento della corda corrispondente alla positura CA , quando le due linee $ED=y$, $CD=L+l$ coincidono, onde s' abbia $y=L+l$. Ho determinato nel numero II. la forza, che allunga la corda

$$= \frac{Mu^2 + My}{L+l} - \frac{1}{2} b \cdot \frac{(L+l)}{L} + \frac{1}{2} \cdot \frac{bL}{L+l}$$

$$= \frac{Mu^2 + My}{L+l} - \frac{2bLl - bl^2}{2L \cdot (L+l)}.$$
 Qualora l'allungamento sia giunto al massimo, questa forza dee pareggiare il nulla, e per conseguenza $Mu^2 = \frac{2bLl + bl^2}{2L} - My$: dunque Mu^2

$$= \frac{2bLl + bl^2}{2L} - M \cdot (L+l).$$
 La velocità u normale alla direzione della corda s' eguaglia nella mentovata circostanza alla velocità assoluta V del corpo B , ed essendo generalmente $MV^2 = 2My - \frac{2bLl - bl^2}{2L} + bL \cdot \log. (L+l)$, e nella ipotesi

di $y = L+l$, $MV^2 = 2M \cdot (L+l) - \frac{2bLl - bl^2}{2L} + bL \cdot \log. (L+l)$

avremo $2M \cdot (L+l) - \frac{2bLl - bl^2}{2L} + bL \cdot \log. (L+l)$

$$= \frac{2bLl + bl^2}{2L} - M \cdot (L+l),$$
 e perciò $\log. (L+l) = \frac{2Ll + l^2}{L^2}$

$$- \frac{3M \cdot (L+l)}{bL} \quad (6.).$$
 Formo due equazioni $\log. (L+l)$

$$= p(7.), \quad \frac{2Ll + l^2}{L^2} - \frac{3M \cdot (L+l)}{bL} = q(8.)$$
 e quest' ultima si

riduce alla seguente
$$\left(L+l - \frac{3LM}{2b} \right)^2 = L^2 \cdot \left(1 + \frac{9M^2}{4b^2} \right).$$

$+ q(9.).$

VIII. All' asse BI (*Fig. 2.*), col parametro L^2 delinea la parabola $BDEA$, in cui all' ascissa $BI = 1 + \frac{9M^2}{4b^2} + q$ corrisponderà l' ordinata $IA = L+l - \frac{3LM}{2b}$.

Continuata AI

fino in C , dimodochè sia $CI = \frac{3LM}{2b}$, ne risulterà CA

$= L+l$. Pel punto C si tiri CK parallela ad IB , e segnata

$BF = 1$, a cui si riferisce $FD = L$, $FG = \frac{9M^2}{4b^2}$, sarà GI o

$LC = q$.

Faccio

Faccio $LH = FD = L$, ed all'assintoto KC descrivo la logaritmica MHA della suttangente $BF = 1$, che passi pel punto H , il cui protonumero $LH = L$. Essendo $LH < LE$, la logaritmica taglierà la parabola in un punto A , per cui si conduca l'ordinata AC . Giusto l'equazione (7.) $\log.(L+l) = p$, avremo $LC = p$, $CA = L+l$: ma per l'equazione (8.) $\frac{2Ll+l^2}{L^2} - \frac{3M.(L+l)}{bL} = q$, $LC = q$, $CA = L+l$; dunque rispettivamente al punto A , $p = q$, e per conseguenza si avvera l'equazione (6.) $\log.(L+l) = \frac{2Ll+l^2}{L^2} - \frac{3M.(L+l)}{bL}$, e $CA = L+l$ è la massima lunghezza, a cui perviene (Fig. 1.) il filo del pendolo CB , quando è giunto nel sito verticale CA .

IX. Se la rigidità naturale b della corda, che ad essa compete prima che si cominci ad allungare, sia infinitamente picciola, diverrà infinita la linea (Fig. 2.) $LG = \frac{3LM}{2b}$.

Lo stesso valore adeguatamente competerà anche all'ordinata GE della parabola, la quale s'eguaglia ad

$$L. V\left(1 + \frac{9M^2}{4b^2}\right) = \frac{3LM}{2b} + \frac{Lb}{3M} = \frac{3LM}{2b}, \text{ e perciò } LE = \frac{3LM}{b}.$$

Quindi il punto H distarà infinitamente dal punto E , e la logistica MHA taglierà la parabola $BDEA$ in un punto A immensamente lontano dal punto E ; di maniera che se LE è infinita, tanto più riuscirà infinita $CA = L+l$. Postochè fosse $b = 0$, il filo CB (Fig. 1.) non farebbe alcuna resistenza, ed il corpo B discenderebbe per la linea del piombo BO , nè per quanto si allungasse il filo benchè infinitamente, potrebbe mai giungere, se non per adeguazione, nella positura CA . Che se suppongasi b infinitesima, il pendolo perverrà nel sito CA , ma dopo un allungamento infinito.

X. Passo all'ipotesi contraria, e fingo infinita la naturale rigidità b . In tale circostanza diviene minima (Fig. 2.) la

linea $LG = \frac{3LM}{2b}$, ed immensamente ancora più picciola la

linea $FG = \frac{9M^2}{4b^2}$. S'adeguano dunque le due ordinate FD ,

GE , ed altresì le due linee $LG = LH - GH$, $HE = GE - GH$, laonde il punto H è infinitamente prossimo al punto E della parabola. S' inferisca, che ancora il punto A , in cui le due curve s'intersecano, farà vicinissimo al punto E , e perciò $CA = L + l$ supererà infinitamente poco $LH = L$. Presa

per mano la formola (6.) $\log. (L+l) = \frac{2L+l^2}{L^2}$

$- \frac{3M \cdot (L+l)}{bL}$, e fatta la riflessione essere nella presente sup-

posizione $\log. (L+l) = \frac{l}{L}$, ed l^2 trascurabile rispettivamente

ad l , troveremo $bl = 2bl - 3M \cdot (L+l)$, e conseguente-

mente $\frac{3ML}{b-3M} = l$, o sia per adeguazione $\frac{3LM}{b} = l$: ma HE

$= LG = \frac{3LM}{2b}$; dunque tirata HN parallela a BI , ne risulta

$NA = l = 2HE$.

Nello Schediasma I. della citata mia Opera ho fatto vedere quanto sia grande la rigidità naturale b nelle corde di metallo. La rigidità naturale corrispondente al peso di due libbre, che stirava una corda da me usata in alcune sperienze

riferite nel numero XVIII. ascendeva a libbre $1134 \frac{7}{13}$.

Supponiamo, che la rigidità naturale della corda del pendolo nel sito orizzontale CB (Fig. 1.) si eguagli a libbre 1201,

e sia $M = \frac{1}{3}$, $L =$ once 12 = linee 144, e facendo uso

della formola $l = \frac{3ML}{b-3M}$ competente all'ipotesi di b infinita,

si troverà il massimo allungamento

$$l = \frac{144}{1201-1} = \frac{12}{100} = \frac{3}{25} \text{ di linea.}$$

XI. Volendo dedurre la misura della distensione l dalla formula (6.) $\log. (L+l) = \frac{2Ll+l^2}{L^2} - \frac{3M \cdot (L+l)}{bL}$, egli è d'uopo ricorrere all'attentazione. Per servirsi dei logaritmi delle tavole, si rifletta, che nella logistica della suttangente $= 1$, $\log. (L+l)$ riferito al protonumero L si eguaglia a $\log. \frac{(L+l)}{L}$ riferito al protonumero $= 1$. Ora la logaritmica delle tavole ha il logaritmo del numero $10 = 1$, e nella logistica della suttangente $= 1$ il logaritmo del predetto numero è $= 2,3025851$. Rispettivamente al medesimo protonumero i logaritmi dello stesso numero stanno come quelli d'un numero dato. Prendendo adunque $\log. \frac{(L+l)}{L}$ nelle

tavole, si faccia $1 : 2,3025851 :: \log. \frac{(L+l)}{L} : 2,3025851 \cdot \log. \frac{(L+l)}{L}$, ed il quarto termine pareggerà nella

logistica della suttangente $= 1 \log. \frac{(L+l)}{L}$ riferito al protonumero $= 1$, e conseguentemente $\log. (L+l)$ riferito al protonumero L . Quindi valendoci dei logaritmi delle tavole avremo $2,3025851 \log. \frac{(L+l)}{L} = \frac{2Ll+l^2}{L^2} - \frac{3M \cdot (L+l)}{bL}$, formula, che si riduce alla seguente

$$LV \left(2,3025851 \cdot \log. \frac{(L+l)}{L} + 1 + \frac{9M^2}{4b^2} \right) + \frac{3ML}{2b} = L+l \quad (10.)$$

Si assegni ad $L+l$ un valore più prossimo al vero che sia possibile, deducendolo o dalla costruzione delineata diligentemente, e con fisica esattezza, o come nell'esempio addotto, quando la rigidità b è assai grande, dalla formula $l = \frac{3ML}{b-3M}$. Nel nostro esempio adunque si ponga $L+l$

$$= 144,12, \text{ onde s'abbia } \frac{L+l}{L} = \frac{144,12}{14400} = \frac{1201}{1200},$$

M ij

e $\log. \frac{1201}{1200} = 0,0003620$. Sostituiti nella formola (10.)

in vece di $\log. \frac{(L+l)}{L}$, di L , di M , e di b gli stabiliti valori, si troverà dopo i necessarij calcoli 144, 119964 $= L+l$, valore adeguatamente uguale al supposto, consistendo la differenza nella minuzia 0,000036. Qui non c'è bisogno di passare ad altre operazioni, perchè abbiamo determinato il valore di $L+l$ sommamente prossimo al vero. Per altro il trovare $L+l$ minore del valore supposto significa, che il detto valore ipotetico è più grande del giusto.

XII. Se la prima positura CP (Fig. 2.) del pendolo fosse inclinata all'orizzonte, si tirino PM , CB orizzontali, e PB verticale, e ritenute l'altre denominazioni, si chiami $CP = L$, $CM = a$. Nel sito CP il filo sarà stirato dalla forza $\frac{aM}{L}$, e perciò a questa forza tendente dovrà corrispondere la

rigidità naturale b . Giunto il pendolo in CD , sarà la corda stirata dalla forza $\frac{Mu^2 + My}{L+l}$, a cui pel numero XV. del-

lo Schediasma I. della mentovata mia Opera farà contrasto la forza $\left(\frac{1}{2} b + \frac{aM}{L} \right) \cdot \frac{(L+l)}{L} - \frac{1}{2} b \cdot \frac{L}{L+l}$. Avremo

$$\text{dunque la forza residua} = \frac{Mu^2 + My}{L+l} \left(-\frac{1}{2} b - \frac{aM}{L} \right) \cdot \frac{(L+l)}{L} + \frac{1}{2} b \cdot \frac{L}{L+l} \quad (11.)$$

Il corpo B nel punto D verrà animato dalla forza viva $\frac{MV^2}{2} = My - Ma - \int \left(\left(\frac{1}{2} b + \frac{aM}{L} \right) \cdot \frac{(Ldl + ldl)}{L} \right.$

$$\left. - \frac{1}{2} b \cdot \frac{Ldl}{L+l} \right) = My - Ma \left(-\frac{1}{2} b - \frac{aM}{L} \right) \cdot \frac{(2Ll + l^2)}{2L} + \frac{1}{2} b L \cdot \log. (L+l), \text{prendendo i logaritmi nella logistica della suttangente} = 1, \text{riferita al protonumero } CP = L. \text{ Ora nel punto } A, u = V, y = L+l,$$

e la forza allungante la corda esser dee = 0 ; dunque sostituendo nella formola (11.) in luogo di $u^2 = V^2$, e di y i loro valori, scopriremo

$$\frac{2M \cdot (L+l) - 2Ma - \left(b + \frac{2aM}{L}\right) \cdot \left(\frac{2Ll+l^2}{2L}\right) + bL \cdot \log.(L+l)}{L+l}$$

+ $M - \left(\frac{1}{2}b + \frac{aM}{L}\right) \cdot \frac{(L+l)}{L} + \frac{\frac{1}{2}bL}{L+l} = 0$ (12.), la qual formola si riduce alla seguente

$$\sqrt{\left(\frac{bL^3 \cdot \log.(L+l) + bL^3 - aML^2}{bL + 2aM} + \frac{\frac{1}{2}M^2L^4}{(bL + 2aM)^2}\right) + \frac{\frac{1}{2}ML^2}{bL + 2aM}}$$

$$= L+l \text{ (13.) e volendo far uso dei logaritmi delle tavole,}$$

$$\sqrt{\left(\frac{2,3025851bL^3 \cdot \log.\frac{(L+l)}{L} + bL^3 - aML^2}{bL + 2aM} + \frac{\frac{1}{2}M^2L^4}{(bL + 2aM)^2}\right)}$$

+ $\frac{\frac{1}{2}ML^2}{bL + 2aM} = L+l$ (14.). Col mezzo di questa equazione si troverà la massima lunghezza $L+l = CA$ della corda, ponendo in opera il metodo dell'attentazione.

XIII. La formola (12.) si può costruire collo stesso artificio usato rispettivamente alla formola (6.). La mentovata formola (12.) si trasforma così $\log.(L+l)$

$$= \frac{(bL + 2aM)}{bL^3} \cdot (2Ll + l^2) - \frac{3M}{bL} \cdot (L+l) + \frac{3aM}{bL} \cdot \text{Faccio}$$

$$\log.(L+l) = p \text{ (15.)}, \frac{(bL + 2aM)}{bL^3} \cdot (2Ll + l^2) - \frac{3M}{bL} \cdot (L+l)$$

$$+ \frac{3Ma}{bL} = q \text{ (16.)}. \text{L'ultima equazione dopo varie operazioni}$$

$$\text{prende il sottoposto aspetto } \left(L+l - \frac{3}{2} \cdot \frac{ML}{b}\right)^2$$

$$= \frac{bL^3}{bL + 2aM} \cdot \left(\frac{9M^2L}{4b \cdot (bL + 2aM)} - \frac{aM}{bL} + 1 + q\right), \text{ e si costruisce nella seguente maniera.}$$

All' asse BI (Fig. 2.) col parametro $\frac{bL^3}{bL + 2aM}$ delineo la

M jii

parabola $BDEA$, le cui ascisse $BI = \frac{9M^2L}{4b \cdot (bL+2aM)} - \frac{aM}{bL}$
 $+ 1 + q$, e le ordinate $IA = L + l - \frac{3ML}{2b}$. Aggiunta
 all'ordinata IA la linea $CI = \frac{3ML}{2b}$, ne risulta $CA = L + l$.
 Taglio poscia $BG = \frac{9M^2L}{4b \cdot (bL+2aM)} - \frac{aM}{bL} + 1$, e resta
 $GI = LC = q$.

Segnata $LH = L$, che prendo in figura di protonumero, all' asintoto CK descrivo la logaritmica AHM della tangente $= 1$, le cui coordinate $LC = p$, $CA = L + l$. S'intersechino la parabola, e la logistica nel punto A , e giacchè rispettivamente ad esso punto, q , e p hanno lo stesso valore, ed altresì è comune l'ordinata $CA = L + l$, avremo log.
 $(L + l) = \frac{(bL+2aM)}{bL^3} \cdot (2Ll + l^2) - \frac{3M \cdot (L + l) + 3aM}{bL}$, qual-
 mente richiede l'equazione (12.), e perciò CA sarà la massima lunghezza, a cui perviene la corda, mentre il pendolo oscilla.

XIV. L' allungamento l può esser minimo, o perchè sia infinita la naturale rigidità b della corda, relativa alla forza stirante $\frac{aM}{L}$, o perchè sia infinitesimo l' angolo (*Fig. 3.*)

ACP . In ambo le circostanze si avrà log. $(L + l) = \frac{l}{L}$, e riuscirà trascurabile la quantità rispettivamente nulla l^2 . Scopriremo pertanto, ridotto il computo $\frac{3ML \cdot (L - a)}{bL + 4aM - 3ML} = l$ (17.)

Sia infinitamente grande la rigidità b , e cancellati nel denominatore i termini minimi in riguardo ad bL , avremo $\frac{3M \cdot (L - a)}{b} = l$.

Se stando dentro i limiti del finito la rigidità b fosse infinitesimo l'angolo ACP , e per conseguenza minima la tangente $MP = b$ dell' arco MQ descritto col raggio $CM = a$,

Fig. 2.

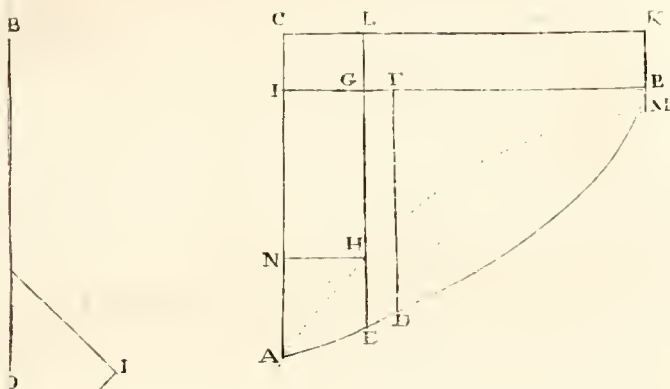


Fig. 3.

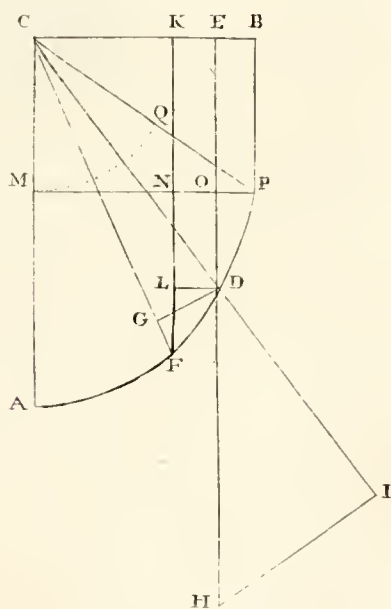


Fig. 1.

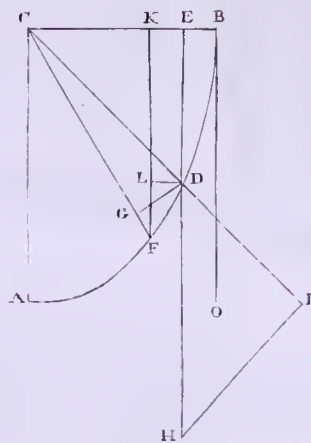


Fig. 2.

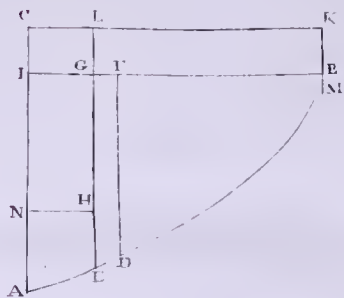
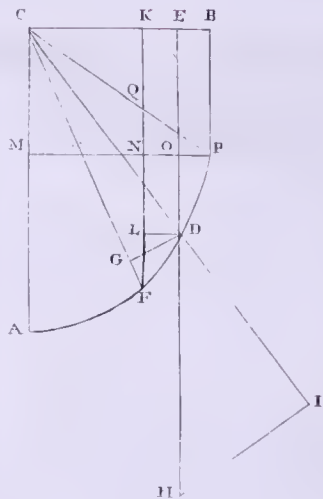
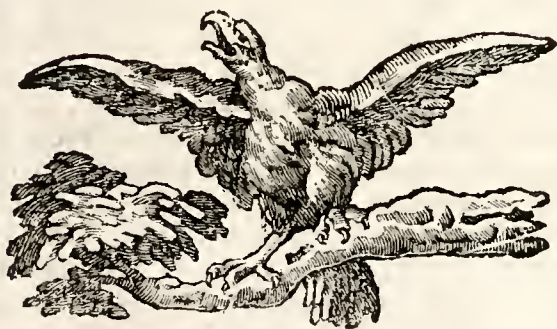


Fig. 3.



onde ne risulti $Q P = L - a$, si avrebbe $L^2 - a^2 = b^2$, o sia
 $L - a = \frac{b^2}{L + a}$; e giacchè adeguatamente $a = L$, ne risulterebbe
 $L - a = \frac{b^2}{2L}$. Nel numeratore della formola (17.) si ponga
 in cambio di $L - a$ il suo valore $\frac{b^2}{2L}$, e nel denominatore
 si collochi $4ML$ in vece di $4aM$, e ci si presenterà

$$\frac{3Mb^2}{2bL + 2ML} = l.$$



DELLA FORZA VIVA DI ALCUNI CORPI

Che ruzzolano sopra un Piano orizzontale , o pure girano intorno ad un Asse verticale , movendosi ancora , se così piace , per una direzione orizzontale .

DEL MEDESIMO.

I. **S**E ad una sfera, che posa sopra un piano orizzontale, si dia un impulso, tutte le sue particole non si muovono colla stessa velocità per una direzione parallela ad esso piano, ma la resistenza, che patisce il punto del contatto, fa sì, che la sfera ruzzoli lungo il piano medesimo. Se il punto del contatto non acquista velocità orizzontale, la sfera si rotola semplicemente; e quando un dato punto, che toccava il piano, ritorna al contatto, il centro della sfera ha corso uno spazio eguale alla circonferenza della sfera medesima. Ma se il punto del contatto per opera dell'urto concepisce qualche velocità orizzontale, nel tempo, in cui esso punto dopo un'intera rivoluzione tocca nuovamente il piano, il centro della sfera ha passato uno spazio maggiore della circonferenza del circolo massimo della sfera stessa, ed in questo caso il moto della sfera è più che di rotazione, eguagliandosi ad un moto di rotazione accresciuto di una velocità orizzontale comune alla sfera intera. Il movimento della sfera farebbe meno che di rotazione, se mentre ruzzola sopra il piano, retrocedesse con una data velocità orizzontale. Sembrami molto importante il determinare la forza viva di questi corpi che ruzzolano, per sapere qual impulso ad essi si debba imprimere, acciocchè di una conosciuta forza viva facciano acquisto, ed il centro per esempio d'una sfera si muova con una nota velocità. Vogliasi che la sfera *A* (*Fig. 1.*) elastica rotoli sopra il piano orizzontale *AG*, e se saprò la misura della sua forza viva, potrò agevolmente determinare l'altezza *DB*, da cui per guadagnare la detta forza viva dee discendere la sfera uguale,

le, ed elastica *B*, la quale dopo l'urto restando immobile, comunichi tutta la sua forza alla palla *A*.

II. I problemi più semplici mi fanno strada ai più composti. Comincio adunque dal determinare la forza viva d'una circonferenza circolare, e per conseguenza anche d'una superficie cilindrica, che rotola sopra un piano orizzontale. Stabilisco poscia la forza viva d'una circonferenza circolare, che ruzzola sopra un piano orizzontale, ed ha di più una velocità orizzontale o cospirante, o contraria alla direzione del ruotamento. M' inoltro a trovare la forza viva d'un circolo, e conseguentemente ancora d'un cilindro, che rotola sopra un piano orizzontale, considerando i due casi, che sia privo, o sia fornito di velocità orizzontale positiva, o negativa. Dopo ciò considero una linea composta in riguardo all'asse verticale di due rami simili, ed uguali, uno a destra, l'altro a sinistra, che girandosi intorno ad un asse orizzontale, generi una superficie, e supposto che questa si rotoli sopra un piano orizzontale, coll'aggiunta altresì, se così piace, d'una velocità orizzontale, la cui direzione sia normale all'asse predetto, vado in traccia della sua forza viva. Finalmente se la superficie ferrata dalla nominata linea, e dall'asse orizzontale giri intorno il detto asse, e generi un corpo, il quale si rotoli sopra un piano orizzontale, e sia, o non sia fornito d'una velocità orizzontale normale all'asse mentovato, io cerco anche di questo corpo la forza viva.

III. Ella è non poco profittevole la riflessione, che il moto di rotazione d'una circonferenza, d'una superficie, d'un corpo è lo stesso che quello di un determinato giramento intorno all'asse orizzontale, il quale cammini orizzontalmente con quella stessa velocità, ond' era dotato nel moto di rotazione. Quindi in ambo gl'incontri la forza viva avrà il medesimo valore, e perciò come per corollario si deduce la forza viva d'una trottola, che giri intorno all'asse verticale, e viaggi lungo una linea segnata nel piano orizzontale con una data velocità.

So benissimo, che si potrebbe far transito a problemi molto più complicati; ma io mi contento di dare presentemente a chi legge questi, che chiamerò elementi del moto di rotazione.

La circonferenza circolare ADBH (Fig. 2.) ruotoli sopra il piano orizzontale AG, e sia nota la velocità del centro C: si dimanda la forza viva della detta circonferenza, e per conseguenza ancora d'una superficie cilindrica, la cui base ADBHA.

IV. Sia $AC = a$, $AI = x$, $ID = y$, $AD = z$, $AMD = s$, $DE = ds$, e si chiami u la velocità del punto C, ed f la forza viva dell'arco AMD . Quando il punto del contatto si è trasferito da A fino in K per lo spazio $AK = DE = ds$, ed il centro C si è mosso orizzontalmente per lo spazio eguale Cc , è seguito un moto equivalente a quello di giramento intorno al punto A . In fatti egli è noto, che il punto D descrive la cicloide NDD , e che la linea AN s'eguaglia all'arco $AMD = s$, e perciò ritenute le denominazioni di $AI = OD = x$, di $ID = AO = y$, avremo $NO = s - y$, e conseguentemente $DL = ds - dy$.

Ora $ds = \frac{adx}{\sqrt{2ax-x^2}}$, $dy = \frac{adx - xdx}{\sqrt{2ax-x^2}}$; dunque $DL = ds - dy = \frac{x dx}{\sqrt{2ax-x^2}}$. Essendo $Ld = dx$, scopriremo essere

$DL : Ld :: x : \sqrt{2ax-x^2} = y$: ma anche quando si descrive l'arco Dd col raggio AD , la similitudine dei triangoli DLd , AID mi somministra la stessa analogia $DL : Ld :: AI = x : ID = y$; dunque l'archetto circolare Dd si confonde col cicloidale Dd , e rettamente si può supporre, che il punto D descrivendo l'archetto Dd si giri intorno il punto A ; il che &c. Avremo dunque $AC : AD :: Cc : Dd$: ma gli spazj Cc , Dd stanno come le velocità dei punti C , D ; dunque $AC = a : AD = z :: u : \frac{uz}{a}$, che sarà la velocità del punto D .

La forza viva dell'elemento $DE = ds$ si eguaglia alla massa ds del detto elemento moltiplicata nel semiquadrato della velocità del punto D ; dunque siamo pervenuti all'e-

quazione $\frac{u^2 z^2 ds}{2a^2} = df$: ma $z^2 = 2ax$, $ds = \frac{adx}{\sqrt{2ax-x^2}}$; dunque adempiute le sostituzioni, e le operazioni convenienti, $u^2 \cdot \frac{x dx}{\sqrt{2ax-x^2}} = df$, o sia $u^2 \cdot \frac{adx-adx+xdx}{\sqrt{2ax-x^2}} = df$, e passando all' integrazione, $u^2 \cdot s - \sqrt{2ax-x^2} = f$. Non aggiungo costante; perchè all' arco $AMD = s = 0$ ci corrisponde $AI = x = 0$, e com'è di dovere $f = 0$. Ora quando $s = ADBHA$, $x = 0$; dunque in tale incontro la forza viva di tutta la circonferenza, cioè $f = u^2 s$.

V. Se l' intera circonferenza circolare si movesse colla velocità u , farebbe la sua forza viva $= \frac{u^2 s}{2}$ la metà di quella della stessa circonferenza, che ruzzola colla legge, che il centro C si muova colla velocità u .

Che se tutta la circonferenza si movesse colla velocità $u\sqrt{2}$, si scoprirebbe fornita della forza viva $u^2 s$ eguale a quella della circonferenza, che ruzzola colla legge predetta.

La circonferenza $ADBHA$ molle, e non elastica venga spinta contro il piano AG per la direzione DA . La sua velocità si risolverà nelle due IA , che si consuma nell' urto, ed ID parallela al piano AG . Sia tale la frizione della circonferenza col piano, che il punto A perda tutto il suo moto; ed accaderà, che se la velocità della circonferenza parallela al piano era prima dell' urto $= u\sqrt{2}$; dovendosi fare il giro intorno al punto A , la velocità di qualsivoglia punto D diverrà proporzionale alla distanza AD , serbata la legge, che si conservi nella totale circonferenza la forza viva $u^2 s$, e perciò qualsiasi punto si moverà colla velocità

$\frac{u z}{a} = \frac{u\sqrt{2x}}{\sqrt{a}}$, il centro C colla velocità u , ed il punto B colla velocità $2u$.

Quindi urtando la circonferenza nel piano, ed estingendosi tutta la velocità del punto A , la velocità orizzontale

del punto B si accrescerà in ragione di $u\sqrt{2} : 2u$, o sia di $1 : \sqrt{2}$.

Il circolo AFBHA (Fig. 3.) ruotoli sopra il piano orizzontale AG, e sia nota la velocità del centro C: si dimanda la forza viva della circonferenza concentrica KDLNK.

VI. Sia $AC=a$, $KC=b$, $AK=BL=c$, $KI=x$, $ID=y$, $AD=z$, $KMD=s$, $DE=ds$, e si nomini u la velocità del centro C , ed f la forza viva dell'arco KMD . Facendosi per le cose dette al num. IV. il movimento intorno al punto A , farà la velocità del punto $D = \frac{uz}{a}$, e la forza viva dell'elemento $DE=ds$ si troverà $=df = \frac{u^2 z^2 ds}{2a^2}$. Si rifletta essere $z^2 = c^2 + 2cx + x^2 + y^2$, e giacchè $y^2 = 2bx - x^2$, $z^2 = c^2 + \overline{2c+2b} \cdot x$: ma $2c+2b = 2a$; dunque $z^2 = c^2 + 2ax$. Abbiamo inoltre ds

$$\frac{bdx}{\sqrt{2bx-x^2}}, \text{ e perciò } df = \frac{u^2 \cdot (c^2 bdx + 2abx dx)}{2a^2 \sqrt{2bx-x^2}}$$

$$= \frac{u^2}{2a^2} \frac{(c^2 bdx + 2ab^2 dx)}{\sqrt{2bx-x^2}} - \frac{u^2}{2a^2} \frac{(2ab^2 dx - 2abx dx)}{\sqrt{2bx-x^2}}$$

$$= \frac{u^2}{2a^2} \cdot (c^2 + 2ab) \cdot \frac{bdx}{\sqrt{2bx-x^2}} - \frac{u^2}{2a^2} \cdot 2ab \cdot \frac{(bdx - x dx)}{\sqrt{2bx-x^2}}.$$

Effettuata l'integrazione, troveremo $f = \frac{u^2}{2a^2} \cdot (c^2 + 2ab) \cdot s - \frac{u^2}{2a^2} \cdot 2ab \sqrt{2bx-x^2}$. Non si aggiunge costante, perchè ad $s=0$ si riferisce $f=0$.

Suppongasì $s=KDLNK$, ed essendo in tal caso $x=0$, ne risulterà $f = \frac{u^2}{2a^2} \cdot (c^2 + 2ab) \cdot s$, ch'è il valore della forza viva cercata.

VII. Se l'intera circonferenza $KDLNK$ si movesse colla

velocità u , farebbe la sua forza viva $= \frac{u^2 s}{2}$ e corrisponderebbe a quella della nostra circonferenza, che si gira al ruzzolare del circolo $AFBHA$, come $\frac{u^2 s}{2} : \frac{u^2 s}{2} \cdot \frac{(c^2 + 2ab)}{a^2}$, cioè a dire come $a^2 : c^2 + 2ab = a^2 + b^2$.

VIII. Si può anche concepire, che la nostra circonferenza $KDLNK$ si giri intorno al punto K , onde il punto D si mova con una velocità di giramento proporzionale a KD , e di più tutta la circonferenza cammini con una velocità orizzontale proporzionale ad AK . In fatti se le due velocità avessero le direzioni KD , AK , comporrebbero la velocità per la direzione AD ad essa linea proporzionale: e nella stessa guisa sendo le loro direzioni normali nei punti D , K alle linee KD , AK producono la velocità relativa ad AD , e normale nel punto D alla linea medesima. La prima velocità si eguaglierà ad $\frac{u \cdot KD}{a} = \frac{u \sqrt{2bx}}{a}$, e la seconda

ad $\frac{uc}{a}$, e di queste due velocità si compone la velocità

$\frac{u \sqrt{c^2 + 2ax}}{a}$ di giramento intorno al punto A .

Quindi la circonferenza $KDLNK$ rispettivamente al piano orizzontale KO ruzzola, ed inoltre cammina colla comune celerità $\frac{uc}{a}$.

IX. Fingasi, che la molle circonferenza $KDLNK$ urti nel piano KO colla direzione DK . La velocità DK si risolverà nelle due IK , DI , e consumandosi quella nell'urto, resterà ad essa circonferenza la forza viva $\frac{su^2 \cdot (c^2 + 2ab)}{2a^2}$, postochè la velocità orizzontale DI prima dell'urto fosse

$$= \frac{u \sqrt{c^2 + 2ab}}{a} = \frac{u \sqrt{a^2 + b^2}}{a}.$$

Rimanga al punto K dopo l'urto la velocità orizzontale

$\frac{uc}{a}$ ed interverrà che il punto qualunque D della nostra circonferenza si moverà intorno il punto K colla velocità $\frac{u\sqrt{2bx}}{a}$ ed intorno il punto A colla velocità $\frac{u\sqrt{2ax+c^2}}{a}$, conservandosi la forza viva $f = \frac{u^2}{2a^2} \cdot (c^2+2ab) \cdot s$ nella circonferenza $KDLNK$.

Si osservi che prima dell'urto il punto L veniva animato dalla velocità orizzontale $\frac{u\sqrt{c^2+2ab}}{a}$, e dopo l'urto è

fornito della velocità $\frac{u\sqrt{c^2+4ab}}{a} = u \cdot \frac{(a+b)}{a}$, e perciò le

dette velocità stanno come $\sqrt{c^2+2ab} : \sqrt{c^2+4ab}$, e la seconda è maggiore della prima.

Al contrario la velocità orizzontale del punto K avanti l'urto era $\frac{u\sqrt{c^2+2ab}}{a}$ e dopo l'urto si è ridotta ad $\frac{uc}{a}$, di modo che le dette velocità si riferiscono nella proporzione

di $\sqrt{c^2+2ab} : c$, o sia di $\sqrt{a^2+b^2} : a-b$, e per conseguenza il punto K dopo l'urto si move più tardo di prima.

X. Se il circolo $KDLNK$ (Fig. 4.) fosse maggiore dell' $AFBHA$, che ruzzola sopra il piano orizzontale AG , si troverebbe nulladimeno la forza viva dell'arco KMD , cioè $f = \frac{u^2}{2a^2} \cdot (c^2+2ab) \cdot s - \frac{u^2}{2a^2} \cdot 2ab \sqrt{2bx-x^2}$, e la forza viva dell'intera circonferenza $KDLNK$ $f = \frac{u^2}{2a^2} \cdot (c^2+2ab) \cdot s$.

XI. Possiamo altresì immaginarci, che la nostra circonferenza ruzzolando sopra il piano orizzontale KO si giri intorno al punto K , di modo che il punto D si mova con

una velocità di giramento proporzionale a KD , ed in oltre tutta la circonferenza viaggi da K verso P colla velocità orizzontale proporzionale ad AK . La prima velocità pareggerà la grandezza $\frac{u\sqrt{2bx}}{a}$, e la seconda sarà $= \frac{uc}{a}$, e di

queste due velocità si compone la terza $\frac{u\sqrt{c^2+2ax}}{a}$ di ver-

tigine intorno il punto A .

XII. Posto che $AC=a$ sia minima, ne risulta $AK=CD$: ma il punto C si move da C verso H colla velocità orizzontale proporzionale a $KA=KC$, e con una pari velocità la circonferenza $KDLNK$, e conseguentemente anche il centro C viaggia per direzione contraria da C verso E ; dunque esso centro sta in quiete, e perciò la circonferenza $KDLNK$ gira intorno il centro C .

Quindi se la detta circonferenza gira intorno al centro C con velocità proporzionale a CK , e nello stesso tempo viaggia orizzontalmente con pari velocità da K verso O , segue in essa il medesimo movimento, come se ruzzolasse sopra il piano KO , ritenendo il centro la stessa velocità, e nell'uno e nell'altro incontro è fornita di egual forza viva.

XIII. Che se è finita la linea AC , concepisce la circonferenza $KDLNK$ la stessa velocità negli stessi punti, e la medesima forza viva o ruzzoli sopra il piano KO con velocità in ragione delle distanze dal punto K , retrocedendo in oltre colla velocità proporzionale ad AK , o si giri intorno al centro C con velocità relativa a CK , e proceda altresì per la direzione KO con velocità in ragione di AC . Nella prima circostanza sappiamo, che il punto D gira intorno il punto A con velocità in ragione di AD : ora egli è d'uopo provare, che lo stesso succede ancora nella circostanza seconda.

Segno DQ normale, ed uguale a CD , DS normale ed uguale ad AD , e congiunti i punti S , Q colla retta SQ , tiro ST parallela a QD , e DR normale ad SQ .

Essendo retti i due angoli CDQ , ADS , levato il comune CDS , resta SDQ uguale all' ADC , e perciò SQ

$\equiv AC$, ed i due triangoli SDQ , ADC sono uguali. Quindi a cagione degli angoli in R , I retti, l'angolo $QDR = CDI$, e perciò levato il primo dall'angolo retto CDQ , ed aggiunto il secondo, ne proviene l'angolo IDR retto; e sendo altresì retto l'angolo SRD , le linee SQ , TD sono parallele ed uguali, e conseguentemente $DT = AC$.

La velocità perpendicolare a CD del punto D intorno al punto C si esprima per DQ normale, ed uguale a CD , e la velocità orizzontale dello stesso punto D venga indicata dalla linea $DT = AC$, e delle due mentovate velocità si comporrà la DS normale ed uguale ad AD , come si doveva dimostrare.

Se adunque la circonferenza $KDLNK$ girerà intorno al punto C con velocità in ragione di CK , e di più camminerà per la direzione orizzontale KO colla velocità relativa ad AC , la forza viva dell'arco KMD farà eguale ad

$$\frac{u^2}{2a^2} (c^2 + 2ab) \cdot s - \frac{u^2}{2a^2} \cdot 2ab \sqrt{2bx - x^2} \text{ e quella dell'intera circonferenza } = \frac{u^2}{2a^2} \cdot (c^2 + 2ab) \cdot s.$$

Il circolo AFBHA (Fig. 5.) ruotoli sopra il piano orizzontale AG, e sia conosciuta la velocità del centro C: si dimanda la forza viva di esso circolo, e per conseguenza d'un cilindro di data lunghezza, cui serva di base il circolo mentovato.

XIV. Sia $AC = a$, $CK = x$, $Kk = dx$, $AK = BL = a - x$, e si chiami u la velocità del centro C , ed f la forza viva del circolo $KDLNK$. C' insegna il num. VI., che la forza viva della circonferenza $KDLNK = nx$ si esprime per

$$\frac{u^2}{2a^2} nx \left(\overline{AK}^2 + 2ACK \right) = \frac{u^2}{2a^2} \cdot (na^2x + nx^3); \text{ dunque la}$$

forza viva della zona circolare $KDLNKkdlmk$, cioè df

$$= \frac{u^2}{2a^2} \cdot (na^2x dx + nx^3 dx). \text{ M' inoltre all' integrazione, e}$$

$$\text{trovo } f = \frac{u^2}{2a^2} \cdot \left(\frac{na^2x^2}{2} + \frac{nx^4}{4} \right), \text{ valore della forza}$$

viva

viva del circolo $KDLNK$. Non si dee aggiungere la costante; perchè a $CK = x = 0$ ci corrisponde $f = 0$.

Pongo $CK = x = CA = a$, e scopro $f = \frac{u^2}{2} \cdot \frac{3na^2}{4}$, grandezza della forza viva del circolo $AFBHA$.

La forza viva d' un cilindro, la cui base $AFBHA = \frac{na^2}{2}$, e la lunghezza l , sarebbe $= \frac{u^2}{2} \cdot \frac{3na^2 l}{4}$.

XV. Se tutto il circolo $AFBHA$ si movesse colla velocità u , sarebbe la sua forza viva $= \frac{u^2}{2} \cdot \frac{na^2}{2}$, che si riferirebbe a quella dello stesso circolo che ruzzola in ragione di 2 : 3. Ma se il detto circolo camminasse colla velocità $\frac{u\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$, verrebbe animato dalla stessa forza viva scoperta nella supposizione, ch' esso ruzzoli sopra il piano orizzontale AG .

Il nostro circolo privo d' elasticità venga spinto obliquamente contro il piano AG , e la sua velocità orizzontale sia $= \frac{u\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$. Sia tale il fregamento del circolo col piano, che il punto A nell' atto dell' urto perda tutto il suo moto, ed interverrà ch' esso circolo ruzzolerà sopra il detto piano conservando la forza viva $= \frac{u^2}{2} \cdot \frac{3na^2}{4}$.

La velocità orizzontale del punto B , che prima dell' urto era $= \frac{u\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$, diverrà $= 2u$, e fra le dette due velocità passerà la ragione $\sqrt{3} : \sqrt{8}$.

XVI. Abbiamo trovato la forza viva del circolo $KDLNK$ $= f = \frac{u^2}{2a^2} \left(\frac{na^2 x^2}{2} + \frac{nx^4}{4} \right)$; dunque ponendo $CK = x = b$,

avremo $f = \frac{u^2}{2a^3} \cdot \left(\frac{na^2b^2}{2} + \frac{nb^4}{4} \right)$. Se tutto il detto circolo $= \frac{nb^2}{2}$ si movesse colla velocità $\frac{u\sqrt{2a^2+b^2}}{a\sqrt{2}}$, farebbe fornito della medesima forza viva. Si noti che il punto K viaggia colla velocità $\frac{(a-b) \cdot u}{a}$.

Essendo dotato il circolo molle $KDLNK$ della velocità orizzontale $\frac{u\sqrt{2a^2+b^2}}{a\sqrt{2}}$, urti obliquamente nel piano orizzontale KO , ed il punto K abbia patita tale resistenza, che gli rimanga la velocità orizzontale $\frac{(a-b) \cdot u}{a}$ ed è facile da scoprire, ch' esso si moverà non altrimenti che il circolo $KDLNK$ contenuto nell' $AFBHA$, che ruzzola sopra il piano AG .

XVII. Pel num. XIII. egli è lo stesso, che la circonferenza $KDLNK$ ruzzoli sopra il piano KO con velocità relative alle distanze dal punto K , movendosi in oltre per la direzione KO colla velocità relativa ad AK , o pure che si giri intorno il punto C con velocità in ragione di CK , e di più cammini per la direzione AG colla celerità proporzionale ad AC .

In ambo le circostanze adunque farà fornita della stessa forza viva, e perciò il sovrapposto calcolo m' insegnerà, che il circolo $KDLNK$ girante intorno il punto C con velocità proporzionali alle distanze da esso punto, e che viaggia orizzontalmente da C verso H colla velocità proporzionale ad

AC , viene animato dalla forza viva $f = \frac{u^2}{2a^2} \cdot \frac{(na^2x^2}{2} + \frac{nx^4}{4}$.

La linea NLD (Fig. 6.) composta di due rami simili ed uguali LD , LN si giri intorno l' asse orizzontale ND , e generi una superficie. Rotoli questa in riguardo alla circonferenza KL sopra un piano orizzontale lungo una linea normale al piano di questa carta, e di più si mova per la

stessa direzione colla velocità proporzionale ad AK : si dimanda la forza viva della detta superficie, posto che sia nota la velocità proporzionale ad AC del centro C , o sia dell' asse ND .

XVIII. Sia $AC = a$, $KC = CL = b$, $AK = c$, $BE = BH = x$, nx la circonferenza del raggio x , $IH = a - x$, $CB = y$, $BP = dy$, $EF = HM = ds$, $CD = CN = g$. Si nomini u la velocità del punto C , ed f la forza viva della superficie $LEHKL$. Pel num. VI. la forza viva della circonferenza circolare del raggio $BE = x$ si eguaglia alla grandezza $\frac{u^2}{2a^2} \cdot (\overline{IH}^2 + 2IBH) \cdot nBE$

$= \frac{u^2}{2a^2} \cdot (a^2 + x^2) \cdot nx = \frac{u^2}{2a^2} \cdot (a^2 nx + nx^3)$. Si moltiplichi questa quantità per $EF = ds$, e ne risulterà la forza viva df
 $= \frac{u^2}{2a^2} \cdot (a^2 nx + nx^3) \cdot ds$ della superficie elementare $EFMHE$.

Integrando poscia avremo la forza viva f
 $= \frac{u^2}{2a^2} \int (a^2 nx + nx^3) \cdot ds$ della superficie $LEHKL$.

XIX. Sia retta la linea $LD = \sqrt{b^2 + g^2}$, e giacchè
 $CL : LD :: QE : EF$, o pure analiticamente
 $b : \sqrt{b^2 + g^2} :: -dx : ds = -\frac{dx\sqrt{b^2 + g^2}}{b}$ ne risulta il
 valore di ds dato per dx . Adempiuta la sostituzione, avremo $df = \frac{u^2\sqrt{b^2 + g^2}}{2a^2b} \cdot (-a^2 nxdx - nx^3dx)$, ed integran-

do, $f = \frac{u^2\sqrt{b^2 + g^2}}{2a^2b} \cdot \left(A - \frac{na^2x^2}{2} - \frac{nx^4}{4} \right)$. Si determi-

na il valore della costante A riflettendo, che nel sito KL ad $f = 0$ corrisponde $x = b$, onde s' abbia A

$= \frac{na^2b^2}{2} + \frac{nb^4}{4}$. E quindi ci si presenta l' integrazione
 O ij

$$\text{compiuta } f = \frac{u^2 \sqrt{b^2 + g^2}}{2a^2 b} \cdot \left(\frac{na^2 b^2}{2} + \frac{nb^4}{4} - \frac{na^2 x^2}{2} - \frac{nx^4}{4} \right).$$

Nel punto D è $x=0$, e perciò la forza viva della superficie $LDKL$, cioè $f = \frac{u^2 \sqrt{b^2 + g^2}}{2a^2} \cdot \left(\frac{na^2 b}{2} + \frac{nb^3}{4} \right)$, e quella dell'intera superficie $LDKL + LNKL$, $2f$

$$= \frac{u^2 \sqrt{b^2 + g^2}}{2a^2} \cdot \left(na^2 b + \frac{nb^3}{2} \right).$$

XX. Conciossiachè la nostra doppia superficie conica si eguaglia ad $nb \sqrt{b^2 + g^2}$ s'essa si movesse colla velocità $\frac{u}{a} \sqrt{a^2 + \frac{1}{2}b^2}$ farebbe fornita della medesima forza viva, onde viene animata, allorchè ruzzola sopra un piano orizzontale colla condizione, che il punto C cammini colla velocità u . Le velocità dunque del detto punto si corrisponderebbero nella ragione di $a : \sqrt{a^2 + \frac{1}{2}b^2}$.

Posta $b=a$, il moto della superficie farebbe di semplice rotazione rispettivamente alla circonferenza KL , e si avrebbe

$$\text{be } 2f = \frac{3na u^2 \sqrt{a^2 + g^2}}{4}$$

$$\text{XXI. La stessa forza viva } 2f = \frac{u^2 \sqrt{b^2 + g^2}}{2a^2} \cdot \left(na^2 b + \frac{nb^3}{2} \right)$$

competerebbe alla nostra superficie, che si rivolgesse intorno all'asse ND colla legge, che il punto K fosse dotato della velocità $\frac{bu}{a} = v$, e di più camminasse per una direzione orizzontale normale al detto asse colla velocità u . Questa forza viva si può anche esprimere così

$$2f = v^2 \sqrt{b^2 + g^2} \cdot \left(\frac{na^2}{2b} + \frac{nb}{4} \right), \text{ sostituendo in vece di } u \text{ il suo valore } \frac{av}{b}.$$

Fingasi $AC = a = 0$, e si scoprirà $2f = \frac{nbv^2 \sqrt{b^2 + g^2}}{4}$,

ed in questo caso la superficie, stando immobile l'asse ND ; intorno ad esso si gira, ed è fornita d'una forza viva, ch'è la metà di quella, che le competerebbe, se si movesse tutta colla velocità v , colla quale si gira il punto K , o sia la circonferenza KL .

XXII. Sia NLD un semicircolo, e poichè EF

$$= ds = \frac{-b dx}{\sqrt{b^2 - x^2}}, \text{ avremo } df = \frac{u^2}{2a^2} \cdot \frac{(-a^2 b n x dx - b n x^3 dx)}{\sqrt{b^2 - x^2}}$$

$$= \frac{u^2 b n}{2} \cdot \frac{-x dx}{\sqrt{b^2 - x^2}} + \frac{u^2 b n}{2a^2} \cdot \frac{-x^3 dx}{\sqrt{b^2 - x^2}}. \text{ L' integrale di } \frac{-x dx}{\sqrt{b^2 - x^2}} \text{ è } \sqrt{b^2 - x^2}. \text{ Per integrare la quantità } \frac{-x^3 dx}{\sqrt{b^2 - x^2}},$$

si osservi essere $x^2 = b^2 - y^2$, $x dx = -y dy$, $\sqrt{b^2 - x^2} = y$, e

$$\text{perciò } - \frac{x^3 dx}{\sqrt{b^2 - x^2}} = \frac{(b^2 - y^2) \cdot y dy}{y} = b^2 dy - y^2 dy, \text{ e}$$

$$\int \frac{-x^3 dx}{\sqrt{b^2 - x^2}} = b^2 y - \frac{y^3}{3} = b^2 \sqrt{b^2 - x^2} - \frac{b^2 + x^2}{3} \sqrt{b^2 - x^2}$$

$$= \frac{2b^2 + x^2}{3} \sqrt{b^2 - x^2}. \text{ Sarà pertanto } f = A$$

$$+ \sqrt{b^2 - x^2} \cdot \frac{u^2 b n}{2} + \frac{u^2 b n}{2a^2} \cdot \frac{2b^2 + x^2}{3} \sqrt{b^2 - x^2}. \text{ Ad } f$$

$= 0$ ci corrisponde $x = b$, e quindi $A = 0$, e perciò f

$$= \frac{u^2 n b}{2} \sqrt{b^2 - x^2} + \frac{u^2 n b}{2a^2} \cdot \frac{2b^2 + x^2}{3} \sqrt{b^2 - x^2} \text{ farà la}$$

forza viva della superficie $LEHKL$, che si move colle descritte condizioni. Essendo nel punto D , $x = 0$, ne risulta la

forza viva della superficie emisferica $f = \frac{u^2 nb^2}{2} + \frac{u^2 nb^4}{3a^2}$, e quella di tutta la sferica superficie $2f = 2nb^2 u^2 \cdot \left(\frac{a^2}{2a^2} + \frac{b^2}{3a^2} \right)$.

XXIII. Poichè la nostra sferica superficie s' eguaglia a $2nb^2$, s' essa camminasse colla velocità $\frac{u\sqrt{a^2 + \frac{2}{3}b^2}}{a}$, avrebbe quella

stessa forza viva, di cui è fornita, quando rotolando sopra un piano orizzontale, l' asse ND si muove colla velocità $= u$.

Dato che fosse $b=a$, il moto sarebbe di semplice rotazione rispettivamente alla circonferenza KL , e si scoprirebbe $2f = 2nb^2 \cdot \frac{5u^2}{6}$.

XXIV. La medesima forza viva $2f = 2nb^2 \cdot u^2 \cdot \left(\frac{a^2}{2a^2} + \frac{b^2}{3a^2} \right)$ converrebbe alla sferica superficie, se si rivolgesse intorno l' asse ND colla legge, che il punto L girasse colla velocità $\frac{bu}{a} = v$, ed in oltre viaggiasse per una direzione orizzontale normale al detto asse colla velocità $u = \frac{av}{b}$. Surrogando in cambio di u il suo valore $\frac{av}{b}$, la mentovata forza viva può prendere il seguente

$$\text{aspetto } 2f = 2nb^2 \cdot \left(\frac{a^2 v^2}{2b^2} + \frac{v^2}{3} \right).$$

Supponghasi $AC=a=0$, e ne risulterà $2f = \frac{2nb^2 v^2}{3}$.

In tal circostanza essendo $u = \frac{av}{b} = 0$, l' asse ND sta in riposo, e la superficie sferica intorno ad esso si gira. Si osservi che sendo la detta superficie $= 2nb^2$, la sua forza vi-

va sta a quella $\frac{2nb^2v^2}{2}$, che le converrebbe, se si movesse tutta colla velocità v , colla quale gira la circonferenza KL , come $\frac{1}{2} : \frac{1}{3}$, cioè come $2 : 3$.

La superficie NLD (Fig. 6.) chiusa dall'asse ND, e dai due rami di curva simili, ed uguali LD, LN giri intorno il detto asse orizzontale ND, e generi il corpo LDKNL. Rotoli questo in riguardo al circolo KL sopra un piano orizzontale, lungo una linea normale al piano di questa carta, ed in oltre si muova per la stessa direzione colla velocità, che a quella di rotazione del punto L sia come $AK : KL$; si dimanda la forza viva di esso corpo, posto che sia nota la velocità dell'asse ND proporzionale ad AC.

XXV. Sia $AC = a$, $KC = CL = b$, $AK = c$, $CD = CN = g$, $BE = BH = x$, nx la circonferenza del raggio x , $IH = a - x$, $CB = y$, $BP = dy$. Si chiami u la velocità dell'asse ND , ed f la forza viva del pezzo di corpo $LEHK$. C' insegna il numero XIV., che la forza viva del circolo HE , il cui raggio x , pareggia la quantità $\frac{u^2}{8a^2} \cdot (2na^2x^2 + nx^4)$. Si moltiplichi essa per dy , e ne proverrà la forza viva $df = \frac{u^2}{8a^2} \cdot (2na^2x^2 + nx^4) \cdot dy$ dell'elemento di corpo $EFMH$, ed integrando avremo $f = \int \frac{u^2}{8a^2} \cdot (2na^2x^2 + nx^4) \cdot dy$ forza viva del corpo $LEHK$.

XXVI. Suppongasì retta la linea $LD = \sqrt{b^2 + g^2}$, e poichè

$$\begin{array}{lcl} LC : CD :: EQ : QF \\ b : g :: -dx : dy \end{array}$$

scopriremo $dy = -\frac{gdx}{b}$, e per conseguenza df

$$= \frac{ngu^2}{8a^2b} \cdot (-2a^2x^2dx - x^4dx) \cdot \text{Passo all' integrazione, ed}$$

$$\text{ho } f = A - \frac{ngu^2}{8a^2b} \cdot \left(\frac{2a^2x^3}{3} + \frac{x^5}{5} \right) \cdot \text{Nel posto } KL$$

ad $f=0$ ci corrisponde $x=b$, e perciò A

$$= \frac{ngu^2}{8a^2} \cdot \left(\frac{2a^2b^2}{3} + \frac{b^4}{5} \right). \text{ Quindi l' integrazione compiuta}$$

ta $f = \frac{ngu^2}{8a^2} \cdot \left(\frac{2a^2b^2}{3} + \frac{b^4}{5} - \frac{2a^2x^2}{3b} - \frac{x^4}{5b} \right)$: ma rispettivamente al punto D , $x=0$; dunque l'intero cono LDK sarà fornito dalla forza viva $f = \frac{ngu^2}{8a^2} \cdot \left(\frac{2a^2b^2}{3} + \frac{b^4}{5} \right)$,

ed il doppio cono $LDKNL$ della forza viva $2f$

$$= \frac{ngu^2}{4a^2} \cdot \left(\frac{2a^2b^2}{3} + \frac{b^4}{5} \right).$$

XXVII. Eguagliandosi la massa del nostro corpo ad $\frac{nb^2}{3} g$, se esso si movesse colla velocità $\frac{u}{a} \sqrt{a^2 + \frac{3b^2}{10}}$, avrebbe quella

stessa forza viva, da cui viene animato, quando ruzzola sopra un piano orizzontale colla condizione, che l'asse ND viaggi colla celerità u . Le velocità dunque del detto asse si

riferirebbero nella proporzione di $a : \sqrt{a^2 + \frac{3}{10} b^2}$.

Posta $b=a$, il moto del corpo farebbe di semplice rotazione in riguardo alla circonferenza KL , e si troverebbe $2f$

$$= \frac{ngu^2}{4} \cdot \left(\frac{13}{15} b^2 \right) = \frac{nb^2}{3} g \cdot \frac{13u^2}{20}.$$

XXVIII. La stessa forza viva $2f = \frac{ngu^2}{4a^2} \cdot \left(\frac{2a^2b^2}{3} + \frac{b^4}{5} \right)$ apparterrebbe al nostro corpo, che si rivolgesse intorno l'asse ND colla condizione, che la circonferenza KL girasse colla velocità $\frac{bu}{a} = v$, e di più camminasse per una direzione orizzontale normale al detto asse colla celerità u

$= \frac{av}{b}$. Sostituendo in luogo di u il suo valore $\frac{av}{b}$, la

mentovata

mentovata forza viva si può anch' esprimere come segue $2f$

$$= \frac{ngv^2}{4} \cdot \left(\frac{2a^2}{3} + \frac{b^2}{5} \right).$$

Se $AC = a = 0$, la velocità $u = \frac{av}{b}$ dell' asse ND farà uguale a nulla, ed il corpo, che girerà intorno al detto asse immobile, farà fornito della forza viva $2f = \frac{ngb^2v^2}{20}$

$= \frac{nb^2g}{3} \cdot \frac{3v^2}{20}$. Se tutto esso corpo si movesse colla velocità v , colla quale girasi la circonferenza KL , verrebbe animato dalla forza viva $\frac{nb^2g}{3} \cdot \frac{v^2}{2}$, a cui quella del corpo,

che si rivolge intorno all' asse ND , sta come $\frac{3}{20} : \frac{1}{2}$, o sia come 3 : 10.

XXIX. Dalle cose dimostrate si deduce come per corollario la misura della forza viva d' una trottola di figura conica, in cui la circonferenza del circolo massimo si giri intorno all' asse colla velocità v .

Se l' asse è immobile, abbiamo $f = \frac{nb^2gv^2}{40}$, e se l' asse si muove in un piano orizzontale per una data direzione colla velocità $u = \frac{av}{b}$, alla trottola compete la forza viva $f = \frac{ngv^2}{8} \cdot \left(\frac{2a^2}{3} + \frac{b^2}{5} \right)$.

XXX. Sia NLD una mezza ellisse, la cui equazione

$$\frac{x^2}{g^2} \cdot (g^2 - y^2) = x^2. \text{ Nella formola } df$$

$$= \frac{u^2}{8a^2} \cdot (2na^2x^2 + nx^4) \cdot dy \text{ si sostituisca in cambio di } x^2 \text{ il}$$

$$\text{fuò valore, e ne risulterà } df = \frac{u^2nb^2}{8a^2} \cdot \left(2a^2dy - \frac{2a^2y^2dy}{g^2} \right. \\ \left. + b^2dy - \frac{2b^2y^2dy}{g^2} + \frac{b^2y^4dy}{g^4} \right). \text{ L' integrazione ci dà } f$$

$= \frac{u^2 nb^2}{8a^2} \cdot \left((2a^2 + b^2) \cdot y - \frac{(2a^2 - 2b^2) \cdot y^3}{3g^2} + \frac{b^2 y^5}{5g^4} \right)$. Non ag-
giungo costante, perchè com'è di dovere ad $y=0$ ci corri-
risponde $f=0$. La forza viva trovata conviene al pezzo
d'ellissoide *LEHK*.

Poichè nel punto *D*, $y=g$, farà $f = \frac{u^2 nb^2}{8a^2} \cdot \left(\frac{4a^2}{3} + \frac{b^2}{3} + \frac{b^2}{5} \right) \cdot g = \frac{u^2 nb^2}{2a^2} \cdot \frac{(5a^2 + 2b^2)}{15} \cdot g$ la forza viva
della mezza sferoide *LDK*, e quella di tutta la sferoide in-
tera *LDKNL* $2f = \frac{u^2 nb^2}{a^2} \cdot \frac{(5a^2 + 2b^2)}{15} \cdot g$. S' inferisca, che
le forze vive d' una sferoide, e d' una sfera, che differissero
soltanto nel semiasse *CD*, si riferirebbero nella proporzione
di $g : b$.

XXXI. Conciossiachè la massa della sferoide pareggi la gran-
dezza $\frac{2nb^2g}{3}$, se la stessa camminasse colla velocità

$\frac{u \cdot \sqrt{a^2 + \frac{2}{5}b^2}}{a}$ avrebbe la medesima forza viva, di cui è

dotata, quando, rotolando sopra un piano orizzontale, l'asse
ND si muove colla velocità u .

Se il punto *A* coincidesse col punto *K*, il moto farebbe
di semplice rotazione in riguardo alla circonferenza *KL*, e
ne risulterebbe $2f = \frac{2nb^2g}{3} \cdot \frac{u^2}{2} \cdot \frac{7}{5}$.

XXXII. La stessa forza viva $2f$

$= \frac{2nb^2g}{3} \cdot \frac{u^2}{2a^2} \cdot (a^2 + \frac{2}{5}b^2)$ competerebbe alla nostra sfe-
roide, se circolasse attorno l'asse *ND* colla condizione, che
la massima circonferenza *KL* girasse colla velocità $\frac{bu}{a} = v$,
ed altresì la sferoide tutta camminasse per una direzione oriz-
zontale normale al detto asse colla velocità $u = \frac{av}{b}$. Po-

Fig. 1.

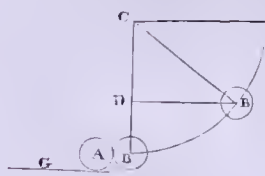


Fig. 2.

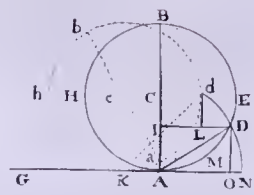


Fig. 3.

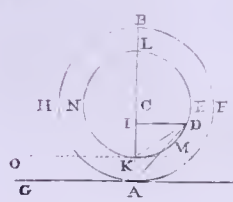


Fig. 4.

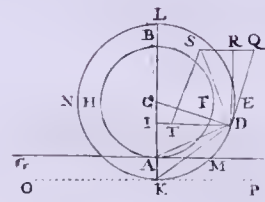


Fig. 5.

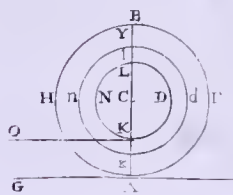
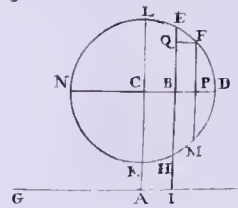


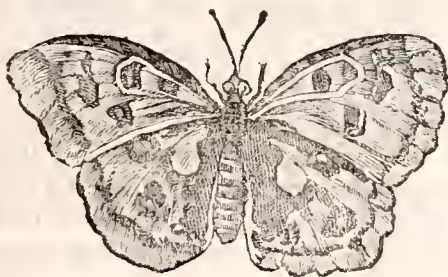
Fig. 6.



nendo in vece di u il suo valore $\frac{av}{b}$, la nominata forza viva si può esprimere come segue $2f = \frac{2nb^2g}{3} \cdot \frac{v^2}{2b^2} \cdot (a^2 + \frac{2}{5}b^2) = \frac{ngv^2}{3} \cdot (a^2 + \frac{2}{5}b^2)$.

Fingasi $AC = a = 0$, e ne risulterà $2f = \frac{2nb^2gv^2}{15}$. Sendo in tale congiuntura $u = \frac{av}{b} = 0$, l'asse ND non fa moto, e la sferoide gira intorno ad esso. Egli è da notarsi che la forza viva si riferisce a quella $\frac{2nb^2g}{3} \cdot \frac{v^2}{2}$, che le converrebbe, se tutta si muovesse colla velocità v , colla quale gira la circonferenza KL , nella ragione di $\frac{1}{5} : \frac{1}{2}$, o sia di $2 : 5$.

Acciocchè le due forze vive fossero uguali, bisognerebbe, che l'intera sferoide camminasse colla velocità $v \sqrt{\frac{2}{5}}$.



T E O R E M A

IL NULLA IMMAGINARIO NON PUO' CONFONDERSI
COL REALE.

D E L M E D E S I M O .

I. **I**L celebratissimo Signor *Leonardo Eulero* con un ingegnoso metodo determina (chiamata p la femicirconferenza circolare del raggio $= 1$.) $\log. 1 = \pm a \cdot p \sqrt{-1}$, $\pm 2p \sqrt{-1}$, $\pm 4p \sqrt{-1}$, &c.; $\log. -1 = \pm p \sqrt{-1}$, $\pm 3p \sqrt{-1}$, $\pm 5p \sqrt{-1}$, &c., e confondendo il nulla immaginario col reale, cava la conseguenza, che $\log. 1$ ha un valor reale $= 0$, ed infiniti immaginarj; laddove a $\log. -1$ non competono salvochè infiniti valori immaginarj, e questa illazione la estende a qualunque numero positivo, e negativo.

II. Affermo frattanto essere immaginario $\log. 1 = 0 \cdot p \sqrt{-1}$, e che col metodo del lodato Autore non si scoprono per $\log. \pm 1$ fenonse valori immaginarj, a cagione che il nulla immaginario non può confondersi col reale. Per trovare i logaritmi reali dei numeri positivi, e negativi, egli è d'uopo ricorrere o alla quadratura dell' iperbola conica fra gli

assintoti, o alla formola $f \left(\frac{g}{f} \right)^{\frac{1}{b}} = x$, nella quale f significa il protonumero, y il logaritmo, x il numero, ed b, g un logaritmo, ed un numero corrispondenti, il qual logaritmo sia dotato della condizione di eguagliarsi ad un numero pari.

III. Provo evidentemente, che il nulla immaginario non può considerarsi come un nulla reale, deducendo questa verità dall' equazione del ramo inferiore della concoide. Sia BDI (*Fig. I.*) la metà del ramo inferiore della concoide, la quale è fornita della proprietà, che tirate a squadra le due rette AF , AC , e menata dal punto fisso C la linea CF , e tagliata FD uguale alla data AB , il punto D appartenga alla curva. Pongasi $AB = FD = a$, $AC = b$, $AE = GD = x$,

$ED = AG = y$, ed essendo $EF = \sqrt{(a^2 - y^2)}$, $GC = b - y$, dall' analogia

$$\frac{GD}{x} : \frac{GC}{b-y} :: \frac{EF}{\sqrt{(a^2 - y^2)}} : \frac{ED}{y}$$

si raccoglierà la nota equazione $x = \frac{(b-y)}{y} \cdot \sqrt{(a^2 - y^2)}$, ovvero $\pm x = \frac{(b-y)}{y} \cdot \sqrt{(a^2 - y^2)}$, espressione spettante

all' intero ramo inferiore $IDBdi$ della nostra curva. Suppongasi, qualmente la Figura (1.) dimostra, $AC = b > AB = a$, e posta $AG = y = AC = b$, scopriremo $\pm x = 0 \cdot \sqrt{(a^2 - b^2)}$, ossia $\pm x = 0 \cdot \sqrt{(b^2 - a^2)} \sqrt{-1}$, cioè a dire $\pm x$ uguale al nulla immaginario. Resterebbero convinti, che questo non possa far figura d'un nulla reale, riflettendo che il punto C non appartiene alla curva $IDBdi$; imperciocchè per esso non passa il punto D descrivente la curva.

IV. Facciasi ora $AG = y = AB = a$, e l'equazione prenderà il seguente aspetto $\pm x = \frac{(b-a) \cdot \sqrt{(a^2 - a^2)}}{a} = (b-a) \cdot 0$,

cioè $\pm x$ uguale al nulla reale. Nel punto B adunque $\pm x$ si eguaglia al nulla reale, ed in fatti il punto B spetta alla curva $IDBdi$, passando per lo stesso il punto descrivente D .

Se fosse $AC = b = AB = a$, il punto C coinciderebbe col punto B , ed uguagliandosi $\pm x$ al nulla reale, la curva si approprierebbe il punto C .

Fingasi $AG = y > AB = a < AC = b$, ed una tal quantità pongasi $= c$. In questa ipotesi ci si presenterà l'equazione $\pm x = \frac{(b-c)}{c} \cdot \sqrt{(a^2 - c^2)} = \frac{(b-c)}{c} \cdot \sqrt{(c^2 - a^2)} \sqrt{-1}$ quantità immaginaria.

Che se si supponga $AG = y > b$, onde s'abbia $y = e > b$, ne proverrà la formola $\pm x = \left(\frac{b-e}{e} \right) \cdot \sqrt{(e^2 - a^2)} \sqrt{-1}$ grandezza parimente immaginaria.

V. E qui egli è d'uopo fare la riflessione, che trovandosi procedendo da B verso A i valori reali di x , e procedendo da B verso C i valori immaginari, abbiamo è vero in B un nulla di quantità immaginaria, ma abbiamo altresì un nul-

la di quantità reale, e perciò il punto B compete alla curva $IDBdi$.

Ma in riguardo al punto C s'incontra l'immaginario tanto da C verso B , quanto da C verso H , e conseguentemente in C v'è un doppio nulla di quantità immaginaria, e per questa ragione il detto punto non appartiene alla curva.

VI. Resta da considerarsi l'ipotesi, che sia $AC = b < AB = a$, nella quale la curva si adatta alla Figura (2.). Stabilita $y = b$, si trova $\pm x = 0. \sqrt{(a^2 - b^2)}$, cioè $\pm x$ uguale al nulla reale. Trovandosi i valori reali di $\pm x$ e da C verso A , e da C verso B , il punto C per doppio titolo ha luogo nella curva $IDCKBkCdi$.

Il punto B conviene alla curva, perchè in esso congiuntamente, come nella Figura (1.), $\pm x = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \sqrt{-1}$, rinvenendosi il primo nulla, quando si arriva da A in B , ed il secondo, quando si giunge da H in B .

VII. I medesimi discorsi si possono applicare alla curva dell'equazione $\pm x = \frac{(b-y)}{b} \cdot \sqrt{(a^2 - y^2)}$. Descritte a squadra le due rette (Fig. 3.) CB', li , che s'intersechino nel punto A , taglio $AB = AB' = a$, $AC = b > a$, $AG = y = AG' = -y$, e fatte $GF = G'F = a$, pei punti C , F conduco la linea CD' , la quale s'incontrerà nei punti D , D' colle linee GD , $G'D'$ normali a CB' , i quali due punti apparterranno ai due rami inferiore $IDBdi$, e superiore $ID'B'd'i$ della curva, che vogliamo delineare, onde s'abbia $GD = x$, $G'D' = x$. Ed in fatti per la similitudine de' triangoli CAF , $CGD = CGd$, $CG'D' = CG'd'$ abbiamo le analogie

$$\begin{array}{llllll} CA & : & AF & : & : & CG & : & GD = Gd \\ b & : & \sqrt{(a^2 - y^2)} & : & : & b - y & : & \pm x \\ CA & : & AF & : & : & CG' & : & G'D' = G'd' \\ b & : & \sqrt{(a^2 - y^2)} & : & : & b - y & : & \pm x \end{array}$$

che ci danno $\pm x = \frac{(b-y)}{b} \sqrt{(a^2 - y^2)}$, ch'è l'equazione proposta.

VIII. Supponendosi $AC = b > AB = a$, se si faccia $AG = y = AC = b$, si troverà $\pm x = 0. \sqrt{(a^2 - b^2)} = 0. \sqrt{(b^2 - a^2)} \sqrt{-1}$

uguale al nulla immaginario. Si renderà manifesto, ch' esso non possa considerarsi come un nulla reale, osservando che il punto C non conviene alla curva $IDBdi$, la quale, se BB' sia verticale, non discende più abbasso del punto B , a cui perviene, quando, essendo $AF = \sqrt{(a^2 - y^2)} = 0$, i due punti G, D si congiungono in B .

Stabilita $AG = y = AB = a$, ne risulta $\pm x = (b - a) \cdot 0$, ossia $\pm x$ uguale al nulla reale, e perciò il punto B spetta alla curva $IDBdi$.

Lo stesso accaderebbe, se fosse $AC = b = AB = a$; imperciocchè il punto C coinciderebbe col punto B .

Sia $AG = y > AB = a < AC = b$, e tale grandezza pongasi $= c$, onde ci si offerisca l'equazione $\pm x =$

$$\frac{(b-c)}{b} \cdot \sqrt{(a^2 - c^2)} = \frac{(b-c)}{b} \cdot \sqrt{(c^2 - a^2)} \sqrt{-1}, \text{ che determi-}$$

na $\pm x$ uguale ad una quantità immaginaria.

Se poi si faccia $AG = y > b$, dimodochè s' abbia $y = e > b$,

$$\text{ne deriverà la formola } \pm x = \frac{(b-e)}{b} \cdot \sqrt{(e^2 - a^2)} \sqrt{-1},$$

grandezza altresì immaginaria.

Ai punti B, C si accomodano le riflessioni, che si leggono al numero V., e che io stimo superfluo il ripetere.

IX. Passo ad esaminare la supposizione di $AC = b < AB = a$, in cui la curva vien espressa dalla Figura (4). Determinata $y = b$, si scopre $\pm x = 0 \cdot \sqrt{(a^2 - b^2)}$, cioè x ugual al nulla reale. Incontrandosi i valori reali di x e da C verso A , e da C verso B ; il punto C per doppia ragione appartiene alla curva $IDCKBkCd$.

X. Da quanto ho scritto si deducono i seguenti Corollarj.

1. Se ad y reale si riferisce x uguale al nulla reale, il punto estremo d' y compete alla curva, quantunque allo stesso punto corrisponda x uguale al nulla immaginario.

2. Se ad y reale s' adatta soltanto x uguale al nulla immaginario, l'ultimo punto d' y non conviene alla curva.

3. Quindi il nulla immaginario non può confondersi col reale, e conseguentemente i logaritmi dell' unità positiva, e negativa scoperti dall' *Eulero* col suo metodo sono tutti immaginarj.

XI. Se al punto estremo B (*Fig. 5.*) del protonumero $AB = 1$ corrispondesse unicamente il logaritmo uguale al nulla immaginario, il detto punto non competerebbe alla curva, ed intanto le compete, in quanto che ad esso punto si riferisce il logaritmo ugual al nulla reale. Dipende ciò dalla natura della logaritmica, in cui ad una serie geometrica di numeri reali dee riferirsi una serie aritmetica di logaritmi reali. Nella logistica delle tavole si hanno le due progressioni relative di numeri, e di logaritmi.

$$\&c. \quad \frac{1}{100}, \quad \frac{1}{10}, \quad 1, \quad 10, \quad 100, \quad \&c.$$

$$\&c. \quad -2, \quad -1, \quad 0, \quad 1, \quad 2, \quad \&c.$$

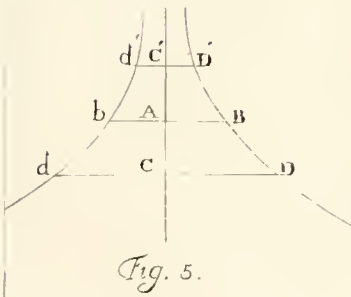
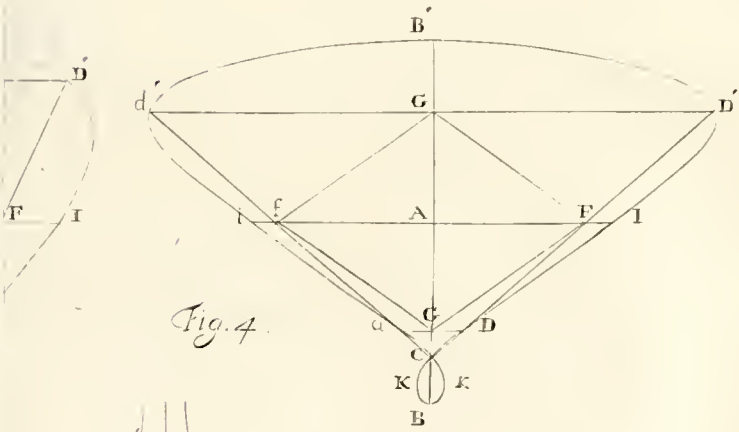
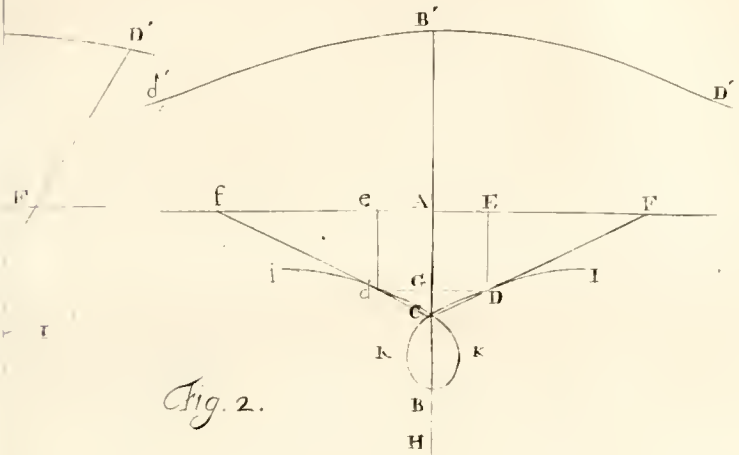
Egli è patente, che dai logaritmi reali positivi si dee passare mediante il nulla reale agli eguali logaritmi negativi, essendo il nulla medio aritmetico fra 1 e -1 , fra 2 e -2 &c.

XII. Per una pari ragione, essendo pel metodo del dottissimo *Eulero* $\log. 1 = \&c. - 4p\sqrt{-1}, -2p\sqrt{-1}, 0.p\sqrt{-1}, +2p\sqrt{-1}, +4p\sqrt{-1} \&c.$, il $0.p\sqrt{-1}$, ch'è medio aritmetico fra $-2p\sqrt{-1}$ e $+2p\sqrt{-1}$, fra $-4p\sqrt{-1}$ e $+4p\sqrt{-1}$, &c. tutte quantità immaginarie, ha da essere necessariamente immaginario. Il tanto celebre argomento adunque contro i logaritmi reali dei numeri negativi perde tutta la forza deducendosi evidentemente dai miei raziocinj, che il metodo del lodato Autore determina tutti immaginari i logaritmi e dei numeri positivi, e dei numeri negativi. E siccome ciò non esclude, che ai numeri positivi competano dei logaritmi reali, altrettanto deve altresì affermarsi dei numeri negativi, ai quali non meno i logaritmi reali si adattano, che la quadratura dell' iperbola fra gli assintoti, e la formola esponenziale della logistica $f \left(\frac{g}{f} \right)^{\frac{y}{b}} = x$ dimostra-

no uguali a quelli dei numeri positivi.

XIII. Conchiudo con una importante avvertenza. Alla serie geometrica delle unità negative sottopongo la serie aritmetica dei logaritmi, che ha loro assegnati l'*Eulero*.

&c.



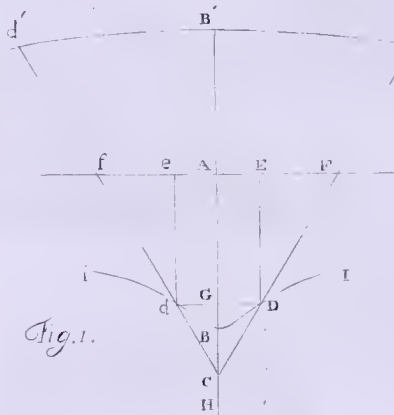


Fig. 1.

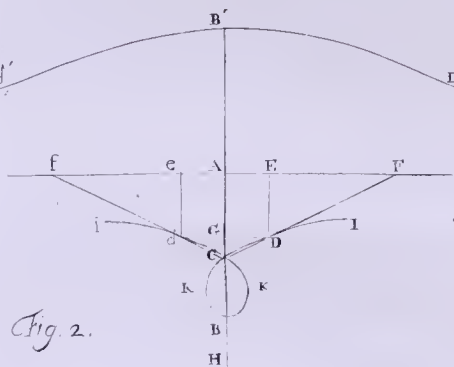


Fig. 2.

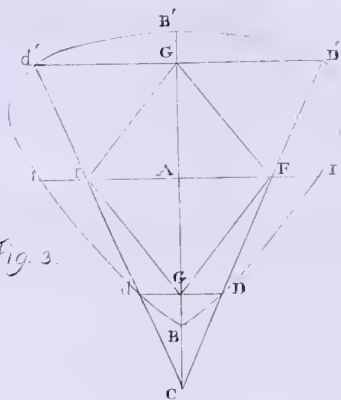


Fig. 3.

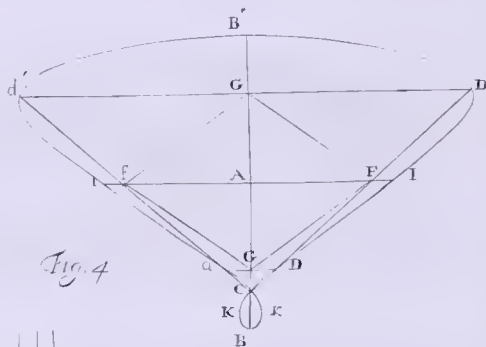


Fig. 4.

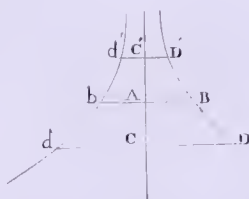


Fig. 5.

&c. — 1 , — (1) , — 1 , — (1) , — 1 ,
— (1) , — 1 , — (1) , — 1 , &c.

&c. — $5p\sqrt{-1}$, — $(4p\sqrt{-1})$, — $3p\sqrt{-1}$, — $(2p\sqrt{-1})$, — $p\sqrt{-1}$,
 $(0.p\sqrt{-1})$, $+p\sqrt{-1}$, $+(2p\sqrt{-1})$, $+3p\sqrt{-1}$, &c.

Tra due unità negative vicine ci colloco una media geometrica anch'essa $= -1$, ed acciocchè si distinguano queste medie , le chiudo fra due parentesi . Per la natura della logistica il medio aritmetico fra due logaritmi s' eguaglia al logaritmo del medio geometrico fra i due numeri corrispondenti ; dunque $\log. -1 = -4p\sqrt{-1}$, $-2p\sqrt{-1}$, $0.p\sqrt{-1}$, $+2p\sqrt{-1}$, $+4p\sqrt{-1}$, &c. , che sono quegli stessi logaritmi , che il profondissimo Autore ha scoperto competere all' unità positiva .

XIV. Similmente sotto la progressione geometrica delle unità positive ci scrivo i logaritmi , che l' *Eulero* ha giudicato a loro appartenere

&c. 1 , (1) , 1 , (1) , 1 ,
(1) , 1 , (1) , 1 , &c.

&c. — $4p\sqrt{-1}$, — $(3p\sqrt{-1})$, — $2p\sqrt{-1}$, — $(p\sqrt{-1})$, $0.p\sqrt{-1}$,
 $+(p\sqrt{-1})$, $+2p\sqrt{-1}$, $+(3p\sqrt{-1})$, $+4p\sqrt{-1}$, &c.

e tra due unità vicine metto la media geometrica $= 1$, e fra i corrispondenti logaritmi la media aritmetica . Ed affinchè tali medie si possano agevolmente discernere , le ferro fra due parentesi . Si osservi , che in questo incontro altresì la proprietà essenziale della logaritmica ricerca , che convengano a $+1$ quei logaritmi $-3p\sqrt{-1}$, $-p\sqrt{-1}$, $+p\sqrt{-1}$, $+3p\sqrt{-1}$, &c. , che l' *Eulero* ha stimato soltanto proprj di -1 .

XV. S' inferisca pertanto , che ai numeri positivi , e negativi gli stessi logaritmi e immaginarj , e reali si adattano , la qual seconda proposizione si dimostra , come ho detto di sopra , col mezzo della quadratura dell' iperbola fra gli asintoti , e della formula esponenziale della logistica .

OSSERVAZIONI

INSETTOLOGICHE.

Del Sig. PIETRO ROSSI Regio Professore nell' Università di Pisa.

INDIRIZZATE.

Al Sig. Conte d' HOCHENWART Professore d' Istoria Politica per le LL. AA.RR. gli Arciduchi Principi di Toscana.

LA gentile accoglienza che ho sempre ritrovata in Lei, stimatissimo Sig. Conte, i particolari ajuti che ai geniali miei studi l' insigne sua Biblioteca mi ha in ogni tempo somministrati, e quel superiore discernimento che la distingue nella cognizione degl' Insetti, come in tante altre pregevolissime cose, mi persuadono ad indirizzare, e sottoporre al suo giudizioso esame alcune osservazioni che, in mezzo a ricerche d' altro genere, mi è riuscito su tal materia di poter fare nella decorsa estate.

Non si aspetti però di trovare ordine in questa mia: essendo fatti diversi, tutti fra loro separati e sconnessi, non ve ne può essere alcuno, ed io glieli presenterò in quel modo appunto ch' essi verranno ora affacciandosi alla mia mente.

Una singolarità, accadutami sugli ultimi del passato Settembre, mi si offre la prima. Crederebbe Ella che nel mezzo di Pisa sul prato dietro alla Chiesa de' Cavalieri di S. Stefano si fosse potuto ritrovare, e prendere il grande Inneumone della Lapponia, l' Urocero del *Geoffroy*, il *Sirex Gigas* del *Linneo*?

(Fig. 1.) Questo insetto che dalla Lapponia il Sig. di *Mau-pertuis* portò in dono al Sig. di *Reaumur* (a) fu sempre creduto, come Ella ben sa, particolare dei paesi settentriona-

(a) T. 6. Mem. IX. pag. 312. t. 31.

li. Ed infatti il Sig. de *Geer* (a) in una delle sue Memorie ne parla come d' insetto proprio del suo paese , assicurando d' averlo ritrovato in differenti provincie, cioè nell' Ostrogozia, nella Wefmania, nell' Uplandia, e ce lo descrive come il più grande Inneumone che produca la Svezia, e forse l' Europa intera, assicurando che non erasi potuto trovare fin' allora nè in Francia , nè in Germania , nè in Olanda . Il *Linneo* sembra essere dello stesso sentimento, parlandone nel suo trattato degli animali della Svezia ; ed il *Geoffroy*, cui piacque di chiamarlo Urocero per quella specie di corno che porta alla sua coda, e che potè conoscerlo per essergli stato mandato da Dieppe, dice d' averlo invan cercato intorno a Parigi, inclinando esso pure a riguardarlo come abitatore del Nort. Il Sig. de *Bomare* però, che non ebbe mai difficoltà di ripetere tutto ciò che dagli altri è stato detto, alla parola *Urocere* del suo Dizionario scrive così: „ Insecte qui pa- „ rait particulier aux pays froids, on dit cependant en avoir „ trouvé- autour de Paris. „ Ma a questo *on dit* (sebbene ognun veda quanta poca forza abbia in sè) io non mi ci opporrò in verun modo, e credendo benissimo che accidentalmente possa essersi trovato anco altrove, m' innoltrerò piuttosto a darle qui qualche prova dell' identità del nostro Inneumone.

Questo era una femmina, ed era lungo un pollice, e tre linee dalla testa all' estremità del ventre , senza contar la coda, o cornetto appuntato; il diametro poi del suo corpo, ove è più largo, era tre linee e mezza ; aveva tutti i caratteri precisi assegnati dal *Linneo* al *Sirex Gigas* (b), e corrispondeva esattamente all' Urocero descrittoci dal *Geoffroy* (c)

Q ij

(a) Pour l'Hist. d' Inf. MXVII. pag. 567. t. 36. f. 1. 2.

(b) Linn. Syst. Nat. Ed. 10. p. 560. n. 1. *Ichneumon abd. mucronato ferrugineo segmentis 3. 4. 5. 6. nigris , thorace villoso . Act. Ups. 1736. p. 28. num. 1. Ichneumon flavus .*

(c) Geoff. Hist. d' Inf. t. 2. pag. 265. t. XIV. fig. 3. *Antennæ filiformes .*

Alæ infer. breviores .

Os maxillosum .

Aculeus ani dentatus , prominens corniculo tectus .

Abd. ubique æquale Thoraci connatum .

Ocelli tres .

Fabr. Syst. Ent. 106. p. 325.

Sirex Gigas abdomine basi apiceque .

Flavo , corpore nigro .

Schoeff. Jeon. t. 10. f. 1. 2.

cioè, ha le antenne gialle, e la testa nera, con una gran macchia gialla dietro a ciascun occhio, il torace nero, ed un poco vellutato, il ventre cilindrico, ed immediatamente nato con base larga, e continua dal torace, il primo, e secondo anello tutto giallo, e i quattro che dopo ne succedono neri, poi riprende il color giallo, e l'ultimo anello si prolunga in una specie di cornetto in cima appuntato, e fatto quali a doccia, sotto il ventre ha un'apertura dalla quale esce un lungo ago dentato, e rinchiuso da due lamine, le ali sono grandi, gialle, e nervose, le cosce nere, e le gambe e i piedi parimente di color giallo.

Quando l'acquistai era vivacissimo, e con mia gran sorpresa a prima vista lo riconobbi per quello ch'era. Io aveva ben presente alla mente le figure da me già vedute nell'opere dei sopraccitati autori, e da poco tempo mi era accaduto di attentamente considerare anco la figura colorita che di esso ritrovai in *Roesel* (a), onde subito ricorso essendo a farne il confronto, ebbi luogo d'assicurarmi che non poteasi meglio, nè più esattamente rappresentare.

Ma come dunque se quest'Insetto è particolare soltanto delle regioni più fredde, si è potuto trovare in un paese di clima dolce, e temperato quale è quello di Pisa? Devo confessare che su di ciò, mio malgrado, non posso dirle che delle semplici congetture. Ben lungi però dal figurarmelo venuto dalla Lapponia, o dalla Svezia, siccome dal *Linneo*, e da altri si vuole che ami di vivere, e soggiornare su gli alberi coniferi dei quali le campagne all'intorno di Pisa abbondantissime sono, pare che vi sia motivo a ragionevolmente supporlo nato in quelle, piuttosto che a guisa di rondinella, venuto viaggiando a noi da così lontani paesi.

Vero è però che quest'Insetto è gran volatore, vola in pieno giorno, e volando fa una specie di ronzio come i calabroni. Allorchè fu preso soffia da tre giorni un forte vento di Levante che aveva non poco rinfrescata l'aria, e forse si potè prendere perchè stancato da questo inclinò a terra.

(a) *Roesel Inf. t. 2. t. 8. 9. Bomb. & Vespa.*

Ho creduto di non doverle tacere tal circostanza , ma questa non ha più in me alcuna forza da farmi sull' origine di esso variare opinione , mentre per quella poca esperienza che ho su tai cose acquistata, sembrami di potere asserire che tra gl' Insetti non è facile trovare in un clima freddo , o temperato quelle specie che proprie sono soltanto dei paesi caldissimi ; ma al contrario accader bene spesso che li incontrino in un paese temperato , quelle che naturali sono d' un clima freddo ; colla sola differenza della minore , o maggiore rarità . (a)

Comunque sia però , questo fatto ha sempre in sè una singolarità che non doveva occultarsi , e che ridonda in molta lode di Pisa, potendosi , come Ella ben vede , da ciò sicuramente dedurre che sotto questo cielo benigno ogni più caro animale , o vi nasce , o si trova . (b)

Ma giacchè le ho parlato del più grande Inneumone che si conosca , piacemi ora di raccontarle un' osservazione che per lungo tempo ho creduto appartenere ad uno dei più piccoli di questo numeroso genere , benchè poi abbia conosciuto aver con esso solamente qualche rapporto .

Erano già scorsi due anni ch' io vedeva in certe vespe (c) di una data specie soltanto esservene alcune , le quali avevano un anello dell' addome allungato e gonfio , per cagione d' un

Q jii

(a) Adesso però è noto che in alcuni luoghi della Germania si è ritrovato ; ed il *Roesel* , che nella sua opera ne parla , ne dà un' esatta figura , e ci addita i luoghi ove si può rinvenire .

(b) Oltre il *Sirex Gigas* trovasi qui pure il *Sirex Camellus* Linn. Nella mia Collezione d' insetti conservotanto il maschio che la femmina ritrovati dentro Pisa. Questo nella grandezza , e figura del corpo , come nelle ale , e nel portamento molto si assomiglia alla *Raphidia Ophiopsis* , intorno alla quale avvertirò io ancora per aver trovato sì il maschio che la femmina , come quest' ultima ha una specie di coda dal *Linneo* datale per

carattere e da esso ottimamente descritta , sebbene il *Geoffroy* non abbia potuto osservarla in due individui avuti per esser (come pare) i suoi stati due maschi .

(c) *Vespa gallica* Linn. *Thorace uring. lineola dorso sex maculato abdomine incisuris flavis secunda bimaculata . Corpus simillimum V. vulgari : sed paullo minus , frons , pedes , segment. abdom. mag. flava . Ant. Flavæ thorax margine antico limbo ante alas , puncto ante , e sub alis flavo , regio scutellis maculis luteis 3. parium ultimo oblongiore , abdominis segmentum 2. utroque latere macula ovata flava . Schoeff. T. XXIV. fig. V.*

corpo frappestovi; ora non avendo lasciato anco nella passata estate di tener dietro a queste vespe, e badarvi attentamente, mi riuscì di raccapezzarne parecchie, che tutte portavano l'istessa irregolarità nell'addome, ed una fino che aveva quattro di queste gonfiezze distribuite in quattro distinti anelli; ma intanto ch'io andava conservandone, e nutrendone alcune, spinto dalla curiosità di vedere che cosa risultasse da quei gonfiotti, che sospettai subito essere le ninfe o pupe di qualche Inneumone, m'accadde un giorno che fu il dì 5 d'Agosto di prendere sui fiori della menta piperina, o piuttosto la *Viridis* del *Linneo*, una piccola vespa (a) (*Fig. II.*) d'altra specie avente all'estremità del corpo qualche cosa di straordinario che richiamò la mia attenzione. Armati gli occhi di lente, vidi che era la testa d'un insetto che s'agitava e si contorceva per uscir da quel luogo; affinchè ciò non seguisse, premendomi di conservare l'uno e l'altra in quello stato, presi sul momento il partito d'uccidergli col vapore del fuoco: quindi avendo posto mente ai caratteri che presentava la testa del medesimo tutta uscita già fuori, osservai che aveva due piccolissime antenne divise, e come raddoppiate in modo che apparivano esser quattro d'ugual grandezza: rilevai pure ch'era alato, ma nulla più. Ciò mi dette animo a proseguire con maggiore impegno le mie osservazioni sull'altre vespe, e finalmente venni a capo di poterne sorprendere una di esse in quel punto che dall'incisura del quarto anello superiormente, e dove prima aveva una delle surriferite gonfiezze, tentava d'uscire un insetto cui poco mancava per affatto sottrarsi da quel luogo. Stimando però opportuno di conservar sul posto ancor questo, m'appigliai subito al solito partito del vapore del fuoco che lo soffogò, e mi diede la soddisfazione di poter avere l'insetto quasi del tutto visibile, ma sempre trattenuto in parte fra i lembi dell'anello.

Sappia dunque che sebbene questo apparisca di esser più grande del primo di sopra accennato, facilmente però si ve-

(a) *Vespa minuta* Lin. Syst. 2. *Atracis ovalis*, subtus muricatis. geniculis pedum luteis femoribus porti-

de che tanto l'uno quanto l'altro sono individui della medesima specie: ambedue hanno la testa piccola, e nera, gli occhi molto rilevati, le antenne brevi, cilindriche, e come dicono rotte, e piegate in mezzo, ma doppie, e ciascuna formata di due pezzi uguali che si diramano subito dopo la prima articolazione; le ale di questo secondo, che rimane quasi tutto scoperto, e che si presenta non voltato a terra, ma colle gambe in aria, sono quattro, e compariscono affatto trasparenti: in tutto il restante poi il colore che domina è il nero alla riserva dei piedi che ha gialli. Per poter fissare un simile insetto, o per averne almeno idea più precisa bisognerebbe, riveritissimo Sig. Conte, ch'ella potesse vederlo. Io mi lusingo che allora converrebbe meco della sua rarità, e ponendolo nella classe degli Hymenopteri, sarebbe indciso se giudicare lo dovesse o una *Cynips*, o una *Sphex*, o un *Inneumone*: ma riflettendo poi al tutto insieme della sua figura ed alla maniera con la quale nasce, io vado certamente persuaso che si determinerebbe a dichiararlo piuttosto che *Inneumone* una vera *Cynips*. (a)

E qui mi sia lecito di potere avvertire che sebbene sia notissimo per le osservazioni dei Signori de *Reaumur*, de *Geer*, e *Geoffroy* che le uova di moltissime specie d'*Inneumoni* come quelle ancora delle *Cynips* sono dalle madri depositate non solo nel corpo d'ogni bruco grande, e piccolo, e riposto fino tra le membrane delle foglie, e dentro le gallozzole, ma ancora nei falsi bruchi, e nell'uova stesse delle farfalle, nei gallinetti, nei vermi mangiatori dei gorgoglioni, e nei medesimi gorgoglioni, con tutto ciò nessuno di loro ch'io sappia ha potuto osservar mai che dal corpo delle vespe sieno usciti *Inneumoni*, o altri insetti consimili, come è accaduto a me di vedere. E a questa novità s'aggiunge l'altra assai maggiore d'una *Cynips* che già dichiarata esce dal corpo di una vespa quando essa è ancor tutta in vita.

Sulla qual cosa contraria a quel che si osserva seguire in

(a) *An Cynips ater pedibus saltatoris? varietas?* Geof. n. 23. pag. 302. t. 2.

ogni altro insetto il quale ricevuto abbia dentro di sè le uova degl' Inneumoni, e delle Cynips, dirò poter ciò forse accadere perchè occupando il nostro insetto un luogo niente necessario alla vita della vespa, e passando velocemente allo stato di ninfa, può in appresso giungere ancora a dichiararsi senza che essa ne rimanga la vittima.

Come poi, e in qual tempo dalle femmine di questi insetti si depongano le uova nel corpo delle suddette vespe non posso per ora dirlo: forse ciò succede nei primi tempi della formazione del nido, quando è sola la madre ad aver cura dei parti, e che sono nello stato di larva avanti che si rinchiudano nelle cellule per trasformarsi (a). Colla diligenza

(a) E da notarsi che il Sig. *Geoffroy* nell' Istoria delle Vespe c' insegna appartenere l' ufficio di chiudere le cellule alle Madri Vespe. „ Et pour lors „ les Guepes meres forment les cellules ou est la larve avec une espèce de calotte, qu' elles construisent „ de la même manière que le reste du gâteau t. 2. p. 365. Hist. des Insectes. Al contrario poi Mr. de *Reaumur* dà generalmente in tutte le specie che ha colla sua solita diligenza studiate, questo incarico non alle Madri ma alle larve stesse prossime a trasformarsi. Ne riporterò un solo di quei tanti luoghi in cui ne parla sempre nella medesima maniera „ Quand les Vers sont devenus assez gros pour „ remplir leur cellule, ils sont prêts „ à se métamorphoser: ils n' ont plus „ besoin de prendre de nourriture, ils se l' interdisent eux mêmes, & tout „ commerce avec les autres guêpes, ils bouchent l' ouverture de leur cellule, ils lui font un couvercle. Quelles Vers le tiennent presque plat, „ ce sont ceux qui doivent être des mulets; d' autres les font convexes, „ & même allongent un peu les côtés de la cellule en leur ajoutant „ un bord de même matière que le couvercle. Celui ci comme les Couvres des Chenilles est de soie: les Vers les filent précisément comme

„ les Chenilles filent leur coque, en se donnant les mêmes mouvemens „ de tête. Le fil dont ils le forment est si fin que je n' ai pas pu observer „ précisément d' où ils le tirent, quoique j' aie quelque fois tenus à la main des gâteaux dont les vers travaillaient à se fermer: il m' a pourtant paru qu' il venait, comme celui des Chenilles d' un peu au dessous de la bouche. En moins de trois à quatre heures le couvercle d' un cellule est entièrement fait; j' ai souvent pris plaisir à briser de ceux qui étaient commencés pour le faire refaire; si on détruisait un couvercle fini depuis plusieurs jours l' expérience pourrait ne pas réussir, le Ver qui aurait épuisé sa provision de soie serait hors d' état de filer. Ces Couvres sont plus blancs que le parais extérieurs des Cellules t. 6. mem. 6. pag. 232 & mem. 7. pag. 269. & 282. Appartiene ora a chi legge il decidere qual dei due naturalisti ha detto il vero. Avendo io fatta attenzione a certe vespe solite provvedersi dei materiali per formare il loro nido col rader la buccia d' una scala di legno che stava esposta all' aria aperta d' un giardino, m' è accaduto quanto dal *Reaumur* si asserisce. E ne persuade facilmente la semplice oculare ispezione dei nidi, coperchi

genza e coll' attenzione può essere che mi sia concesso un giorno d' arrivare a scuoprirlo. (a)

Trattanto eccole una nuova osservazione relativa ad altra specie di questa stessa classe. Tra le diverse specie d' insetti state da me raccolte, delle quali molte sono nuove (b) per

Tomo IV.

R

lisci al di dentro, e come ingommato o inverniciato a somiglianza dei bozzoli dei bruchi. Potrebbe egli essere forse che il Geoffroy avesse avanzato quanto dice per analogia di quel che succede tra le api? Comunque sia questi sono piccoli nei che non adombrano la luce delle tante verità Geoffroyane.

(a) Il Vallisnieri ha notato che anco i nidi delle vespe Inneumoni *Sp. Spirifex* L. sono talora furtivamente occupati da altri insetti. *Vallisn. t. I. p. 64. ecc.*

(b) De' miei insetti solamente una piccolissima parte è stata dal Sig. Confiere *Scopoli* esaminata, e descritta; pure tra questi incontransi le seguenti specie che a mio, e suo sentimento sono nuove.

3 *Scarab. Scutell. muticus*, *Cap. dente utrinque, uno supra oculos*. *Novus*.

29 *Dermestes Linearis*. *Novus*.

21 *Tenebrio (lucidus) rufus corpore subtus atro*. *Novus*.

31 *Tenebrio superne rufescens, subtus ater, elytris abbreviatis, punctatis*. *Novus*.

8 *Tenebrio novus*.

37 *Coccinella Dytsicoides, nova*.

28 *Carabi nova species*.

12 *Carabus novus, accedit Ruficorni Fab.*

32 *Stenoceri species nova*.

38 *Cryptocephali Geoffroy species nova*.

39 *Crypt. alia species nova*.

48 *Curculio Longirostris muticus, villosus, testaceus elytris nigro punctatis*. *Novus*.

113 *Curculio Longir. muticus, fuscus, subtus cinereus nigroque punctatus*. *Novus*.

114 *Curc. Niger brevisrostris elytris albidopunctul novus*.

50 *Truxalis Fabr. nova species*.

64 *Cimex oblongus femoribus anticis crassifloris novus*.

63 *Cimex oblong. testaceus, villosus, novus*.

62 *cimex oblong. testaceus, nigro punctulatus, tuberculo prope oculos*. *Novus*.

60 *Cimex oblong. rufus villosus, punctatus. novus*.

81 *Carabus alatus niger, thor. obcordato antennis pedibusque rufis, capite bicorni novus*.

65 *Cimex oblong. ater. thoracis margine inf. alb. novus*.

57 *Cimex scutellaris apterus, fuscicornis, thorace subtus flavescente, novus*.

56 *Cimex oblong. villosus, femoribus anticis crassioribus, novus*.

52 *Cimex oblong. rostro arcuato, scutello acuminato, femoribus anticis crassioribus. novus*.

55 *Cimex oblong. niger elytris rubris margine interno nigro alboque maculato, novus*.

66 *Cimex (bipunctatus) oblongus, fuscus puncto elytrorum albo, novus*.

69 *Cimex linearis, juxta antennis novi generis*.

70 *Cimex oblongus testaceus elytri corio margine, punctoq. fuscis. Novus*.

76 *Apis hirsuta cinere rufescens abdom. incisuris posticis albidis. nova*.

77 *Apis nigra, abdom. segmentis margine albis, tibiis ferrugineis. nova*.

78 *Apis nigra alto villo pubescens abdom. segmentis margine albis. nova*.

75 *Apis hirsuta cinereus thor. abdominisque fascia mediana nigra. proxima A. Hypn.*

76 *Apis nigra abdom. fasciis tribus albis. Nova*.

78 *Apis proxima A. lunata Fabr. sed non eadem*.

82 *Apis Cavi. Linn. proxima*.

99 *Vespa nigra abdom. lucido fascies 5. albidis scutello maculas albida pedibus rufis. Sphæsti accedit*.

100 *Vespa nigra abdom. lucido punctis*

conferma ancora del celebre Sig. Consigliere *Scopoli*, la cui asserzione in simili materie ognuno ben sa quanto vaglia, avvi una Tentredine singolare per la figura delle sue antenne, raddoppiate in modo che nascendo ciascuna dalla sua base, o nodo vengono a formarle sulla testa come due laccetti, i quali sebbene sieno aperti in cima per restare i pezzi quasi a contatto, non appariscono d' esserlo. Allorchè delle due, che tengo, io presi la prima sulle foglie del rovo Ideo, volgarmente chiamato lampone, vedendo che in tutto il resto era similissima alla mosca rosaia (a), mi cadde il dubbio che questa variata forma d' antenne potesse esser mostruosa, e casuale, ma in appresso dopo molti giorni di replicate ricerche, l' acquisto d' altra simile trovata su i detti lamponi mi determinò a considerarla diversamente. E siccome questa figura d' antenne nelle tentredini era per me tutta nuova, riflettendovi sopra mi ricordai che il Sig. *de Reaumur* nella Memoria III. (*Fig. IV. e V.*) ove tratta della distribuzione generale delle mosche in classi, e in generi, parla d' una mosca che ha le antenne raddoppiate. Ecco quanto ne dice: „ *Quelques mouches ont des antennes* „ *branchues, des antennes composées de deux pieces arti-* „ *culées, des antennes dont chacune paraît double.* “ Ma sebbene ne dia anche la figura (b) non si rileva però qual sia l' insetto che vuole indicare. Vero è che dall' avere la Fig. VI. che è ingrandita quattro ale, pare abbia voluto denotare una tentredine che s' assomiglierebbe nelle antenne alla mia, ma la Fig. V. che presenta l' immagine dell' insetto al naturale non corrisponde punto nè in quanto all' antenne, nè in quanto alla grandezza, onde non potendosi da verun' altra cosa ottenere schiarimento, forza è restar nel dubbio se egli abbia voluto di fatto denotare questa stessa

duobus fasciisque tribus luteis, caput crassum. nova.

112 *Spbex nigra abdom. fasciis binis luteis. nova.*

120 *Musca setaria, thor. lituris quatuor longitudinalibus albidis, femoribus posticis crassioribus. nova.*

Altre specie che parimente sembrano

nuove si tralasciano per brevità.

(a) *Tenthredo Rosæ antennis septem-nodiis, corpore flavo, costa alarum superiorum longitudinali nigra.* Linn. F. L. 1555. Geoff. Paris 2. p. 272. n. 4. Reaum. Inf. 5. t. 14. f. 10. 12.

(b) T. IV. tab. 9. f. 6. e 7. *Reaum.*

tentredine. A mio parere però è chiaro che ciò non è da presumersi in conto alcuno per la ragione che mostrando indubitatamente questo insetto d'essere del genere delle tentredini, s'egli avesse voluto parlare di esso, e indicarlo, non avrebbe semplicemente detto *quelques mouches*, ma avrebbe detto *mouches a scie*, ed avrebbe avvertita questa singolarità anco nella Memoria che tutta si raggira sulle tentredini, ove parlando appunto di quelle che derivano dai falsi bruchi delle rose, dice solamente che i maschi hanno le antenne contornate di peli, e che quelle delle femmine sono lisce.

Infine ristringendo il mio discorso dirò, che per averne un'idea precisa basta immaginarsi la tentredine delle rose, colla differenza soltanto di queste antenne che si diramano, come ho accennato, da un bottone, o nodo ben grosso per formar poi una specie di laccetto composto di due pezzi ornati della solita frangia, o peluria, e un poco più sottili d'un'antenna ordinaria, considerato ciascun pezzo per se solo.

La mia opinione poi sulla natura d'un tale insetto si è, che questo non sia altro che una varietà delle tentredini delle rose, ma varietà propria dei soli maschi, e rarissima per non essermi stato mai più possibile di ritrovarne altre simili in tante e tante da me considerate dipoi.

Nella campagna di Pisa e in qualche altro luogo della Toscana (a) trovasi per lo più intorno alle fosse, ove erbe, o siepi verdeggianti sieno, un insetto d'un genere che sembra nuovo, ma che per varie ragioni, e per essere in qualche maniera simile nella figura alla *Mantis Gigas* del *Linneo*, (b) sebbene non giunge mai ad essere sì grande, nè a metter teche, o ale di forte alcuna, io ridurrò per ora nel numero di quelle, e lo indicherò col volgar nome di locusta, o di cavalletta datogli qui dalle persone della campagna.

R ij

(a) So che si ritrova anche altrove.

(b) *Roefel* t. 27. f. 9. 10.

Questa locusta adunque assai singolare per la figura nuova, e solo conosciuta di semplice vista da pochi per essere ancora noi abbastanza rara, si ciba di varie piante, ed è d'un colore verde erba, la sua testa che è alquanto piegata piccola, e rotonda viene ad essere annessa al torace senza notabile risalto, formando coll' addome un corpo continuato d'ugual grossezza quasi per tutto, in maniera che rassembra ad un bastone, o piuttosto fuscello sostenuto da sei sottili, e lunghissime gambe; delle quali le prime due sono attaccate straordinariamente vicine al capo. Porta sulla testa due antenne brevi filiformi, o piuttosto cilindriche, ed alla bocca quattro palpi consimili. Il suo corpo dalla testa in giù apparisce un poco compresso, e cresce fino alla lunghezza di più di sei pollici, essendo nel maggior diametro largo in circa a tre linee. Al primo aspetto si giudica da chiunque una larva, ed io ho udito tenerli per tale da illustri Insettologi che la conoscevano di semplice vista. (a)

Il lungo uso di raccogliere insetti somministrato avendomi l'occasione di vederne molte in varj tempi di grandez-

(a) Su tal proposito merita che si faccia qui particolar menzione d'un articolo di lettera ultimamente ricevuta dal Sig. Consigliere Scopoli: „ L' „ Insetto del quale ricevei la figura „ a prima vista lo credetti essere la „ mia *Plojaria* descritta nel 1. Tomo „ delle mie *Deliciae Insulariae*, ma esaminando poi attentamente lo trovavo diverso non solamente dalla *Plojaria*, ma eziandio da ogn' altro genere d'insetti finora conosciuto. „ Mi sembra però cosa strana, e quasi „ impossibile che nella classe degli „ *Apteri* o *Lucifughi* diafi in natura „ un animale coi piedi vicini al capo, e colla bocca fornita di barbotine: per le quali ragioni vorrei che V. S. Illustrissima osservasse se quest'Insetto non fosse forse una larva perfetta di qualche altro animale, e se abbia l'altro sesso col quale si accoppi, e produca da tale „ accoppiamento nuovi individui ecc., „ Avendone mandato il disegno anco al

celebre Sig. D' *Antie*, egli ebbe la bontà di rispondermi quanto appresso. „ Je connois l'Insecte dont vous m'avez „ envoyé le dessein. J'en possède même „ me deux individus venus de Province, „ mais ils sont en si mauvais „ état, que je n'ai pas osé les rapporter aux genres. Si j'en juge par „ l'apparence, si je le compare au „ *Mantis filiformis*, il pourrait fort „ bien être regardé de ce genre, mais „ les antennes articulées l'en éloignent. „ C'est à vous, Monsieur, qui avez „ l'Insecte sous les yeux à déterminer „ s'il doit faire un genre nouveau. „ Ce que je puis vous assurer, c'est „ qu'il n'est pas certainement décrit „ dans Fabricius, ni dans Linnée. „ Non so poi come mai anco a prima vista il disegno da me mandato al Sig. Professore Scopoli potesse fargli illusione a segno d'esser preso per la *Plojaria*, senza supporlo straordinariamente ingrandito.

za assai diversa, avendone avute fino di quelle niente più grandi d'uno spillo, e non essendomi intervenuto mai di rintracciare nelle più grandi alcun principio di ale, mi fece nascere il sospetto contro l'altrui opinione che potesse benissimo essere una cavalletta *Aptera*, vale a dire che non mettendo mai ale, giungesse allo stato di perfezione senza alcun cangiamento esteriore.

Frattanto ho avuto in quest' anno 1787 il piacere di vedere colla massima evidenza ch' io non m' era punto ingannato, ed eccone la prova. Intorno alla metà del settembre dell' anno decorso, procurate essendomene quante mai potei, fortunatamente mi riuscì d' avere da una di esse le uova (in numero di sette) che al colore, ed alla consistenza m' apparvero mature. Ciò fu da me ottenuto quasi a caso, e forse in conseguenza del dolore che le cagionai colla compressione del ventre. E benchè un tal fatto bastantemente fin d' allora mi dimostrasse che la mia locusta non era una larva, nondimeno dirò di più che piaciuto essendomi di conservare le suddette uova per vedere se a sorte nascevano, quantunque poco vi sperassi, per non sapere se erano state fecondate, e per averle avute in modo non naturale, pure nel giugno passato ebbi la soddisfazione di riscontrare che due delle sette erano nate, ma allorchè le vidi le trovai morte: distinguevanli però assai bene tutte le parti loro, sebbene nulla più grosse d'un capello.

Le uova che avevano data origine alla nascita di esse s' osservavano aperte in cima, cioè mancanti di quel cappelletto, o coperchio come si osserva nelle uova di molti altri insetti. Queste uova sono nere, non bislunghe come quelle dell' altre locuste, ma piuttosto rotonde, e della grandezza d'un grosso granello di miglio, appariscono come sagriate, ed hanno lateralmente una specie di cicatrice o fetto bianchiccio.

Il maschio in apparenza non differisce dalla femmina, quando valutar non si vogliano due piccolissime appendici che porta alla coda.

In appresso essendo da me stata esaminata internamente qualche altra femmina, ho potuto osservare che gli organi inservienti alla generazione sono situati in quel tratto che

dall'ultimo pajo delle gambe s' inoltra verso la coda, appunto dove principiano a vedersi gli anelli, con aver quivi ancora trovate alquante uova, delle quali alcune erano bianche, ed altre nere.

Ed eccole così determinato, e fatto in parte conoscere un insetto che per la sua singolar figura meritava d' esserlo, e che io ardirei di chiamarlo intanto col nome di *Pseudomanes Rossia*, *Baculiformis Aptera*.

Hab. Pisis in sepibus viventibus ad fossas aquarum.

Magnit. juxta etatem diversa, tota dilute viridis, glabra; Corpore admodum tenui, & prelongo, paullo compresso, instar baculi ubique equali, & caudam versus annulis distincto; caput inflexum, teres, postice angustum, thoraci connatum. Antennae breves, cylindraceae. Ocelli exigui, prominuli, sphaerici. Os tentaculis quatuor subequalibus, labio inferiore bifido. Tibiae, & femora longissima, introrsum denticulata, quorum antica crassiora. Alae nullae. Tarsi quinque uti in Manti. G.

Ma venghiamo ora a parlare di ciò che più la interessa. La storia d' un insetto per la sua industria singolarissimo quale è il ragno muratore (a) scoperto già presso i contorni di Montpellier dall' illustre Sig. *de Sauvages*, e da esso esaminato, e descritto, non era abbastanza nota, da non meritare che altri vi si occupassero per tentare di renderla più chiara.

Essendo a mia notizia che questi stessi ragni si ritrovavano anco nella Corsica m'invogliai d' averne, e le premure d' un gentilissimo Cavaliere ebbero tanta forza da procurarmene alquante case che tutte contenevano il proprio abitatore vivo, e la maggior parte di esse ancora i piccoli nati.

Così avendo avuto occasione ancor io di conoscerli, ed esaminarli alcun poco, ardisco adesso farlene parola, non perchè mi lusinghi che le mie ricerche possano meritare di servire d' aggiunta a quelle del Sig. *de Sauvages*, ma unicamente per dimostrarle la propensione dell' animo mio nell' obbedirla, pregandola solo a concedermi che per maggior intelligenza io cominci dal riportarne quanto fu già dal pri-

(a) Fig. VIII. IX.

mo suo scopritore osservato, con prevalermi dell'estratto datoci dal Sig. *de Bomare* all'articolo *Araignée Maçonne* del suo Dizionario. „ L'araignée maçonne ne tend point de „ filets comme les autres. Elle ressemble presque entièrement „ a celle des Caves, elle en a la forme, la couleur, et le „ velouté : Sa tête est de même armée de deux fortes pin- „ ces qui paraissent être les seuls instrumens dont elle se „ puisse servir pour creuser un terrier, comme un Lapin, „ pour y fabriquer une porte mobile qui ferme si exacte- „ ment qu'a peine peut on introduire une pointe d'épingle „ entre ses joints. Elle apporte, ainsi que les fourmis, et „ plusieurs autres insectes, une grande attention pour le choix „ d'un lieu favorable pour établir son habitation. Elle choi- „ sit un endroit où il ne se rencontre aucune herbe ou ter- „ rein en pente pour que l'eau de la pluie ne puisse s'y „ arreter, et une terre exempte de pierrailles, qui oppose- „ raient un'obstacle invincible a la construction de son do- „ micile. Elle le creuse a un ou deux pieds de profondeur, „ elle lui donne assez de largeur pour s'y mouvoir facile- „ ment, et lui conserver partout le même diamètre, elle le „ tapisse ensuite d'une toile adhérente a la terre, soit pour „ éviter les éboulemens, soit pour avoir prise a grimper plus „ facilement, soit peut être encore pour sentir du fond de „ son trou ce qui se passe a l'entrée. Mais où l'industrie „ de cette araignée brille particulièrement, c'est dans la „ fermeture qu'elle construit a l'entrée de son terrier, et „ auquel elle sert tout a la fois de porte, et de couvertu- „ re. Cette porte, ou trappe est peut être unique chez „ les insectes ; et selon Mr. *de Sauvages* on n'en trouve „ point d'exemple que dans le nid d'un oiseau étranger „ qui est représenté dans le trésor d'*Albert Jéba*. Elle est „ formée de différentes couches de terre detrempées, et liées „ pour empêcher vraisemblablement qu'elle ne se gerce, et „ que ses parties ne se séparent. Son contour est parfaite- „ ment rond ; le dessus qui a fleur de terre est plat, et ra- „ boteux : le dessous est convexe, et uni, et de plus il est „ recouvert d'une toile dont les fils sont très forts, et le „ tissu serré. Ce sont ces fils qui prolongés du côté du trou „ y attachent fortement la porte, et forment une espèce de

„ penture au moyen de la quelle elle s'ouvre, et se ferme;
„ ce qu'il y a de plus admirable dans cette construction,
„ c'est que cette penture, ou charniere est toujours fixé au
„ bord le plus élevé de l'entrée a fin que la porte retom-
„ be, et se ferme par sa propre pesanteur : effet qui est en-
„ core facilité par l'inclination du terrain qu'elle choit.
„ Telle est encore l'adresse avec la quelle tout ceci est fa-
„ briqué que l'entrée forme par son evasement une espece
„ de feuillure contre la quelle la porte vient battre, n'ayant
„ que le jeu necessaire pour y entrer, et s'appliquer exacte-
„ ment ; enfin le contour de la feuillure et la partie in-
„ terieure de la porte sont si bien formés qu'on dirait
„ qu'ils ont été arrondis au compas. Tant de precautions
„ pour fermer l'entrée de son habitation, paraissent indiquer
„ que cette araignée craint la surprise de quelque ennemi :
„ il semble aussi qu'elle ait voulu cacher sa demeure, car sa
„ porte n'a rien qui puisse la faire distinguer, elle est cou-
„ verte d'un enduit de terre de couleur semblable a celle
„ des environs et que l'insecte a laissé raboteux à dessein
„ sans doute, car il aurait pu l'unir comme l'interieur. Le
„ contour de la porte ne deborde en aucun endroit, et les
„ joints en sont si ferrés qu'ils ne donnent point de prise
„ pour la saisir, et pour la soulever. A tants de soins, et
„ de travaux pour cacher son habitation, et pour enfermer
„ l'entrée cette araignée joint encore une adresse, et une
„ force singuliere pour empêcher qu'on en ouvre la porte.
„ A la premiere decouverte que Mr. l'Abbé de Sauvages
„ en fit il n'eut rien de plus pressé que d'enfoncer une
„ épingle sous la porte de cette habitation pour la soulever,
„ mais il y trouva une resistance qui l'étonna. C'était
„ l'araignée qui retenait cette porte avec une force qui le
„ surprit extremement dans un si petit animal : il ne fit
„ qu'entre ouvrir la porte, et il la vit le corps renversé à-
„ crochée par les jambes d'un côté aux parois de l'en-
„ trée du trou, de l'autre a la toile qui recouvrait le des-
„ sous de la porte ; dans cette attitude qui augmentait sa
„ force, l'araignée tira la porte à elle le plus qu'elle pou-
„ voit, pendant que le Naturaliste tirait aussi de son côté,
„ de façon que dans cette espece de combat, la porte s'ou-
vrait

„ vrait et se refermait alternativement. L'araignée bien de-
„ terminée à ne pas ceder, ne lacha prise qu' a la dernière
„ estremité et lorsque Mr. de *Sauvages* eut entièrement
„ soulevé la trappe, alors elle se precipita au fond de son
„ trou. Il a souvent repeté cette experience, et il a toujours
„ observé que l'araignée accourait sur le champ pour s' op-
„ poser a ce qu' on ouvrit la porte de sa demeure. Cette
„ promptitude ne montre-t-elle pas que par le moyen de
„ la toile qui tapisse son habitation, elle sent ou connaît
„ du fond de sa demeure tout ce qui se passe vers l' entrée;
„ comme l' araignée ordinaire qui par le moyen de sa toi-
„ le prolonge, si cela se peut dire, son sentiment a une gran-
„ de distance d'elle? Quoiqu' il en soit elle ne cesse de fai-
„ re la garde a cette porte de la quelle y entend ou y sent
„ la moindre chose; et ce qui vraiment singulier, c' est que
„ pourvû qu' elle fut fermée, Mr. l' *Abbé* de *Sauvages* pou-
„ vait travailler aux environs, et cerner la terre pour en-
„ lever une partie du trou sans que l'araignée frappée de
„ cet ebranlement, ou du fracas qu' elle entendait, et qui
„ la menaçait d'une ruine prochaine, songeat à abandonner
„ son poste; elle se tenait toujours collée sur le derriere de
„ la porte, et Mr. de *Sauvages* l' enlevait avec, sans pren-
„ dre aucune precaution pour l' empecher de fuir. Mais si
„ cette araignée montre tant de force, et d' adresse pour
„ defendre ses foyers, il n' en est plus de même quand on
„ l' en a tirée, elle ne parait plus que languissante, engour-
„ die, et si elle fait quelque pas ce n' est qu' en chancelant:
„ cette circonstance, et quelques autres ont fait penser a
„ nôtre Observateur qu' elle pourrait bien être un insecte
„ nocturne que la clairté du jour blesse, au moins ne l' a-
„ t-il jamais vû sortir de son trou d' elle même, et lorsque
„ on l' expose au jour elle parait être dans un element
„ etranger. Cette araignée se trouve sur les bords des che-
„ mins aux environs de Montpellier, on la rencontre aussi
„ sur les berges de la petite riviere de *Lez*, qui passe au-
„ pres de la même Ville. On n' a pas de connaissance qu'
„ on l' ait encore decouverte ailleurs, pout être n' habite-
„ t-elle que dans les pays chauds. La maniere singuliere dont
„ se loge cet insecte si différent des autres araignées inspire

„ naturellement la curiosité de savoir comment il vit, com-
 „ ment il vient a bout de se fabriquer cette demeure ecc.
 „ mais il faut attendre des nouvelles observations. Jusqu'
 „ ici quelques efforts qu' ait fait Mr. de *Sauvages* pour con-
 „ server ces araignées vivantes, il n'a put y reussir; elles sont
 „ toutes mortes malgré ses soins, et conséquemment il n'a pû
 „ pousser plus loin ses decouvertes sur leur maniere de vi-
 „ vre. “

Ma venendo ora a quei di Corsica che sono stati il sog-
 getto delle poche mie osservazioni, è da sapersi, che aven-
 do ricercato colà a persone pratiche, ed intelligenti, le no-
 zizie che si avevano intorno ad essi, n' ebbi solo in risposta:
 „ On ne peut indiquer l' epoque ou l' araignée Maçonne,
 „ ou mineuse à commencée à être connue en Corse, peut
 „ être l'a-t-elle été de tout tems; il semble qu' il y a eut
 „ peu d' observations sur cet insecte dans le pays. On ne
 „ trouve personne qui puisse dire sous quel nom on l' y con-
 „ nait. Quelques uns l' ont confondu avec un' autre araignée
 „ comunement nommée *Marmignatto*, mais c' est un erreur, le
 „ Marmignatto est plus petite, noire rayée de rouge: Sa
 „ pique est fort dangereuse, elle exige des remedes fort
 „ prompts. On n' assure pas que l' araignée Maçonne ait les
 „ mêmes qualités nuisibles. On trouve l' araignée Maçonne
 „ dans les lieux fraix, mediocrement humides, toujours dans
 „ la pente d' un terrain coupé en talus, ce qui est dans son
 „ instinct pour preserver son habitation de submersion. Sa
 „ demeure est construite par elle dans une terre friable, de-
 „ bris des couches schisteuses. Cette terre est d' un gris ti-
 „ rant sur le jaune. L' insecte en forme avec le même glu-
 „ ten, dont elle se sert pour faire son fil, une sorte de mor-
 „ tier dont elle enduit un trou profond, et rond qu' elle a
 „ pratiqué. Elle tapisse l' interieur de cette espee de ca-
 „ nal du même gluten soyeux, elle forme en haut du ca-
 „ nal, et à l' une des parties seulement un burelet qui lui
 „ sert de charniere pour attacher le couvercle de même
 „ matiere qui à gré bouche ermetiquement sa retraite. Per-
 „ sonne ne dit avoir vû cet insecte hors de sa demeure.
 „ Sa vie parait bornée a une année. La description que don-
 „ ne Mr. *Valmont* de Bomare de l' araignée Maçonne, ou

„ mineuse d'auprès de Montpellier convient a merveille a l'
„ araignée dont nous parlons , et on ne peut rien ajou-
„ ter etc. “

Acquistate tali notizie mi posi la mattina del dì 17 agosto 1786 per la prima volta intorno ad esse case (a) col fine d' esaminarle, e siccome tra quelle avute ve ne erano alcune naturali, ed altre rifatte, o come dicono ripasciute, cioè al di fuori rotondate , e a forza d' acqua colla mano rendute lisce, mi proposi per allora di volerne sacrificare una per sorta all' oggetto d' osservarne l' interna struttura, di vedere il ragno, e conoscerne l'umore, e l' indole.

Coll' ajuto dunque d' una piccola fega divise avendole amendue per lo lungo , comparvero allo scoperto i ragni circondati da un numero prodigioso di figliuolini, che sparsi qua e là, ed anco un sopra l'altro rivestivano in buona parte l'interno delle case. Tirate fuori la madri in luogo percossò dai raggi del sole si diedero a fuggire, non colla massima velocità, ma nemmeno con tanto languore, e debolezza come viene riferito accadere in quelli di Montpellier. Incontratesi insieme s' azzuffarono fieramente colla peggio d' una di esse , che restò da questo conflitto assai malmenata. I piccoli che mi parvero interamente bianchi alla riserva d' avere due punti neri assai visibili nel posto ove stanno gli occhi, furono da me gettati subito nello spirito di vino, cosicchè rimaste essendo libere le case dai suoi abitatori, potei con sicurezza vederne la grossa interna tela che le riveste , ed ammirare l' artificio semplicissimo messo in opera per farla servire di cerniera mobile alla valvula , o piccola porta nel mentre che la ricuopre, consistente soltanto nell' essere in quel luogo mancante di terra , onde potersi con facilità sollevare la porticina, e richiudere obbligata dal proprio peso, e dalla situazione diretta ad un tal fine. Questa porta però non è di quella semplicità che pare a prima vista. A giudicarne senza disfarla, si crede che sia della terra unicamente raccomandata alla tela che serve a soppannar-

S ij

la, ma non è così. Essa è fatta a strati uniformi composti di tela, e di terra sopra impastata fino alla grossezza che deve avere; la tela di questi strati comincia a dividersi dal luogo ove fa l' uffizio di cerniera, e sembra che tutto ciò sia all' oggetto di dare alla porta una maggiore stabilità, e consistenza, poichè se fosse (come pare non esaminandola) un qualche accidente potrebbe forse far cader la terra, ed in questo caso si ridurrebbe ad essere una poco sicura difesa di semplice tela.

Rilevai anche nella fodera di detta porta alcuni piccoli buchi, o maglie distribuite in giro, delle quali avremo luogo di parlare in appresso.

Rispetto alla parte esterna di queste case, null' altro seppi io osservare di nuovo, se non che non esser sempre vero, che questi ragni scielgano un terreno spogliato d' ogni erba, e molto meno d' ogni pietra, per non incontrare un ostacolo invincibile alla costruzione del loro domicilio, poichè anzi la terra (almeno nelle mie) si trova ripiena di sassi piccoli, e grandi, e sembra piuttosto, come ho osservato, che incontrati gli evitino col ritorcere altrove quella loro specie di canale.

Per darle poi una qualche idea di questo ragno, le dirò che tutto il suo corpo è un poco vellutato, ma nelle gambes ha dei peli assai più lunghi, ed ispidi, come pure nella parte anteriore del torace, e inferiormente fra le morse, o tenaglie: il colore di esso è bruno nerastro, più cupo nel di sopra dell' addome che sul torace, e questo stacciandosi si dilata molto a segno che per il largo supera l' estensione del ventre che è di forma quasi ovale.

Questo ragno ha i palpi, o antenne pediformi, cioè composti di più pezzi articolati insieme, le quali in nulla differiscono dalle gambe, e le uguagliano anco in lunghezza ed in figura, in modo che sembra avere dieci gambe, tutta la diversità consistendo nell' avere queste in cima una sola ugnà, a differenza delle vere gambe che ne hanno due. Gli occhi hanno presso a poco la stessa disposizione di quelli del ragno vagabondo, e del ragno lupo, cioè quattro nella prima linea trasversa disposti due per parte, e molto uniti insieme, talchè a prima vista sembrano due soli, i due secondi che

succedono sono i più grossi, ed occupano la linea più breve, gli ultimi due sono i più distanti formando una specie di quadrato imperfetto, le tenaglie sono forti, lacertose, e terminate in una breve punta acuta al modo degli altri. Ha poi all'estremità del ventre sopra all'ano due papille grosse, e prominenti da ciascuna delle quali estrae doppio filo.

Aranea Sauvagii

Hab. prope montem Pessulanum, & in Corsica ad margines viarum, ubi terram excavando, domicilium struit operculo mobili clausum in quo se se occultat, & noctu exit.

Est (Corsicana) inter maximas generis sui tota fusco livida, hirsuta, pedes insuper hispidi, unguati; palpi pediformes, æquales. Oris forceps robusta, nigra; thorax antice gibbus, postice dilatatus. Abdomen ovato oblongum, atrum, holosericeum, ano obtuso duobus appendiculis prominentibus, e quibus trahit fila quatuor disjuncta.

Io sono stato, come Ella può immaginarsi, assai curioso per voler soddisfarmi ancora intorno alla sorprendente e tragl' insetti non più udita avvedutezza che ha questo ragno d'accorrere ad ogni piccolo rumore alla porta, opponendosi col tenerla e tirarla a se che altri si procurin l'accesso in sua casa. Eccole dunque ciò che ho notato. Se si tenti di porgli a lieva con un ferro, o un forte spillo la porta, si vede il ragno che con i quattro piedi davanti la tira a se, e ciò viene da esso eseguito per mezzo dell'ugne, colle quali si attacca alla grossa tela di cui è foderata, e dove pare ch' espressamente vi sieno stati fatti dei buchi, o maglie per introdurvele. La forza con cui la tiene è sorprendente, se si abbia riguardo alla mole dell'insetto, ma vero è che presto si stanca; ed allora cedendo il campo si ritira nel fondo di casa, che è la stanza sua favorita. Se si metta un ostacolo che obblighi la porta a stare mezza aperta, dopo poco viene il ragno dal fondo, lo leva con un piede, e richiude la porta: se gli si ponga la casa a rovescio, cioè in maniera, ch' essendo stata aperta la porta, per non esser più questa obbligata dal suo peso non solo non si chiuda da se, ma anzi abbia bisogno della massima forza per rinchiudersi, si vede accorrere il ragno che dopo averla invano cercata col piede dall'altra parte, introducendo al solito le ugne

nella tela, tenta tirarla a se, ma dopo varj sforzi inutili s'appiglia subito al partito di fare più internamente una tendina, o portiera che eseguisce in pochi momenti, col mezzo delle due appendici, o papille che ha all'estremità del corpo, da ciascuna delle quali, come si è detto, esce doppio filo. Questa tendina viene in seguito rinforzata dalla terra che unisce, e che stacca dalle pareti della casa, in modo che nello spazio di poco più d'un giorno, viene a farsi una seconda porta, la quale però non è mobile, nè atta ad aprirsi come la prima; da tutto ciò pare potersi concludere che questo ragno sia d'un' indole timidissima.

Bramando di sapere qualche cosa di più intorno alla nascosta e solitaria vita di questo ragno, malgrado tutte le difficoltà che mi si presentavano per non potere esaminargli nel luogo nativo, e per non piacermi sul dubbio d'esser venefici di dar loro alloggio nel mio piccolo giardino, pensai di far fare un' assai grande cassetta di vetro, e la mattina del dì 26 agosto, ripiena avendola d'una terra precisamente simile a quella delle case in cui si trovavano parte sciolta, e parte legata in zolle, vi accomodai tre delle sopradette case, cioè una feci che stesse sotterrata restando soltanto scoperta dalla parte superiore ov' era la porta, e le altre due furono da me adattate a conveniente distanza tra loro, e in quel modo che credei più naturale, sopra il piano della terra di detta cassetta. Di poi per assicurarmi se il ragno di notte usciva di casa, (giacchè di giorno no certamente) immaginai d'accomodare sopra le rispettive porte di queste case dei segni come dell'arena, ed altro in guisa che se mai fossero state alzate, io dovessi accorgermene dalla caduta di essi. Tutto questo feci io la mattina del dì 28 agosto e sulla sera rivisitate avendo le case, tutto era al suo posto: la mattina dopo riesaminate trovai che le due porte ove era stata posta l'arena non erano state atterrate, ma non così era però di quella ove collocato aveva uno spillo, che osservai caduto molto lontano; non dubitai dunque che fosse stata nella notte aperta, e sospettai che potesse essere anco uscito di casa il ragno. In fatti esso era uscito, perchè alla distanza di dieci pollici, osservai sulla terra un piccolo ammasso di materia mucilaginosa unita a del-

la tela che si vedeva essere di ragno. Considerato questo ammasso trovai ch' era un composto di globuletti che avevano l' apparenza come di bucce, e di uova andate a male, credei doverlo lasciare nello stesso luogo senza perderlo di vista, ma non ne risultò alcuna cosa, e dopo qualche giorno vi comparve sopra la muffa.

Ai 30 agosto provai a chiudere in una delle dette case che conteneva il solo ragno senza i piccoli nati un grillo, (a) e poco dopo riaprendo la porta potei osservare che gli era addosso, ed appariva mangiarlo. Lo stesso seguì avendo ivi introdotta una grossa mosca (b). Dal non aver potuto ritrovare più in casa le spoglie ne congetturai che potesse averle trasportate fuori, ma non vi fu modo d' assicurarvene, perchè nell' istessa cassetta ve n' erano dell' altre sì di mosche, che di grilli mellivi col fine di porger loro onde cibarsi.

Nella mattina del dì 7 settembre volli vedere che cosa accadeva facendo sloggiare il ragno dalla propria casa: presa dunque quella di cui m' era servito nel 30 agosto, vi feci un buco nel fondo tanto da poterci introdurre un fuscello, poi rimessa avendola nella cassetta orizzontalmente e a porta aperta, cominciai a molestarlo col fuscello; scostossi subito il ragno ritirandosi verso la porta, ma perseguitato fin là fu costretto ad abbandonarla, e a cercare colla fuga uno scampo: dopo avere scorsa per una o due volte tutta la cassetta, fermossi in un angolo dove la terra aveva un piccolo incavo, lì si trattenne per un' ora in circa, ma poi lasciato quel posto andò a trovarne altro più coperto tra la terra e il cristallo formante una parete di detta cassetta: ed in questo vi si fermò immobile tutta l' intera giornata, senza curar di ritornare, come già m' immaginava, nell' antica abitazione ivi lasciata a porta socchiusa. La mattina del dì 8 detto trovai che il ragno non v' era più, nè potei rilevare da verun segno dove si fosse nascosto: la terra avendo delle fenditure lo credei verisimilmente entra-

(a) *Gr. Pedesfris Linn.*

(b) *M. Camaria Linn.*

to in una di quelle, ed in appressò, per quanto sempre vi abbia fatta attenzione, non è più stato possibile il rivederlo.

Dopo questo tempo avendo lasciati i miei ragni in riposo, non mi sono accorto che sia succeduta cosa alcuna degna di esser notata sino al 20 febbrajo di quest' anno, giorno in cui mi piacque di sapere con sicurezza se pure anche vivevano essi, e che cosa fosse stato dei piccoli nati, dei quali da che riposi in cassetta le cose null' altro aveva sin' allora saputo. Presa dunque quella casa ch' era semplicemente posata sul piano della cassetta, ed esaminata ancor l'altra non vidi che vi esistesse più alcun figliuolino, e per accertarmi se la madre era morta o viva, bisognò col solito mezzo forzarla ad uscire di casa. Uscì di fatto, e dopo essersi alquanto aggirata intorno ad essa, si diede a cercar di nascondersi; fu però quindi a poco costretta a rientrare nel suo domicilio stato da me avanti risarcito nel fondo, e di lì a qualche ora osservai che si era chiusa dentro anco da capo, cioè dalla parte della valvula colla solita tela. Appagata questa curiosità non seppi immaginare altro tentativo da sperimentarsi allora, e mi ridussi a creder che non fosse necessario altro che provvedergli di tempo in tempo d' alimento per aspettar poi il settembre, cioè dopo che fosse trascorso l' anno, a vederne l' esito, e fare alcune prove.

12 Settembre il ragno della casa che orizzontalmente posava sul piano della cassetta fu ritrovato morto, e si vedeva che lo era da qualche tempo. Quello dell' altra casa viveva sempre, ma in istato di languidezza e posto in un vase di vetro campò sole sei ore. Dell' altro che fu obbligato a sloggiare di casa, e cercarli un asilo nelle fenditure della terra della cassetta, non fu possibile per quanta diligenza usassi di trovare nemmeno il più piccolo segno di spoglia; esso però nel tempo della sua ritirata li era scavato un nuovo canale, o casa che aveva anco leggermente soppannata della solita tela. L' opera era imperfetta, e la sola congettura ch' io potei formare sulla mancanza di lui fu il dubbio che fosse restato vittima di qualcuno dei suoi compagni.

Ed ecco quale fu il fine e il risultato delle mie premure, dal quale venni sempre più a persuadermi dell' inefficacia, ed imperfezione delle osservazioni che s' intraprendono

dono fuori del luogo nativo , ove oltre alla mancanza di tutti quelli individui che v' abbisognerebbero , siete costretto a porre in uno stato di schiavitù, il più delle volte nociva agli esperimenti , quegli animali la cui vita tanto vi piacerebbe di poter conoscere .

Per rimediare in parte a questo difetto, io sono stato premuroso di nuovamente richiedere in Corsica ulteriori notizie, o schiarimenti intorno a questi ragni, ed ecco quanto un illustre Naturalista incaricato per quanto mi vien detto dalla Francia di scrivere sulle cose più notabili di quell' Isola ha avuto la gentilezza di rispondere. „ L' araignée maçonne „ est ainsi surnommée parcequ' elle est la seule entre tous „ les insectes de la même espèce qui se fabrique une loge, „ ou demeure. Sa vie paraît bornée à une année. Sa demeure „ est construite par elle dans une terre friable , debris de „ couches schisteuses. Cette terre est d' un gris tirant sur le „ jaune, l' insecte en forme avec le même gluten dont elle „ se sert pour faire son fil , une sorte de mortier dont elle „ enduit un trou profond, & rond qu' elle a pratiqué. Elle „ tapisse l' intérieur de cette espèce de canal du même gluten „ foyeux. Elle forme en haut du canal, et à l' une des parties „ seulement un bourellet qui lui sert de charnière pour „ attacher le couvercle de même matière qui à son grés bouche „ hermétiquement sa retraite. C' est en aout qu' elle atteint la „ grosseur qu' elle peut avoir . C' est alors qu' elle est „ provoquée à l' amour ; c' est alors qu' elle fuit au moins „ bruit, et qu' elle est plus timide . En septembre elle „ devient mere, et méchante en même tems , c' est à dire „ qu' elle ne fuit plus et qu' elle est plus vorace. Les mouches „ les moucherons, les petits vers lui servent, de pâture „ elle les prend dans des filets qu' elle étend, et attache „ sur les inégalités des terres voisines de sa demeure. La fourmi „ semble être son ennemie, leurs habitations ne sont jamais „ l' une près de l' autre . Sa morsure ou pour mieux dire sa „ picqûre n' est point dangereuse comme celle de la „ Marmignatte autre araignée de Corse &c. “

Potrei, pregiatissimo Sig. Conte, se non temessi di soverchiamente annojarla, aggiungerle ancora un non piccolo numero d' altre osservazioni, ma per non abusarmi di sua gen-

tilezza le riserberò ad altro tempo, e mi ristringerò soltanto ad accennarne qui alcune che in poche parole si espongono. Voglio dunque dire d'aver osservato che tra i bruchi avvenne più d'una specie che a giusta ragione potrebbero chiamarsi carnivori: oltre quella specie da me ritrovata su varie piante, come sulla *Malva Alcea*, sulla *Lantana Camara*, che si pasce delle larve della *Pb. N. Gamma* stata da me già descritta in altra Memoria diretta all'immortale mio veneratissimo amico il Sig. Abate *Spallanzani*, stampata poi nel Giornale dei Letterati di Pisa, io ne ho in quest'anno incontrata un'altra specie egualmente carnivora nella larva della *Pb. Farinalis* essendomi accaduto con mio dispiacere di vedermi divorate alcune crisalidi della *P. B.* Bucephala* ch'io conservava tra delle foglie in un polveriere.

Passeggiando nell'orto botanico di Pisa m'accadde d'osservare sul *Lentisco*, detto volgarmente *Sondro* da cui deriva la resina conosciuta col nome di mastice, alcune foglie irregolari che rammentandomi l'*Aphis Pistacis* del Linneo fissarono la mia attenzione. Colta una di queste foglie fu facile l'accorgersi ch'essa non era altro che il nido loro (a). L'artificio con cui questi involvuli, o nidi erano formati m'invogliò a procurarmene tutti quei più che potei per esaminargli. Frattanto la prima cosa che rilevai fu l'uniformità, e somiglianza della figura, fatti essendo in forma di rene, e prodotte dal raddoppiamento d'un lobo solo della foglia straordinariamente cresciuto e ingrossato, che a guisa di tasca si richiude lungo la costola per mezzo d'una perfettissima unione. Le foglie che formano questi involvuli terminati in una punta, o codetta semplice vengono ad essere mancanti dell'altro lobo, forse perchè il sugo nutritivo si trasporta tutto al ricettacolo: sono però tali che uno non pratico non si accorge che sieno nidi, e le prende per foglie mostruose. Questi hanno nella pianta diverse età, come si vede dalla diversa grandezza, e dal colore che in qualcheduno di verde è passato ad esser giallo rossiccio. Avendoli aperti,

(a) E' noto che la stessa specie si trova sul *Lentisco*, come sul *Pistacchio*, e sul *Terebinto*.

cioè allontanati i lobi che ne univano esattamente l'apertura, furono da me osservati tutti ripieni di piccoli candidissimi *gorgoglioni* che ivi se ne stavano involti in un'untuosa, bianca e attaccaticcia farina, o lana che voglia chiamarsi. Regolarmente in quegl' involvuli che non hanno ancora cambiato colore si trovano in maggior numero, e più di cento, ma tutti senz'ale, e la bianca polvere che gli avvolge è in molto minor quantità: quei ricettacoli che hanno acquistato al di fuori un color rossiccio ne contengono molti degli alati, chi più, chi meno, secondo la maggiore, o minore maturità degl' involvuli; potendosi dal colore di essi giudicare se vi si troveranno dentro i *gorgoglioni* alati, o se per esser cominciati ad appassire gli avranno abbandonati in parte, o del tutto per non aver più bisogno di starvi rinchiusi. Giunti essi in istato di ultima perfezione di tutti candidi che erano divengono nella testa, nel torace, e nelle gambe d'un color nero tendente al ceruleo, acquistando molti di essi quattro ale trasparenti, e in proporzione del loro corpicciuolo assai grandi. Hanno alla testa due antenne moniliformi con cinque articolazioni, o nodi, l'ultimo dei quali è molto più lungo, il rostro loro è dei corti, la lana o farina che traspirano dal corpo, non si trova da chi l'assaggia punto dolce ma insipida, onde le formiche non hanno molto onde darsi di questa loro difesa, e ritiratezza che non gli rende però sicuri da alcuni vermi afidosagi, i quali forandone gl' involucris vi s' introducono (a).

Non so se da Lei sia stato avvertito considerando la mia Collezione d'Insetti, che se in nulla essa abbonda, ciò è nella classe degli Hymenopteri, ed in ispecie nei generi delle *Sphex*, delle *Vespe*, e dei *Crabro*. Ciò è addivenuto credo io, in grazia di aver sofferto con molta costanza i cocenti raggi

T ij

(a) *A. Pistacia nigra alis albidis tibis longissimis. thor. verrucoso. Lin.*

Leniscoli folliculus reniformis compressus ex parte laterali folii aucta; cum hic folliculus viridis est, vivunt in eo aphides, cum vero devum ruber evasit,

ex eo exiere per linearem aperturam; Aphides flavæ annulis 10., rostrum inflexum, oculi nigricantes. antennæ moniliformes; abdomen postice muticum. lannugo alba globulis albis pellucidis mixta sæpe adhæret abdomini postice. Vandellius.

del sole nell' ore estive più calde in traccia di essi . Or tra questi conservo un piccolo *Crabro* che alla figura s' accosta molto a quella specie che il Sig. di *Geofroy* chiama *le Frelon a epaulettes* . (a) Allorchè lo presi egli ebbe la gentilezza di bucarmi in due luoghi distinti nel tempo stesso, avendo armata la coda, a differenza degli altri, non d' una, ma di due aculei, o aghi dentati nascosti che velocemente vibrando mandava uno a destra, ed. uno a sinistra, interi, e perfetti e derivanti da base diversa, tali quali ce li descrive il Sig. *de Reaumur* parlando di quelli delle api. In seguito ho potuto osservare che ciò è comune anche a qualche altra specie che ridurre potrebbe al genere delle *Sphex*.

Ella conosce bene la larva (b) comune della *farfalla a testa di morto* che *Linneo* chiama *Sp. Atropos*. Sappia che si dà tra queste una varietà ch' io non trovo avvertita da alcuno, diversissima nei colori e nelle macchie dalla già nota, per essere questa, come potrà vedere dalla qui annessa figura, tutta d' un color cupo tanè serpatato con tre macchie bianche assai grandi dopo il capo nei primi anelli. (c) Io l' ho trovata sempre a stagione avanzata, vale a dire nel settembre, e nell' ottobre; la prima volta sull' agnocasto (d) e poi tutte le altre volte sul gelsomino volgare, e da essa ho ottenuto sempre degli individui maschi. Sarebbe questa mai un distintivo di sesso? Per determinar ciò decisamente, mi resta ad esaminare il sesso di quelle che derivano dalla larva ordinaria, di cui la spoglia è vagamente macchiata di verde, e celeste sul dorso. (e) Le unisco la figura d' un verme partico-

(a) *Crabro niger subhirsutus fronte thorace superne abdomineque flavis* 1. 2. & 4. *ex parte nigris*. *Geof.* 1. 2. p. 262. n. 1.

(b) La figura colorita di questa larva che dal' Albino non è molto buona, quella che trovai in *Roefel* è assai più naturale.

(c) Essa è talmente diversa che i soli segni della testa consimili in questa, come nell' altra, la possono far ravvisare per quella che è. Da quegli in

fatti potei riconoscerla la prima volta che la incontrai.

(d) *Vitex foliis angustioribus*.

(e) Questo mio dubbio quantunque mi parebbe assillito da molta probabilità, e dal fatto per non avere io mai fin qui ottenuto da queste larve alcun individuo femmina, pure devo confessare adesso che è falso. Nel dì 20. dicembre mi nacquero con mia sorpresa, e senza che io ne avessi procurato lo sviluppo in alcun modo, due

Fig VI

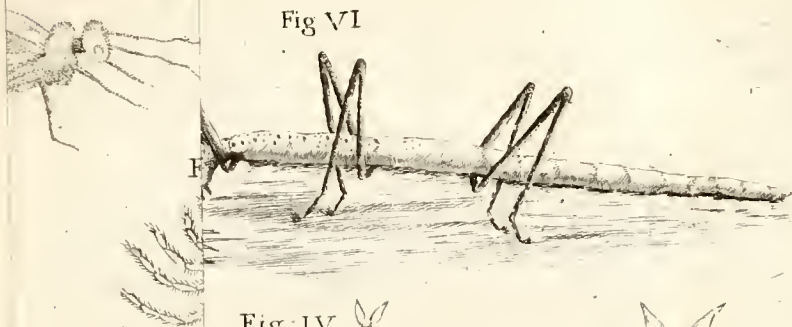


Fig. IV



Fig: V

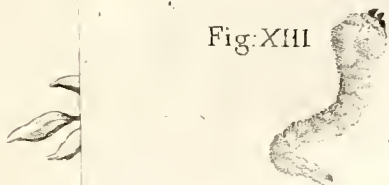
ingrandita



g: X



Fig: XIII



Muratore

licono ripasciuta

Fig. I



Fig. II



Fig. III



Fig. VI



Fig. VII

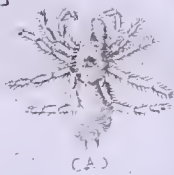


Fig. VIII

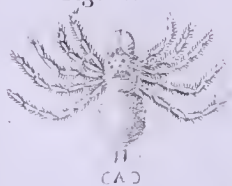


Fig. IV



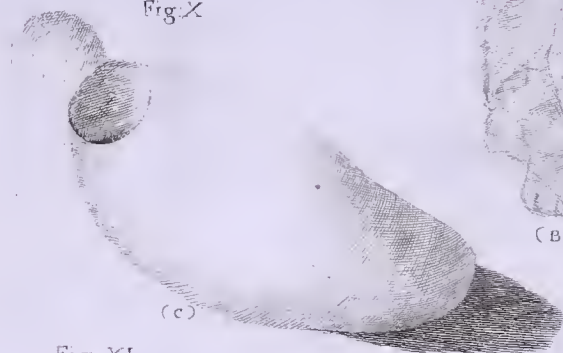
Fig. IX

Fig. V

ingrandita



Fig. X



(B)

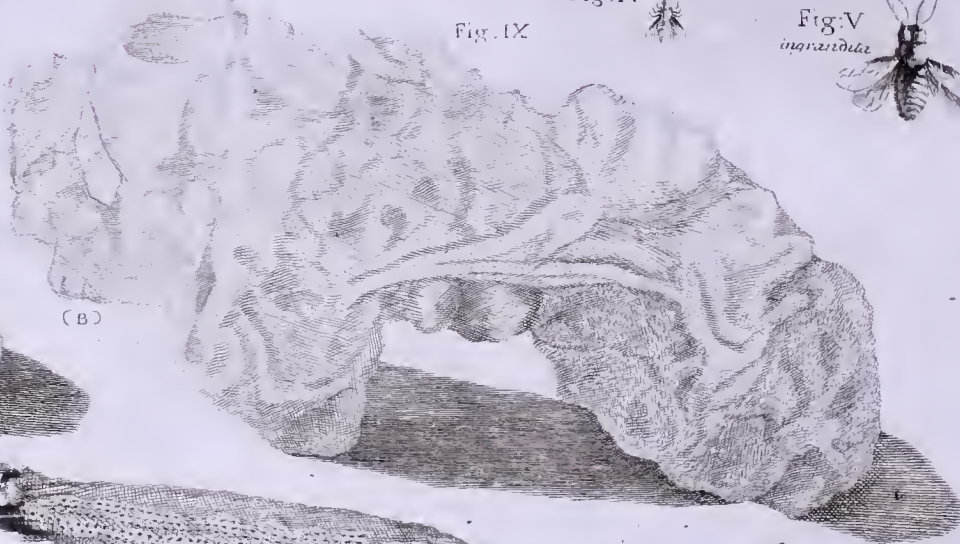


Fig. XI



Fig. XII

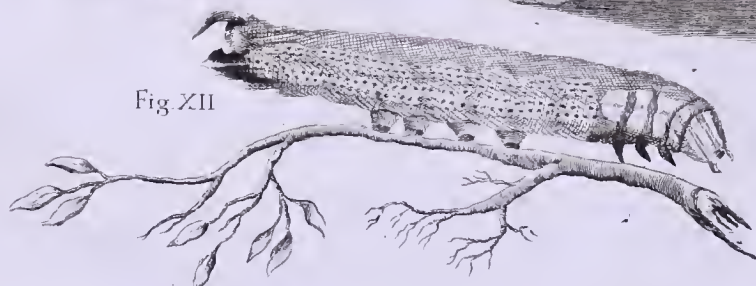
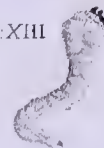


Fig. XIII



(A) Ragno Murellore

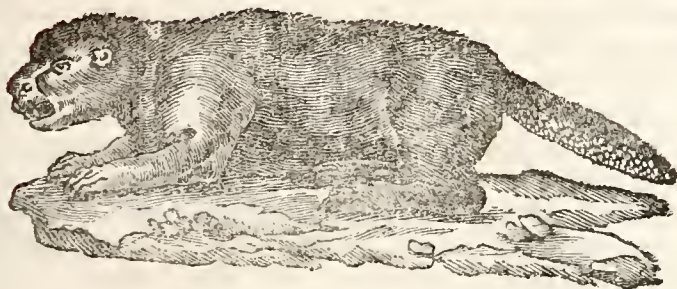
(B) Casa al notturno

(C) Casa rifatta, o come i corni dicono rifasciata

lare stato trovato dentro al legno di ciliegio (*Fig. XIII.*) che è tutto di un color bianco lucente come l'avorio.

Intanto accolga , gentilissimo Sig. Conte , quel poco che l'abbattuta mia salute mi ha permesso di ora umiliarle, e mi creda quale colla più alta stima , ed ossequio ho l'onore di essere suo ecc.

Pisa il 26 Dicembre 1787.



T iij

farfalle a testa di morto provenienti da larve simili alla fig. 12. e trasformate in crisalidi nei primi d'ottobre, una delle quali era femmina. E ciò combina (ora che mi ricordo) con quel che fu da me un'altra volta osservato su due individui avuti dalla larva comune già

conosciuta, i quali furono due maschi, come apparisce dalla mia Istoria di questa singe stampata negli Opuscoli scelti di Milano. Dipenderà dunque tal varietà dalla diversa stagione in cui nascono?

RIFLESSIONI

ED ESPERIENZE SULLA PRETESA CASTRAZIONE DELLE POLLASTRE, E SULLA FECONDA- ZIONE DELL' UOVO.

Del Sig. GIO. FRANCESCO CIGNA Professore di Anatomia nella Regia Università di Torino.

LI gravi sconcerti di mia sanità non avendomi fin' ora permesso di adempiere i miei doveri verso questa rispettabilissima Compagnia, che mi ha sì graziosamente prevenuto col compartirmi il distinto onore di annoverarmi fra gl' illustri suoi membri; nè potendo per ora offrirle, siccome avrei desiderato, il ben giusto tributo di qualche letterario lavoro frutto di più profonde ricerche, ho pensato di presentarle queste poche esperienze, e riflessioni, quali mi ha permesso lo stato attuale della cagionevole mia salute in tenue contrassegno della mia buona volontà, e della perpetua mia riconoscenza.

E' nota l'osservazione di *Fabricio da Aquapendente* (a) confermata da *Harveo* (b), e da molti altri, che un solo accozzamento del gallo basta per rendere feconde tutte quelle uova, che la gallina partorirà in tutta quella stagione, anzi in tutto quell' anno.

Il qual fatto pare avesse in mira lo stesso *Fabricio*, quan-

(a) *Mulieres gallinam domi gallo destitutam habentes eam per unum, atque alterum diem alibi gallo committunt, ex hoc enim exiguo tempore succedit ovorum omnium fecunditas per totum illud anni tempus. Id quod Aristoteles lib. 3. de Gener. Anim. cap. I. confirmat, qui vult, quod cum semel aves coierint, omnia fere ova fecunda habere perseverent. Vid. Aut. Opera Omn. Anat.*

Phys. Lugdun. Bat. ed. p. 20.

(b) *Gallinam (a gallo) secluse, quae decimo ab inde die ovum peperit, aliudque die vigesimo, & utrumque fecundum. Ut videatur posse unum, atque alterum coitum integrum racemum, omniaque illius anni ova fecunda reddere. Harv. De gen. Exer. 5. Pag. mibi 24.*

do propose la sua ipotesi, che lo sperma del gallo fosse ricevuto in certa borsa posta fra l' uropigio e la cloaca della gallina, e comunicante con essa cloaca per mezzo di un tenue forellino, che trattenendoli ivi lo sperma conservasse la sua virtù prolifica, (a) e quasi per irradiazione la spandesse nell' utero, onde le uova tutte dappoi nel cadervi ne fossero fecondate.

Nè solo questa ipotesi di *Fabricio* (b) riesce comoda per spiegare la fecondazione di molte uova da un solo accozzamento; ma inoltre va esente dalle gravi difficoltà, che si incontrano da coloro, che suppongono operarsi la fecondazione nel medesimo ovajo; imperciocchè ammettendo anche che l'uova menome, ed immature, che non sono per distaccarsi se non dopo molti giorni egualmente che le grandi, e prossime al parto, sieno suscettibili, e capaci di fecondazione, (c) è presso che impossibile ad intendersi come l' aura fecondante, e molto più lo sperma del gallo debolmente spruzzato dalle brevissime verghe, o piuttosto papille (d) possa arrivare all' ovajo per la lunga, e tortuosa via dell' ovidutto, perpetuamente spalmata di abbondante muco senza esservi inceppato, e disperso.

Quindi è che lo stesso *Malpighi*, in conformità dell' opinione *Fabriciana*, propendesse a credere, che lo sperma del maschio si conservi colla sua attività in qualche riserbatojo della gallina per poter servire successivamente alla feconda-

(a) Porro seminis fecundandi virtus, ne ullo modo exhalare possit, sed diutius in utero consistere, ac toti impertiri, natura ipsum conclusit, repositumque in cavitatem, quasi bursam podici vicinam, & utero appensam, & ingressu tantum donatam, ut inibi diutius semine retento, virtus ejus magis conservaretur, & universo communicaretur utero... In hanc autem vesicam eo facilius semen, penisque galli immititur, quo sursum motu voluntario a gallina, uropigio revoluta, rectior, breviorque in vesicam paratur via, iterque: quæ vesica in gallina indica major apparet. sed in nostrate conspicua quoque est. *Fabr. l. c. p. 20. col. 2.*

(b) Galli semen in uteri principium jactum efficere totum uterum, & simul quoque omnes vitellos eo cadentes, ac totum denique ovum fecundum, idque facere sua facultate seu spiritali substantia irradiante 36. p. 20. Col. 1.

(c) Vedi *Paitoni*. Della generazione dell' uomo. *Dilcor. iv. p. 165.*

(d) Licet gallus nec penem, nec glandem habeat, vasorum tamen deferentium extremitas spiritu, dum coit, inflata, glandis more turgescit, quo uteri gallinæ orificium aperto podice retectum comprimit, humoreque suo genitali oblini *Harv. L. C. Exerc. 38. p. 131.*

zione delle uova, che col tempo si rendono mature, non altrimenti che nelle farfalle; *in quibus*, come egli scrive, *ingens bicornis vesicula extremo appenditur ovario, a qua glutinosus perpetuo catillat ichor in cavitatem vaginæ, quo masculinum semen, aliisque etiam a laterali loculo eructatus humor excipiuntur, & foventur, quibus omnibus pertransseuntia ova irrorantur, & fecundantur, & ita per plures dies plastica illa vis conservatur, & subsequentibus diebus excurrentibus ovis communicatur, quod pariter in gallinis conjectari licet, in quibus seminis semel recepti energia non parum conservatur, ita ut successivo etiam tempore ova facundentur.* (a)

Per altra parte non si può dissimulare, che la Fabriciana ipotesi soggiace anch'essa a gravissime difficoltà, essendo molto difficile a comprendersi come lo sperma del maschio possa insinuarsi in quella borsa della gallina, ed ivi non solo trattenerli per lungo tempo, ma conservare altresì la sua virtù fecondante: come tal virtù, e forza arrivi a penetrare fino al tuorlo dell'uovo per fecondarlo propagandosi attraverso dell'utero della chiara, e del guscio, di cui ivi l'uovo trovasi di già rivestito. Oltre queste difficoltà ha rilevato l'*Harveo* che la vescica Fabriciana trovasi ne' galli non meno che nelle galline, onde il di lei uso debba essere tutt'altro, che quello assegnatole da *Fabricio* (b) sebbene potrebbe darli benissimo, che due parti in apparenza analoghe come i testicoli, e le ovaja de' quadrupedi, la verga, e la clitoride de' medesimi, e finalmente le mammelle, di cui l'uovo, e l'altro sesso è similmente provisto, o fossero soltanto ad entrambi compartite per una certa analogia, o fossero ne' diversi sessi a diverse funzioni destinate.

Riflettendo

(a) *Dissert. Epist. ad Sponium.*

(b) *Foramen autem in quod Fabricius putat gallum semen suum immittere inter hoc vulvæ ostium, & uropygium cernitur. Ego vero talem ejus usum non agnosco. In pullis enim juvenculis vix reperitur, in adultis autem promiscue inest tam gallo, quam gallinæ. Accedit quod foramen valde exiguum, & ob-*

scurum sit, ut tantæ utilitatis non appareat... & in cavitatem cecam terminetur, neque umquam potui humorem seminalem in eo reperire. De Generat. Exer. 4. pag. mihi 14. similia iterum exercit. 39. pag. 136. & ex Harveo Graafius De mulier. Organ. p. 203. 304. edit. Lugd-Batæ.

Riflettendo al modo con cui nel nostro paese si fanno le pollarde, le quali, secondo la volgare opinione non ammettono più il gallo, e non partoriscono se non uova sterili, ed infecunde, ho pensato, che ove questa pretesa sterilità venisse confermata da costanti fatti potrebbe recare se non una piena certezza, almeno una somma probabilità all'ipotesi fabriciana; imperciocchè appo di noi la castrazione delle galline tanto nostrali, che indiane consiste per appunto nel fare un taglio trasverso sotto l'uropigio affine di estrarne con un ago la fabriciana veslica, ed estirparnela.

Per esaminare dunque con precise sperienze la popolare opinione ho fatto castrare alla mia presenza da persone perite, ed esercitate nella pratica di tal' operazione molte pollastre, sei delle quali ho fatto allevare in luogo segregato, e tosto che furono giunte a quell'età, in cui sogliono fare le uova le ho provviste di un adulto, e vigoroso gallo, che presto si addimesticò colle medesime, ed or con l'una, or coll'altra ben spesso si accoppiava ripassandole tutte più volte nella giornata. Non tardò molto, che queste pollarde cominciarono a far le uova, le quali furono raccolte, e quindi messe a covare sotto due altre galline, a ciò disposte in numero di diciotto per ciascuna. Sin da' primi giorni della covatura avendone aperte due mi fu facile di ravvisarvi l'animato pulcino, e di accorgermi della falsità della volgare opinione; la quale si rese tanto più manifesta quando nello schiudersi delle uova al solito termine ne uscirono altrettanti compiti, e ben formati pulcini. Egli è dunque evidente che la veslica di *Fabricio* non serve a ricevere, e conservare il seme del gallo, posciachè l'estirpazione della medesima non porta verun pregiudizio alla fecondità.

Qual sarà dunque l'uso di questa veslica, e quale il vantaggio della supposta castrazione? Sarebbe ella per avventura affatto inutile, e la maggior obesità e delicatezza delle nostre pollarde dipenderebbe forse unicamente dalla maggior abbondanza, e scelta dell'alimento, che vi si somministra, e dalla diligenza, che si usa per ingrassarle? Non si potrebbe egli anche sospettare, che questa veslica tanto nel gallo che nella gallina facesse una qualche funzione analoga a quella della prostata ne' quadrupedi, e fosse destinata a prepara-

re un umore lento, e mucoso, il quale trasmesso nella cloaca, non solo ajutasse l'escrezione di fecci dure, e calcaree, ma servisse altresì d' incentivo venereo, onde le galline a cui fosse stata tolta, essendone meno inquietate, fossero più disposte ad impinguarsi? la struttura di una tal veslica dotata di pareti assai crasse, e polpose, la di lei presenza in entrambi i sessi, la comunicazione, che ha colla cloaca, sembrano favorire tal congettura. Per rischiarirla maggiormente mi sono proposto di eseguire simile operazione anche ne' galli, e di osservare se indi ne diventino meno salaci, più saporiti, e più grassi.

Sebbene la castrazione delle galline nel nostro paese generalmente si pratici nel modo sovra divisato, non ho potuto sin ora accertarmi se la pratica di altre nazioni sia la medesima. Il Sig. *Buchoz* di passaggio accenna (a) che le pollarde si fanno coll' estrarre loro l'ovajo; il che sembra veramente difficile ad eseguirsi nelle tenere pollastre, in cui l'ovajo non è per anche sviluppato, e presenta la forma di una semplice espansione membranosa. Ho cercato d' informarmi presso gli antichi, sovra tutto presso *Plinio*, e gli scrittori *de re rustica* se da loro fosse di già conosciuta quest' operazione, ma nè presso di essi, nè appo altri scrittori non mi è riuscito di rinvenire notizia, che vi avesse rapporto.

Che che ne sia, il modo di operare presso di noi serve mirabilmente a dimostrare la falsità dell' opinione di *Fabrizio* tuttochè assai comoda, ed ingegnosa fosse per ispiegare la fecondazione successiva di molte uova da un solo accozzamento. Resta pertanto nella sua primiera oscurità la misteriosa fecondazione dell' uovo (b), ed attesa la lunghezza, la tortuosità, e mucosità del canale per cui lo scarso sperma del gallo dovrebbe portarsi per arrivare all' ovajo sembra quasi meno improbabile l' opinione di coloro, che pen-

(a) *Traité économique, & phisque des oiseaux de basse-cour* pag. 120.

(b) *Nonnulli seminis effluvia odorum more emanantia in uterum pervenire, alii spiritus incorporeos tamquam De-*

miurgos, aut Angelos, vel Demones in scenam vocant, alii contagium intelligunt fermenti, aut fracedinis instar. Harve. *De Generat.* p. 383.

fano, che non l'ovajo, ma il sangue (*a*), ed il corpo tutto della gallina ricevano le impressioni dello sperma (*b*), che loro imprima la virtù fecondante (*c*) nel modo appunto che poche gocce di acqua, di lauro-ceraso schizzate nel retto intestino di un animale senza fare visibile impressione sulla parte portano una grave perturbazione, e pronta estinzione di tutte le funzioni, e della vita.

Per la qual cosa meno strana, e singolare riuscir debbe l'osservazione del Sig. *Lyonet*, il quale ci assicura, che l'impressione dello sperma del maschio in alcuni insetti non solo si conserva perenne nella stessa femmina, ma si propaga eziandio per molte generazioni. (*d*)



V ij

(*a*) Siccome pretende Gasparo Barolino nella sua Lett. al Sig. Guglielmo Riva. Nella Bibliotec. Anat. di Manget. Tom. 1. pag. 522. e seg.

Si veda il Disc. iv. del Sig. Paitoni pag. 56., e seg.

(*b*) Galli semen tantæ virtutis esse, ut non uterum modo, sed & ovum in utero, in ovario papulam, totam denique gallinam ipsam, papulas, & ovarum primordia partim jam habentem, partim mox producturam fecundam, ac prolificam reddat. Harve. l. c. Exerc. 38. p. 132.

(*c*) Videtur sane femina post tactum spermaticum eodem modo affici, nulloque sensibili corporeo agente prolifica fieri, quo ferrum a magnete tactum hujus statim vi donatur. Harve. l. c. pag. 378.

(*d*) Altri (insetti) con un solo congiungimento vagliono a produrre una posterità di molte generazioni, come ho scoperto io stesso ne' gorgoglioni. *Lyonet*. nelle note alla Teolog. degli insetti del Sig. *Lesser* Tom. 1. pag. 46.

Lo stesso avea sospettato il Sig. *Trembley*. Vedi *Bonnet*. Corps Organisés Ediz. 2. Tom. II. pag. 103.

D E L L E

VARIAZIONI ANALITICHE FINITE

Del Sig. CAVALIERE LORGNA.

QUand'anche sul finire del passato secolo avessero i Geometri nel coltivare il calcolo delle differenze infinite-
 sime travveduto il frutto avvenire delle loro meditazio-
 ni, dal fatto apparisce, che men dell' applicazione si occu-
 pavano sul momento, che dell' oggetto astrattissimo che ave-
 vano per le mani. Pare che oggidì non altrimenti intrav-
 venga nel calcolo delle differenze finite, il quale fa da qual-
 che tempo soggetto non infelice di speculazione, e per ri-
 guardo al quale può dirsi tuttora, come dell' altro ne' suoi
 principj, che in una stagione si semina, e in altra si racco-
 glie. Non farà dunque inopportuno il prenderlo ora a pro-
 muovere per nuova strada, e il coltivarlo in parte, che può
 metter frutto abbondantissimo prontamente, combinandolo
 coll' altro, il quale non è in fondo che un caso particolare
 di questo. Oggetto pertanto di questa Memoria è primamen-
 te di ordire un legame più stretto che non apparisce essere
 tra questi due calcoli, e di preparare un transito dalle dif-
 ferenze finite alle infinitesime, e da queste a quelle recipro-
 camente, non limitato da alcuna condizione. E in secondo
 luogo è mio proposito di versare non solamente sopra le fun-
 zioni di una sola variabile, ma su quelle eziandio di più va-
 riabili, e in conseguenza di profittare della combinazione pre-
 parata delle differenze co' differenziali nel rintracciare le dif-
 ferenze finite anche di queste funzioni, e il ritorno dalle
 differenze alle funzioni, non essendo parola di questo in al-
 cuna parte delle eccellenti Istituzioni di Calcolo Differenzia-
 le dell' *Eulero*. Nel promuovere questa indagine, e nel dis-
 porre a maggiori avanzamenti il maneggio diretto e inverso di

queste differenze più composte ho in mira principalmente l'oggetto importantissimo di ridurre con appropriati metodi a sì fatto calcolo, se sia possibile, il calcolo delle Variazioni finite che agli obbietti intravvengono della mista Matematica dietro al variar delle parti, onde sono composti, qualor possano essere rappresentati da funzioni di tante variabili e costanti, quante sono le parti variabili e costanti di ciascun obbietto. Ma ciò farà materia d'altro tempo, nella quale m'appagherò di aver mosso alcuni passi, se non permetterà di più la pochezza delle mie forze, attesa la vastità del campo, in cui per verità pare che a torto occupi oggidì tutto il luogo, e quasi esclusivamente, un calcolo di particolari Variazioni inteso alla risoluzione di soli problemi di massimi e di minimi, pregevole d'altronde e degno degl'illustri Geometri *Eulero*, e *de la Grange*, che l'hanno prodotto e promosso, luogo unicamente dovuto al genere, non alla specie, cioè alla scienza universale delle Variazioni, di cui quel calcolo non è che un piccolissimo ramo. Quindi apparisce non oscuramente onde sia, che io abbia creduto bene di por nuovo studio nel maneggiare le differenze finite delle funzioni, e nel legarle più intimamente co' differenziali, de' quali son elle il vero fondamento, e le abbia poi sotto un tal punto di vista denominate *Variazioni Analitiche Finite*.

CAPITOLO I.

§. I.

TEOREMA I.

La variazione finita Δdz del differenziale di z funzione d' qualunque numero di variabili x, y ecc. è uguale al differenziale $d\Delta z$ della variazione finita di z .

Imperciocchè essendo $z + \Delta z$ lo stato successivo di z , farà manifestamente $d(z + \Delta z)$ lo stato successivo di dz , e però per le regole del calcolo differenziale dovrà essere $\Delta dz = d(z + \Delta z) - dz$. Per conseguenza $\Delta dz = d\Delta z$. Il che ecc.

COROLLARIO I.

Se dunque si faccia, che ω rappresenti in generale il modulo della variazione finita Δx , μ quello della variazione di y , π quello della variazione di z ecc., moduli tutti l'un dall' altro indipendenti, farà $\Delta dx = d\omega$, $\Delta dy = d\mu$, $\Delta dz = d\pi$ ecc.

COROLLARIO II.

Quindi nel solo caso de' moduli ω, μ, π , ecc. costanti, farà $\Delta dx = 0$, $\Delta dy = 0$, $\Delta dz = 0$ ecc.

COROLLARIO III.

Che se si ponga nell'equazione $\Delta dz = d\Delta z$, dz in luogo di z , si avrà $\Delta d^2 z = d\Delta dz$. Ma $\Delta dz = d\Delta z$ (§. I.); dunque $\Delta d^2 z = d^2 \Delta z$. Similmente continuando a porre dz in luogo di z , si troverà $\Delta d^3 z = d^2 \Delta dz = d^3 \Delta z$, e generalmente $\Delta d^n z = d^n \Delta z$.

COROLLARIO IV.

Nello stesso modo ponendo continuamente Δz in luogo

di z , si otterrà $\Delta d\Delta z = d\Delta^2 z = \Delta^2 dz$, $\Delta^2 d\Delta z = \Delta d\Delta^2 z = \Delta^3 dz$, e così successivamente.

§. II.

TEOREMA II.

Posso, come qui innanzi, il modulo $\Delta x = \omega$ in genere, dico, che $\Delta z dx = dx \Delta z + z' d\omega$, essendo z' il valor variato di z .

Imperciochè, essendo $\Delta z dx = z' d(x + \Delta x) - z dx = z' dx - z dx - z' d\Delta x = dx \Delta z + z' d\Delta x$, e $d\Delta x = \Delta dx = d\omega$ (§. I. Coroll. I.), sarà $\Delta z dx = dx \Delta z + z' d\omega$. Il che ecc.

COROLLARIO.

Nel caso pertanto di ω costante, sarà $\Delta z dx = dx \Delta z$.

§. III.

TEOREMA III.

La somma Σdz del differenziale di z funzione di quante variabili si vuole x, y , ecc. è uguale a $d\Sigma z$ differenziale della somma di z .

Si faccia $\Sigma z = P$, sarà $z = \Delta P$, e però $dz = d\Delta P$; ma $d\Delta P = \Delta dP$ (§. I.); dunque $\Sigma dz = dP = d\Sigma z$. Il che ecc.

COROLLARIO.

E perciò cangiando Δ in Σ ne' Coroll. III. IV. del §. I. si avrà $\Sigma d^n z = d^n \Sigma z$, $\Sigma d\Sigma z = d\Sigma^2 z = \Sigma^2 dz$, $\Sigma^2 d\Sigma z = \Sigma d\Sigma^2 z = \Sigma^3 dz$, e così successivamente.

§. IV.

TEOREMA IV.

Posso, come nel II. Teorema, $\Delta x = \omega$ in genere, dico, che $\Sigma(z dx) = dx \Sigma z - \Sigma d\omega \Sigma z'$.

Imperciocchè essendo $zdx = dx\Sigma\Delta z = dx\Sigma(z' - z) = dx\Sigma z' - dx\Sigma z$, aggiunto e sottratto da ambe le parti $d\omega\Sigma z'$, sarà $zdx = dx\Sigma z' + d\omega\Sigma z' - dx\Sigma z - d\omega\Sigma z'$. Ma $d(x + \omega)\Sigma z' - dx\Sigma z = \Delta(dx\Sigma z)$; dunque $zdx = \Delta(dx\Sigma z) - d\omega\Sigma z'$, e sommando $\Sigma(zdx) = dx\Sigma z - \Sigma d\omega\Sigma z'$. Il che ecc.

COROLLARIO.

Nel caso pertanto di ω costante, sarà $\Sigma(zdx) = dx\Sigma z$.

§. V.

T E O R E M A V.

La Variazione finita della formula integrale $\int zdx$, qualunque cosa sia z , è uguale all' integrale della differenza finita dell'espressione zdx .

Posto $V = \int zdx$, farà differenziando $dV = zdx$, e differenziando finitamente $\Delta dV = \Delta zdx$. Ma $\Delta dV = d\Delta V$ (§. I.); dunque $d\Delta V = \Delta zdx$, e integrando $\Delta V = \int \Delta zdx = \int \Delta zdx$. Il che ecc.

COROLLARIO I.

Sarà pertanto generalmente $\int \Delta zdx = \int dx\Delta z + \int z'd\omega$; giacchè essendo $\Delta zdx = dx\Delta z + z'd\omega$ (§. II.), risulta $\int \Delta zdx = \int dx\Delta z + \int z'd\omega$.

COROLLARIO II.

Che se sia $\Delta x = \omega$ costante, sarà $\int \Delta zdx = \int dx\Delta z$, e integrando per parti $\int \Delta zdx = x\Delta z - \int x d\Delta z = x\Delta z - \int x\Delta dz$.

§. VI.

T E O R E M A VI.

La somma $\Sigma \int zdx$ della formula integrale $\int zdx$ è uguale a $\int \Sigma zdx$.

Si

Si faccia, come qui innanzi, $\int z dx = V$, $dV = z dx$, farà $\Sigma dV = d\Sigma V$ (§. III.) $= \Sigma z dx$, e integrando $\Sigma V = \Sigma \int z dx = \int \Sigma z dx$. Il che ecc.

COROLLARIO I.

Quindi $\Sigma \int z dx = \int dx \Sigma z - \int \Sigma d\omega \Sigma z' = \int dx \Sigma z - \int d\omega \Sigma' z' = \int dx \Sigma z - \int \Sigma' z' d\omega$ (§. III.).

COROLLARIO II.

E se sia $\omega = \Delta x$ costante, farà qui pure $\Sigma \int z dx = \int dx \Sigma z$.

§. VII.

TEOREMA VII.

Qualunque funzione di x sia z , dico, che in supposizione di ω costante, $\Delta z = f(dx f(dx f(dx \dots f(dx \Delta \frac{d^n z}{dx^n}))$ tanti essendo i segni integrali consecutivi, quante sono le unità in n .

Imperocchè, essendo $d\Delta z = \Delta dz$, farà integrando $\Delta z = \int \Delta dz = f \Delta \frac{dz}{dx} \cdot dx = f dx \Delta \frac{dz}{dx}$. Si ponga $\frac{dz}{dx}$ in luogo di z , farà $\Delta \frac{dz}{dx} = f dx \Delta \frac{ddz}{dx^2}$, e di nuovo posto $\frac{dz}{dx}$ in luogo di z , farà $\Delta \frac{ddz}{dx^2} = f dx \Delta \frac{d^3 z}{dx^3}$, e però generalmente $\Delta \frac{d^{n-1} z}{dx^{n-1}} = f dx \Delta \frac{d^n z}{dx^n}$. Dunque facendo successivamente queste sostituzioni per z , si avrà $\Delta z = f(dx f(dx \dots f(dx \Delta \frac{d^n z}{dx^n}))$. Il che ecc.

COROLLARIO I.

Se dunque si ponga $\Delta \frac{d^n z}{dx^n} = \phi$, e si richiami in questo luogo il bel Teorema, che si ricava dall' ultima proposizione del Trattato intorno alle quadrature delle curve del *Newton*, farà generalmente

$$\Delta z = x^n \int \phi dx - \frac{n}{1} x^{n-1} \int \phi x dx + \frac{n \cdot \overline{n-1}}{1 \cdot 2} x^{n-2} \int \phi x^2 dx \\ - \frac{n \cdot \overline{n-1} \cdot \overline{n-2}}{1 \cdot 2 \cdot 3} \int \phi x^3 dx + \text{ecc.}$$

COROLLARIO II.

E se s' integri ciascun termine per parti, si avrà quest' altro Teorema.

$$\Delta z = -x^n \int x d\phi + \frac{n}{1} x^{n-1} \int \frac{x^2}{2} d\phi - \frac{n \cdot \overline{n-1}}{1 \cdot 2} x^{n-2} \int \frac{x^3}{3} d\phi + \text{ecc.} \\ + x^{n+1} \phi \left(1 - \frac{n}{1 \cdot 2} + \frac{n \cdot \overline{n-1}}{1 \cdot 2 \cdot 3} - \frac{n \cdot \overline{n-1} \cdot \overline{n-2}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \text{ecc.} \right)$$

§. VIII.

TEOREMA VIII.

E di nuovo, qualunque funzione di x sia z , dico, che in supposizione di ω costante sarà

$$\Delta z = x \Delta \frac{dz}{dx} - \frac{x^2}{1 \cdot 2} \Delta \frac{ddz}{dx^2} + \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} \Delta \frac{d^3 z}{dx^3} - \text{ecc.}$$

Essendo $d\Delta z = \Delta dz$ (§. I.), farà integrando, come nel Teor. precedente, $\Delta z = \int dx \Delta \frac{dz}{dx}$, cioè integrando per parti $\Delta z = x \Delta \frac{dz}{dx} - \int x d \Delta \frac{dz}{dx}$. Ma $d \Delta \frac{dz}{dx} = \Delta \frac{ddz}{dx}$ (§. I.) e però

$$\begin{aligned}\Delta z &= x \Delta \frac{dz}{dx} - \int x \Delta \frac{ddz}{dx} = x \Delta \frac{dz}{dx} - \int x \Delta \frac{ddz}{dx^2} \cdot dx \\ &= x \Delta \frac{dz}{dx} - \int x dx \Delta \frac{ddz}{dx^2}. \text{ Ma di nuovo } \int x dx \Delta \frac{ddz}{dx^2} = \frac{x^2}{2} \times \\ &\Delta \frac{ddz}{dx^2} - \int \frac{x^2}{2} d \Delta \frac{ddz}{dx^2} = \frac{x^2}{2} \Delta \frac{ddz}{dx^2} - \frac{x^3}{2 \cdot 3} \Delta \frac{d^3z}{dx^3} + \int \frac{x^3}{2 \cdot 3} \Delta \frac{d^4z}{dx^4}, \text{ e} \\ &\text{così successivamente. Dunque procedendo all' infinito si avrà} \\ \Delta z &= x \Delta \frac{dz}{dx} - \frac{x^2}{1 \cdot 2} \Delta \frac{ddz}{dx^2} + \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} \Delta \frac{d^3z}{dx^3} - \frac{x^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \Delta \frac{d^4z}{dx^4} + \text{ecc.} \\ &\text{Il che ecc.}\end{aligned}$$

§. IX.

S C O L I O.

Delle costanti arbitrarie, onde vogliono essere accompagnati gl'integrali del VII Teorema, si farà parola qui appresso. Intanto non è inopportuno l'osservare, come fin da queste prime elementari posizioni risultino immediatamente importantissime verità. Il Teorema VIII in particolare è propriamente fondamentale, e non ha bisogno che di se stesso per condurre a quanto ha stabilito intorno alle differenze finite il celebre *Eulero* nelle sue auree Istituzioni di Calcolo Differenziale, appoggiato alla tanto famosa serie del *Taylor*, la quale risulta mirabilmente dal nostro Teorema senza alcuna difficoltà, come mi accingo a dimostrarlo.

§. X.

P R O B L E M A I.

Trovare l'equazione generale di tutte le funzioni di x, le quali si annichilano nel caso di x=0.

Si ripigli l'equazione del Teorema VIII.

$$\Delta z = \frac{x}{1} \Delta \frac{dz}{dx} - \frac{x^2}{1 \cdot 2} \Delta \frac{ddz}{dx^2} + \text{ecc.}$$

e poichè $\Delta dz = d\Delta z$, $\Delta ddz = d^2\Delta z$, $\Delta d^3z = d^3\Delta z$, ecc.

X ij

(§. 1.), vi si facciano queste sostituzioni , e prenderà ella la seguente forma

$$\Delta z = \frac{x}{1} d. \frac{\Delta z}{dx} - \frac{x^2}{1.2} d^2. \frac{\Delta z}{dx^2} + \frac{x^3}{1.2.3} d^3. \frac{\Delta z}{dx^3} - \text{ecc.}$$

Si ponga pertanto z in luogo di Δz , e si avrà

$$z = \frac{xdz}{1.dx} - \frac{x^2ddz}{1.2dx^2} + \frac{x^3d^3z}{1.2.3dx^3} - \text{ecc.}$$

Quindi

$$(A) \dots z - \frac{xdz}{1dx} + \frac{x^2ddz}{1.2dx^2} - \text{ecc.} = 0$$

Ma a questa equazione soddisfa qualunque siasi funzione di x , la quale si annichili nel caso di $x=0$; dunque (A) è l'equazione dimandata. Il che ecc.

§. XI.

S C O L I O.

Questa è l'equazione, che si trova alla pag. 356 delle Istituzioni sopracitate dell' *Eulero*.

§. XII.

P R O B L E M A II.

Trovare il valore variato di z funzione di x qualunque, nel caso che in luogo di x venga posto $x \pm \omega$ nella medesima funzione, qualunque cosa sia ω .

Essendo (A) (§. preced.) l'equazione generale di tutte le funzioni z di x , le quali si annichilano nel caso di $x=0$, è cosa manifesta che l'espressione

$$z - \frac{xdz}{1dx} + \frac{x^2ddz}{1.2dx^2} - \frac{x^3d^3z}{1.2.3dx^3} + \text{ecc.}$$

indica il valore che assumono le funzioni z di x nel medesimo caso di $x=0$. E come il caso di $x=0$ è lo stesso del caso in cui nella funzione z venga posto $x-x$ in luogo di x , ove z diventa z' , sarà necessariamente la funzione z variata uguale all'espressione precedente, cioè

$$z' = z - \frac{xdz}{1dx} + \frac{x^2ddz}{1.2dx^2} - \frac{x^3d^3z}{1.2.3dx^3} + \text{ecc.}$$

Ma perchè la variabilità non cade sopra i fattori x, x^2, x^3 ecc., si può ad x sostituire l'indeterminata $\mp \omega$, purchè si faccia questa medesima sostituzione anche in luogo del modulo della variazione x , e però dando luogo generalmente all' equazione

$$z' = z \pm \frac{\omega dz}{1dx} + \frac{\omega^2 ddz}{1.2dx^2} \pm \frac{\omega^3 d^3z}{1.2.3dx^3} + \text{ecc.}$$

L' espressione (B)

$$(B) \dots z \pm \frac{\omega dz}{1dx} + \frac{\omega^2 ddz}{1.2dx^2} \pm \frac{\omega^3 d^3z}{1.2.3dx^3} + \text{ecc.}$$

indicherà generalmente il valore variato di z nel caso che in luogo di x venga posto $x \pm \omega$. Il che ecc.

COROLLARIO I.

E perchè $z' - z = \Delta z$, si avrà la nota espressione generale della variazione finita di z

$$\Delta z = \pm \frac{\omega dz}{1dx} + \frac{\omega^2 ddz}{1.2dx^2} \pm \frac{\omega^3 d^3z}{1.2.3dx^3} + \text{ecc.}$$

COROLLARIO II.

E se si cangi Δ in d , cioè la variazione finita in differenziale, con che il modulo $\pm \omega$ si cangia in $\pm dx$, l' equazione precedente si cangia in questa

$$dz = \pm \frac{dz}{1} + \frac{ddz}{1.2} \pm \frac{d^3z}{1.2.3} + \frac{d^4z}{1.2.3.4} \pm \text{ecc.}$$

Che è il vero differenziale di z , come tutti fanno.

§. XII.

S C O L I O.

E' inutile, che qui si ripetano tutte le conseguenze che derivano nel calcolo delle variazioni finite, e in altri rami dell' analisi dalle formule precedenti, siccome quelle sopra le quali ha diffusamente trattato nelle citate Istituzioni il grande *Eulero*. Non vo peraltro tralasciar di mostrare, come dal

Teorema nostro (§. VIII.) risulti immediatamente il Teorema generale delle quadrature già riposto dal chiar. Giovanni Bernoulli negli Atti di Lipsia del 1694. In fatti, essendo

$$\Delta z = \frac{x}{1} \Delta \frac{dz}{dx} - \frac{x^2}{1.2} \Delta \frac{ddz}{dx^2} + \text{ecc.}$$

si supponga $\int z dx = \Delta z$; farà $z dx = d\Delta z = \Delta dz$ (§. I.), e posto dx costante, $dz dx = d^2 \Delta z = \Delta d^2 z$, $d^2 z dx = \Delta d^3 z$, e così successivamente. Dunque fatte le convenevoli sostituzioni, si avrà generalmente

$$\int z dx = \frac{xz}{1} - \frac{x^2 dz}{1.2 dx} + \frac{x^3 ddz}{1.2.3 dx^2} - \frac{x^4 d^3 z}{1.2...4 dx^3} + \text{ecc.}$$

ch'è il Teorema di quell' illustre Geometra.

§. XIII.

T E O R E M A IX.

Qualunque funzione di x sia z , dico, che in supposizione di ω costante si verifica l'equazione (A)

$$(A) \dots \Sigma z = \int (dx \int (dx \int (dx \dots \int (dx \Sigma \frac{d^n z}{dx^n}))$$

tanti essendo i segni integrali consecutivi, quante sono le unità in n .

Imperciochè, essendo $d\Sigma z = \Sigma dz$ (§. III.), farà integrando $\Sigma z = \int \Sigma dz = \int \Sigma \frac{dz}{dx} \cdot dx = \int dx \Sigma \frac{dz}{dx}$.

Se dunque si facciano le sostituzioni di $\frac{dz}{dx}$ in luogo di z continuamente ripetute come nel §. VII, si perverrà all'equazione (A). Il che ecc.

§. XIV.

T E O R E M A X.

E di nuovo nella stessa supposizione di ω costante, dico, che avrà luogo l'equazione (B).

$$(B) \dots \Sigma z = \frac{x}{1} \Sigma \frac{dz}{dx} - \frac{x^2}{1.2} \Sigma \frac{ddz}{dx^2} + \frac{x^3}{1.2.3} \Sigma \frac{d^3z}{dx^3} - \text{ecc.}$$

In fatti per essere $\Sigma z = \int dx \Sigma \frac{dz}{dx}$, farà integrando

$$\begin{aligned} \text{per parti } \Sigma z &= x \Sigma \frac{dz}{dx} - \int x d \Sigma \frac{dz}{dx} = x \Sigma \frac{dz}{dx} - \int x \Sigma \frac{ddz}{dx} \\ &= x \Sigma \frac{dz}{dx} - \int x dx \Sigma \frac{ddz}{dx^2} = x \Sigma \frac{dz}{dx} - \frac{x^2}{1.2} \Sigma \frac{ddz}{dx^2} \\ &+ \int \frac{x^2}{1.2} \Sigma \frac{d^3z}{dx^3} = x \Sigma \frac{dz}{dx} - \frac{x^2}{1.2} \Sigma \frac{ddz}{dx^2} + \int \frac{x^2 dx}{1.2} \Sigma \frac{d^3z}{dx^3}, \end{aligned}$$

e così successivamente. Continuando dunque a integrar per parti all' infinito si perverrà all' equazione (B). Il che ecc.

§. XV.

S C O L I O.

Non farà infruttuoso il fare qualche applicazione delle forme trovate, onde mostrare il buon uso, che può farsene, e il modo di maneggiare le costanti arbitrarie, di che s'è detto al §. IX. A quest' oggetto mi pare opportuno il cercare direttamente per saggio le somme della potestà di x , posta l'unità per modulo costante, col mezzo del IX Teorema. Pongo pertanto gl'integrali di quell' equazione generale sotto questa forma

$$\Sigma z = \int dx (K + \int dx (K' + \int dx (K'' + \text{ecc. } \int dx (K^{n-1} + \Sigma \frac{d^n z}{dx^n}))$$

in cui K, K', K'' ecc. sono le costanti arbitrarie da determinarsi, e sia I.° da trovarsi la somma della costante A . Prendendo un solo integrale dovrà essere $n=1$, e $\Sigma z =$

$$\int dx (K + \Sigma \frac{dz}{dx}). \text{ Ora essendo } z=A, \text{ farà } dz=0, \text{ e per-}$$

cio $\Sigma A = \int K dx = Kx$. Differenziando pertanto finitamente dovrà essere $A = \Delta Kx = K \Delta x = K$ essendo $\Delta x = \omega = 1$ per ipotesi, e però $\Sigma A = Ax$. II.° Trovare Σx . Assumendo di

nuovo un solo integrale per Σz , farà $\Sigma x = \int dx (K + \Sigma \frac{dz}{dx})$
 $= \int dx (K + \Sigma 1)$. Ma $\Sigma 1 = x$, posta l'unità per A nell'art.
 precedente. Dunque $\Sigma x = \int dx (K + x) = Kx + \frac{x^2}{2}$. Diffe-
 renziando pertanto finitamente dovrà essere x
 $= \Delta Kx + \Delta \frac{x^2}{2} = K + x + \frac{1}{2}$, perciò $K = -\frac{1}{2}$. In con-
 seguenza $\Sigma x = \frac{x^2}{2} - \frac{x}{2}$. III.° Trovare Σx^2 . Si assumano
 due formule integrali, onde farà $n = 2$, e però

$$\Sigma z = \int dx (K + \int dx (K' + \Sigma \frac{ddz}{dx^2})) .$$

Sostituendo x^2 a z , $2dx^2$ a ddz , farà

$$\Sigma x^2 = \int dx (K + \int dx (K' + \Sigma 2))$$

ma $\Sigma 2 = 2x$ (art. 1.); dunque

$$\Sigma x^2 = \int dx (K + K'x + x^2) = Kx + \frac{K'x^2}{2} + \frac{x^3}{3} .$$

Ma prendendo la variazione finita, deve essere

$$x^2 = \Delta Kx + \Delta K' \frac{x^2}{2} + \Delta \frac{x^3}{3} = K + K'x + \frac{K'}{2} + x^2 + x + \frac{1}{3} ,$$

e però $K + K'x + \frac{K'}{2} + x + \frac{1}{3} = 0$, cioè $K'x + x = 0$,

e $K + \frac{K'}{2} + \frac{1}{3} = 0$. In conseguenza farà $K' = -1$,

$$K = \frac{1}{6} , \text{ e } \Sigma x^2 = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + \frac{x}{6} .$$

Nello stesso modo coll' assumere per Σx^3 tre formule in-
 tegrali, quattro per Σx^4 , e così di mano in mano si troverà

$$\Sigma x^3 = \frac{1}{4} x^4 - \frac{1}{2} x^3 + \frac{1}{4} x^2$$

$$\Sigma x^4 = \frac{1}{5} x^5 - \frac{1}{2} x^4 + \frac{1}{3} x^3 - \frac{1}{30} x$$

ecc. Che se voglia assumersi non l'unità per modulo ma la
 costante qualsivoglia ω , il metodo stesso ci conduce diretta-
 mente

mente a trovare le somme anche con questa generalità. Imperciocchè essendo, come poco innanzi, $\Sigma A = Kx$, sarà

$A = \Delta Kx = K\omega$, e però $K = \frac{A}{\omega}$, e procedendo, come

sopra, si troverà

$$\Sigma x = \frac{x^2}{2\omega} - \frac{x}{2}$$

$$\Sigma x^2 = \frac{x^3}{3\omega} - \frac{x^2}{2} + \frac{\omega x}{6}$$

ecc. sopra di che veggansi per confronto de' metodi le Istituz. cit. Cap. I. pag. 28.

CAPITOLO SECONDO

§. XVI.

PROBLEMA III.

Proposta qualunque formula differenziale zdx , in cui z è funzione qualsivoglia di x e costanti, rimontare alla forma finita (z) , onde $\Sigma(z)$ sia uguale a $\int zdx$.

Dovendo essere $\Sigma(z) = \int zdx$, per ipotesi, sarà $(z) = \Delta \int zdx$. Ma $\Delta \int zdx = \int dx \Delta z$ (§. V.): dunque $(z) = \int dx \Delta z$. E poichè (§. XII.)

$$\Delta z = \pm \frac{\omega dz}{1dx} + \frac{\omega^2 ddz}{1.2dx^2} \pm \text{ecc.}$$

si moltiplichino l'espressione per dx , e s'integri. Sarà

$$(I) \dots (z) = \pm \omega z + \frac{\omega^2 dz}{1.2dx} \pm \frac{\omega^3 ddz}{1.2.3dx^2} + \text{ecc.}$$

Di nuovo, essendo (§. VII.)

$$\Delta z = \int (dx \int (dx \dots \int (dx \Delta \frac{d^n z}{dx^n}))$$

si moltiplichino l'equazione per dx , e s'integri, sarà pure

$$(II) \dots (z) = \int (dx \int (dx \int (dx \dots \int (dx \Delta \frac{d^n z}{dx^n}))$$

e di nuovo ancora, essendosi trovato (§. VIII.)

$$\Delta z = x \Delta \frac{dz}{dx} - \frac{x^2}{2} \Delta \frac{ddz}{dx^2} + \frac{x^3}{2.3} \Delta \frac{d^3z}{dx^3} - \text{ecc.}$$

oppure (§. II.)

$$\Delta z = \frac{x}{dx} d. \Delta z - \frac{x^2}{2 dx^2} d^2. \Delta z + \frac{x^3}{2.3 dx^3} d^3. \Delta z - \text{ecc.}$$

si ponga $\int dx \Delta z$ in luogo di Δz , e si avrà

$$\int dx \Delta z = x \Delta z - \frac{x^2}{2} \Delta \frac{dz}{dx} + \frac{x^3}{2.3} \Delta \frac{ddz}{dx^2} - \text{ecc.}$$

Ma deve essere $\int dx \Delta z = (z)$; dunque

$$(III) \dots (z) = x \Delta z - \frac{x^2}{2} \Delta \frac{dz}{dx} + \text{ecc.}$$

Colle equazioni pertanto (I.), (II.), (III.) per tre vie diverse si potrà dal differenziale $z dx$ rimontare alla forma finita (z) ; il che ecc.

Esempio I.

Sia $z = ax + bx^2$, onde $z dx = ax dx + bx^2 dx$ sia il differenziale da cui sia proposto di rimontare alla funzione finita (z) . Sarà $dz = a dx + 2bx dx$, $ddz = 2b dx$, d^3z, d^4z ecc. $= 0$. Si sostituiscano per z, dz ecc. questi valori nell'espressione (I.), e sarà

$$(z) = (aw + bw^2)x + bwx^2 + \frac{aw^2}{2} + \frac{bw^3}{3} + \text{Cost. arb.}$$

$$\text{In fatti } \int z dx = \frac{ax^2}{2} + \frac{bx^3}{3} = \Sigma \left((aw + bw^2)x + bwx^2 + \frac{aw^2}{2} + \frac{bw^3}{3} \right).$$

Esempio II.

Sia il differenziale proposto $z dx = ax^3 dx$, e però $z = ax^3$, $dz = 3ax^2 dx$, $ddz = 6ax dx$. Facendo uso dell'espressione (II.), dovrà essere

$$(z) = \int (dx \int dx (K + \int dx \Delta 6ax) + K') + K''$$

e poichè $\Delta 6ax = 6a \Delta x = 6aw$, farà $\int dx \Delta 6ax = 6awx$, e però $\int dx (K + 6awx) = Kx + 3awx^2$. Dunque

$$(z) = \int dx (Kx + 3axx^2 + K') = \frac{Kx^2}{2} + axx^2 + K'x + K''. \text{ Per}$$

determinare le costanti K, K' , essendo $(z) = \int dx \Delta z = \int dx \Delta ax^3$, farà differenziando

$$d(z) = Kx dx + 3axx^2 dx + K' dx = dx \Delta ax^3, \text{ e però}$$

$$Kx + 3axx^2 + K' = \Delta ax^3 = 3axx^2 + 3a\omega^2 x + a\omega^3. \text{ Dunque}$$

$$Kx - 3a\omega^2 x = 0, K' - a\omega^3 = 0, \text{ e però } K = 3a\omega^2, K' = a\omega^3.$$

Sostituendo pertanto questi valori per K, K' , farà

$$(z) = \frac{3a\omega^2 x^2}{2} + axx^2 + a\omega^3 x + \text{Cost. arb. } K'', \text{ e}$$

$$\int z dx = \frac{ax^4}{4} = \Sigma(z).$$

Esempio III.

Sia il differenziale $z dx = \frac{dx}{x}$. Sarà $z = \frac{1}{x}$,

$dz = -\frac{dx}{x^2}$, $ddz = \frac{2dx^2}{x^3}$, ecc. Sostituendo questi valori nella espressione (1), si troverà

$$(z) = \frac{\omega}{x} - \frac{\omega^2}{2x^2} + \frac{\omega^3}{3x^3} - \frac{\omega^4}{4x^4} + \text{ecc.}$$

Ed è per appunto $(z) = \Delta \int z dx = \Delta \int \frac{dx}{x} = \Delta l.x =$

$$l.(1 + \frac{\omega}{x}) = \frac{\omega}{x} - \frac{\omega^2}{2x^2} + \text{ecc.}$$

§. XVII.

COROLLARIO I.

Se pertanto farà trascendente l'integrale $\int z dx$ della formula differenziale proposta, riuscendo pure trascendente $\int dx \Delta z$, farà sempre trascendente il valore della funzione (z) .

COROLLARIO II.

Ma co' medesimi principj potrà sempre trovarsi $\Sigma(z)$; come s' è trovato (z) , in z e costanti. Imperciocchè essendo (§. XI.)

$$z = \frac{x dz}{dx} - \frac{x^2 ddz}{2dx^2} + \frac{x^3 d^3z}{2.3dx^3} - \text{ecc.}$$

e dovendo essere $\Sigma(z) = \int z dx$, si ponga nel primo membro $\Sigma(z)$ in luogo di z , e $z dx$ per dz , $dz dx$ per ddz ecc. nel secondo membro, sarà generalmente

$$\Sigma(z) = xz - \frac{x^2 dz}{2dx} + \frac{x^3 ddz}{2.3dx^2} - \text{ecc.}$$

COROLLARIO III.

In conseguenza essendosi trovato (§. XVI.)

$$(z) = \pm \omega z + \frac{\omega^2 dz}{2dx} \pm \frac{\omega^3 ddz}{2.3dx^2} \pm \text{ecc.}$$

farà sommando

$$\Sigma(z) = \Sigma \left(\pm \omega z + \frac{\omega^2 dz}{2dx} \pm \text{ecc.} \right)$$

ma $\Sigma(z) = \int z dx$; dunque generalmente l' integrale di qualunque formula differenziale $z dx$ farà dato pe' differenziali successivi di tutti gli ordini di Σz in questo modo

$$(*) \int z dx = \pm \omega \Sigma z + \frac{\omega^2}{2} \cdot \frac{d\Sigma z}{dx} \pm \frac{\omega^3}{2.3} \cdot \frac{d^2 \Sigma z}{dx^2} + \text{ecc.}$$

§. XVIII.

S C O L I O I.

Il Sig. *de la Grange* negli Atti dell' Ac. R. delle Scienze di Berlino del 1772. alla pag. 202. ha trovato questa formula bellissima per la quadratura delle curve

$$\int \frac{z dx}{\xi} = \Sigma z + \mu z + \nu \Delta z + \pi \Delta^2 z + \text{ecc.}$$

essendo $\mu = \frac{1}{2}$, $2\nu = -\frac{1}{2.3}$, $3\pi = -\frac{\nu}{2} + \frac{1}{3.4}$ ecc.

Credo però, che la formula nostra (*) sia molto più semplice, ed ha questo in oltre di particolare, che qualunque termine della serie può essere agevolmente rinvenuto indipendentemente dagli altri, il che indubitatamente non avviene di questa.

S C O L I O II.

Siccome il valore di (z) dee supporfi nato dall'aver posto nella formula integrale $\Sigma(z)$, $x \pm \omega$ in luogo di x , e poi sottratto la forma medesima dalla forma variata, e similmente dee il differenziale zdx supporfi nato dall'aver posto nella forma integrale $\int zdx$, $x \pm dx$ in luogo di x , e poi sottratto la forma medesima dalla forma variata, intanto, come tutti fanno, riescono sommanente diverse dalle finite (z) le variazioni zdx in quanto si annullano e svaniscono le potestà del modulo infinitesimo dx superiori alla prima, e non si annullano quelle del modulo finito ω .

Parrebbe quindi, che per discendere dalle variazioni finite (z) a' differenziali zdx non altro occorresse fuorchè sostituire ne' valori di (z) al modulo finito ω l'infinitesimo dx , annullando le potestà di ω superiori alla prima. In fatti nell'es. I. posto nel valore (z) , $\omega^3 = 0$, $\omega^2 = 0$, e dx in luogo di ω , risulta $axdx + bx^2dx$, ch'è appunto il differenziale zdx . Così nel II. ove risulta $ax^3dx = zdx$, e nel III.

pure, ove rimane $\frac{dx}{x} = zdx$. Quindi è forse, che l'Eulero

diffe bensì non essere via aperta, onde rimontare da' differenziali alle differenze, ma facilissimo per contrario essere il passaggio dalle differenze a' differenziali (Instituz. di Calc. Diff. pag. 332.). Ma ciò sembra richiedere una limitazione. Imperciocchè qual via apparisce onde discendere, per esem-

pio, dalla forma finita $(z) = x^2$ al differenziale $zdx = \frac{1}{\omega} \times$

$(x dx - \frac{\omega dx}{2})$? quale per discendere dalla forma finita (z)

$= ax^3 + bx + c$ al differenziale $zdx = \frac{1}{\omega} (ax^2 dx - a\omega x dx + bxdx + \frac{a\omega^2 dx}{6} - \frac{b\omega dx}{2} + cdx)$? e così di altre forme senza fine. E' dunque necessario risolvere anche il Problema del discendere dalle forme finite (z) a' differenziali zdx generalmente.

§. XIX.

L E M M A.

Supposta z funzione qualunque di x , ω il modulo delle variazioni finite, trovare il valore generale Σz .

Sia $\Sigma z = y$, $dy = Qdx$, farà $z = \Delta y$, e però
 (M) ... $z = \omega Q + \frac{\omega^2 dQ}{2dx} + \frac{\omega^3 ddQ}{2.3dx^2} + \frac{\omega^4 d^3Q}{2.3.4dx^3} + \text{ecc.}$

In conseguenza farà

(N) $\omega Qdx = zdx - \frac{\omega^2 dQ}{2} - \frac{\omega^3 ddQ}{2.3dx} - \frac{\omega^4 d^3Q}{2.3.4dx^2} - \text{ecc.}$

Si differenzj l'equazione (M), e il differenziale si multipli-
 chi per ω . Si avrà

(M') $\frac{\omega^2 dQ}{2} = \frac{\omega dz}{2} - \frac{\omega^3 ddQ}{2.2dx} - \frac{\omega^4 d^3Q}{2.2.3dx^2} - \text{ecc.}$

Si sostituiscia il valore di $\frac{\omega^2 dQ}{2}$ nell'equazione (N), e si avrà

$$\begin{aligned} \omega Qdx &= zdx - \frac{\omega dz}{2} + \omega^3 \left(\frac{1}{2.2} - \frac{1}{2.3} \right) \frac{ddQ}{dx} \\ &\quad + \omega^4 \left(\frac{1}{2.2.3} - \frac{1}{2.3.4} \right) \frac{d^3Q}{dx^2} + \text{ecc.} \end{aligned}$$

cioè, posto $\frac{1}{2.2} - \frac{1}{2.3} = A$, $\frac{1}{2.2.3} - \frac{1}{2.3.4} = B$,

$\frac{1}{2.2.3.4} - \frac{1}{2.3.4.5} = C$, e così gli altri coefficienti succes-
 sivamente uguali per ordine alle lettere D , E , F ecc., si
 avrà l'equazione (N')

$$(N) \dots \omega \mathcal{Q} dx = z dx - \frac{\omega dz}{2} + A \omega^3 \frac{dd\mathcal{Q}}{dx} + B \omega^4 \frac{d^3\mathcal{Q}}{dx^2} + \text{ecc.}$$

Si differenzj l'equazione (M'), tolto via il divisor comune 2, e farà, moltiplicando per $\frac{\omega A}{dx}$,

$$(M'') \dots \frac{A \omega^3 dd\mathcal{Q}}{dx} = \frac{A \omega^2 ddz}{dx} - \frac{A \omega^4 d^3\mathcal{Q}}{2 dx^2} - \frac{A \omega^5 d^4\mathcal{Q}}{2.3 dx^3} - \text{ecc.}$$

Si sostituiscia il valore di $\frac{A \omega^3 dd\mathcal{Q}}{dx}$ nell'equazione (N') e farà

$$\begin{aligned} \omega \mathcal{Q} dx = z dx - \frac{\omega dz}{2} + \frac{A \omega^2 ddz}{dx} - \omega^4 \left(\frac{A}{2} - B \right) \frac{d^3\mathcal{Q}}{dx^2} \\ - \omega^5 \left(\frac{A}{2.3} - C \right) \frac{d^4\mathcal{Q}}{dx^3} - \omega^6 \left(\frac{A}{2.3.4} - D \right) \frac{d^5\mathcal{Q}}{dx^4} - \text{ecc.} \end{aligned}$$

cioè

$$\begin{aligned} (N'') \dots \omega \mathcal{Q} dx = z dx - \frac{\omega dz}{2} + \frac{A \omega^2 ddz}{dx} - A_1 \omega^4 \frac{d^3\mathcal{Q}}{dx^2} \\ - B_1 \omega^5 \frac{d^4\mathcal{Q}}{dx^3} - C_1 \omega^6 \frac{d^5\mathcal{Q}}{dx^4} - \text{ecc.} \end{aligned}$$

posto $\frac{A}{2} - B = A_1$, $\frac{A}{2.3} - C = B_1$, $\frac{A}{2.3.4} - D = C_1$ ecc.

Si differenzj l'equazione (M''), e moltiplicando il differenziale per $\frac{A_1 \omega}{A dx}$, farà

$$(M''') \dots \frac{A_1 \omega^4 d^3\mathcal{Q}}{dx^2} = \frac{A_1 \omega^3 d^3z}{dx^2} - \frac{A_1 \omega^5 d^4\mathcal{Q}}{2 dx^3} - \frac{A_1 \omega^6 d^5\mathcal{Q}}{2.3 dx^4} - \text{ecc.}$$

si sostituiscia nell'equazione (N'') il valore

di $\frac{A_1 \omega^4 d^3\mathcal{Q}}{dx^2}$ tratto dall'equazione (M'''), e farà

$$\begin{aligned} (N''') \dots \omega \mathcal{Q} dx = z dx - \omega \frac{dz}{2} + A \omega^2 \frac{ddz}{dx} \\ - A_1 \omega^3 \frac{d^3z}{dx^2} + \frac{A_1 \omega^5 d^4\mathcal{Q}}{dx^3} + \frac{B_1 \omega^6 d^5\mathcal{Q}}{dx^4} + \text{ecc.} \end{aligned}$$

posto $\frac{A_1}{2} - B_1 = A'$, $\frac{A_1}{2.3} - C_1 = B'$ ecc.

Così procedendo, senza fine, e ponendo successivamente

$$\frac{A'}{2} - B' = A_{II}, \quad \frac{A'}{2.3} - C' = B_{II} \text{ ecc. indi } \frac{A_{II}}{2} - B_{II} = A'', \quad \frac{A_{II}}{2.3} - C_{II} = B'' \text{ ecc.}$$

si perverrà all' equazione finale

$$\omega \mathcal{Q}dx = zdx - \omega \frac{dz}{2} + A\omega^2 \frac{ddz}{dx} - \frac{A'\omega^3 d^3z}{dx^2} + \frac{A'\omega^4 d^4z}{dx^3} - \frac{A_{II}\omega^5 d^5z}{dx^4} + \frac{A''\omega^6 d^6z}{dx^5} - \text{ecc.}$$

Sostituiscasi dy a $\mathcal{Q}dx$, e s'integri, indi si ponga $\Sigma z = y$; si avrà

$$(I) \dots \Sigma z = \frac{1}{\omega} \int zdx - \frac{z}{2} + A\omega \frac{dz}{dx} - A'\omega^2 \frac{ddz}{dx^2} + A'\omega^3 \frac{d^3z}{dx^3} - A_{II}\omega^4 \frac{d^4z}{dx^4} + \text{ecc.} + \text{Cost. arb. K}$$

$$\text{Ma (§. XII.) } \int zdx = \frac{xz}{1} - \frac{x^2 dz}{2dx} + \frac{x^3 ddz}{2.3dx^2} - \text{ecc.}$$

e inoltre sviluppando i coefficienti si trova essere A_1

$$= \frac{A}{2} - B = \frac{1}{2.1.2} - \frac{1}{2.3.4} = 0, \text{ e similmente } A_{II} = 0, A_{III} = 0,$$

e così successivamente tutti gli altri coefficienti piesegnati; dunque facendo queste sostituzioni, e ordinando i termini farà finalmente

$$(II) \dots \Sigma z = \left(\frac{x}{2} - \frac{1}{2} \right) z + \left(A\omega - \frac{x^2}{2\omega} \right) \frac{dz}{dx} + \frac{x^3 ddz}{2.3\omega dx^2} + \left(A'\omega^3 - \frac{x^4}{2.3.4\omega} \right) \frac{d^3z}{dx^3} + \frac{x^5 d^4z}{2.3..5\omega dx^4} + \left(A''\omega^5 - \frac{x^6}{2.3...6\omega} \right) \frac{d^5z}{dx^5} + \text{ecc.}$$

espressione in cui tutto è finito, e la legge de' coefficienti A, A', A'' ecc. dependentemente l'un dall'altro è definita superiormente. Il che ecc.

§. XX.

S C O L I O I.

Questi coefficienti sono que' medesimi, che risultarono già per altre vie men dirette all' illustre *Eulero* nell' VIII. Vol. de' vecchj Com. di *Pietrobo.*, indi nel Cap. V. della II. Parte delle sue Istituzioni di Calc. differenziale per l' espressione generale della somma delle serie. Ma poichè s' è ora scoperto, che possono trovarsi indipendentemente l' un dall' altro, trovando il termine qualunque n.^{mo} dell' infinitonomio $(1 + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{1.2.3.4} + \text{ecc.})^\lambda$, e ponendovi -1 in luogo di λ (Mem. dell' Ac. Reale di Torino 1786-1787. nella mia Dissert. che ha per titolo *Théorie d' une nouvelle espèce de Calcul*), riuscirà più agevole di prima la determinazione del valore Σz , e della legge con cui procedono i termini di quella famosa progressione.

S C O L I O II.

Abbiamo pertanto nel Coroll. III. del §. XVII. l' espressione dell' integrale $\int z dx$ per i differenziali di tutti gli ordini di Σz , e qui l' espressione inversa dell' integrale Σz per i differenziali di tutti gli ordini di $\int z dx$. Quella, come mi sembra, è totalmente nuova, e questa è trovata con un metodo diretto e semplice, se non è nuova.

§. XXI.

P R O B L E M A IV.

Proposta qualunque funzione finita (z) di x e costanti, discendere alla forma differenziale zdx, onde sia $\int z dx = \Sigma(z)$.

Dovendo essere $\int z dx = \Sigma(z)$, differenziando farà $z dx = d\Sigma(z)$, e $z = \frac{d\Sigma(z)}{dx}$. Ma s' è trovato generalmente

(§. XIX.) il valore di Σz qualunque funzione di x sia z ; dunque sostituendo (z) a z , differenziando l'equazione, e dividendo per dx , si troverà

$$(I') \dots z = \frac{(z)}{\omega} - \frac{d(z)}{2dx} + A\omega \frac{d^2(z)}{dx^2} + A'\omega^3 \frac{d^4(z)}{dx^4} + \text{ecc.}$$

Ma di nuovo essendosi trovato (§. XVI.)

$$(z) = \int (dx \int (dx \dots \int (dx \Delta \frac{d^n z}{dx^n}))$$

se si differenzj quest'equazione, e si divida per dx , si differenzj di nuovo e si divida per dx , e così all'infinito, si perverrà all'equazione $\frac{d^{n+1}(z)}{dx^{n+1}} = \Delta \frac{d^n z}{dx^n}$. Dunque sommando farà

$$\Sigma \frac{d^{n+1}(z)}{dx^{n+1}} = \frac{d^n z}{dx^n}. \text{ Posto ciò s'integri, e farà}$$

$$\int dx \Sigma \frac{d^{n+1}(z)}{dx^{n+1}} = \frac{d^{n-1} z}{dx^{n-1}}, \text{ e integrando di nuovo}$$

$$\int dx \int dx \Sigma \frac{d^{n+1}(z)}{dx^{n+1}} = \frac{d^{n-2} z}{dx^{n-2}}, \text{ e così procedendo all'infinito si giugnerà all'equazione}$$

$$(II') \dots z = \int (dx \int (dx \int (dx \dots \int (dx \Sigma \frac{d^{n+1}(z)}{dx^{n+1}}))$$

E inoltre poichè abbiamo una nuova espressione di $\Sigma(z)$, cioè (vedi la Dissert. nelle Mem. di Torino citata al §. xx.) $\Sigma(z) = x(z) - \Delta(z) Sx + \Delta^2(z) S^2x - \text{ecc.}$

ove S è la caratteristica della somma delle serie, differenziando questa equazione, e sostituendo zdx a $d\Sigma(z)$ si perverrà a questa espressione

$$(III') \dots z = \frac{1}{dx} (d.x(z) - d.\Delta(z) Sx + d.\Delta^2(z) S^2x - \text{ecc.})$$

e però con le equazioni (I'), (II'), (III') si potrà per tre vie diverse discendere dalla funzione (z) al differenziale zdx ; il che ecc.

§. XXII.

S C O L I O.

Sin qui abbiamo sempre supposto z funzione propriamente di x ; ma può ella contenere una formula integrale $\lambda = \int z' dx$, in cui sia z' funzione di x tutt' altra da z , e di nuovo z' può contenere altra formula integrale $\lambda' = \int z'' dx$, e così successivamente. E' convenevole, che applichiamo anche a questi integrali complicati le soluzioni precedenti.

§. XXIII.

P R O B L E M A V.

Proposta la formula differenziale $dx \int z dx$ in cui z è funzione di x , rimontare alla forma finita (z) , onde sia $\Sigma(z) = \int dx \int z dx$.

Si ripiglino le forme (I), (II), (III) del §. XVI., e per z si sostituisca in tutte $\int z dx$. La forma (I) somministrerà pertanto l'equazione

$$(IV) \dots (z) = \omega \int z dx + \frac{\omega^2 z}{1.2} + \frac{\omega^3 dz}{1.2.3 dx} + \text{ecc.}$$

in cui sostituito per $\int z dx$ il valore trovato al §. XII., si ridurrà ella alla forma

$$(V) \dots (z) = \left(\frac{\omega^2}{2} + \omega x \right) z + \left(\frac{\omega^3}{2.3} - \frac{\omega x^2}{2} \right) \frac{dz}{dx} \\ + \left(\frac{\omega^4}{2.3.4} + \frac{\omega x^3}{2.3} \right) \frac{ddz}{dx^2} + \text{ecc.}$$

la forma (II) somministrerà poi il valore seguente

$$(VI) \dots (z) = \int (dx \int (dx \dots \int (dx \Delta \frac{d^{n-1} z}{dx^{n-1}}))$$

e dalla forma (III) risulterà

$$(VII) \dots (z) = x \Delta \int z dx - \frac{x^2}{2} \Delta z + \frac{x^3}{2.3} \Delta \frac{dz}{dx} - \text{ecc.}$$

Z ij

e poichè $\Delta \int z dx = \int dx \Delta z$, se la (III) forma del §. XVI. si moltiplichì per x , darà ella il valore di $x \Delta \int z dx$, il quale sostituito nell'equazione (VII), e fatte le convenevoli riduzioni, la trasformerà nell'equazione (VIII)

$$(VIII) \dots (z) = \frac{x^2}{2} \Delta z - \frac{2x^3}{2.3 dx} d. \Delta z + \frac{3x^4}{2.3.4 dx^2} d.^2 \Delta z \\ - \frac{4x^5}{2.3\dots 5 dx^3} d.^3 \Delta z + \text{ecc.}$$

Col mezzo pertanto di qualunque di queste equazioni si troverà il valore di (z) corrispondente al differenziale $dx \int z dx$; il che ecc.

COROLLARIO.

Se dunque in queste forme si ponga di nuovo $\int z dx$ per z , e si facciano le debite riduzioni, si perverrà ad ottenere la funzione finita (z) corrispondente al differenziale $dx \int dx \int z dx$, com'è manifesto, e così successivamente per qualsivoglia numero d'integrali.

§. XXIV.

P R O B L E M A VI.

Reciprocamente proposta la funzione finita (z) , discendere alla forma differenziale $dx \int dx \int dx \dots \int z dx$, perchè sia

$$\Sigma (z) = \int dx \int dx \int dx \dots \int z dz$$

Si ripigli la sola forma (I') del §. XXI. e poichè nel caso nostro la funzione ivi assunta z divien qui successivamente un'espressione integrale $\int z dx$, $\int dx \int z dx$ ecc., si ponga in quella forma primamente $\int z dx$ per z . Differenziando e dividendo per dx , si avrà immediatamente

$$(a) \dots z = \frac{d(z)}{dx} - \frac{d'(z)}{2 dx^2} + \frac{A \omega d' z}{dx^3} + \frac{A' \omega^3 d^3(z)}{dx^5} + \text{ecc.}$$

ficchè $\Sigma (z) = \int z dx$. E di nuovo, posto in questa forma (a) $\int z dx$ in luogo di z , si differenzj e divida per dx , e si avrà

$$(b) \dots z = \frac{d^1(z)}{\omega dx^1} - \frac{d^1(z)}{2dx^3} + \frac{A\omega d^4(z)}{dx^4} + \text{ecc.}$$

onde farà $\Sigma(z) = \int dx \int z dx$, e però generalmente l'equazione

$$z = \frac{d^n(z)}{\omega dx^n} - \frac{d^{n-1}(z)}{2dx^{n-1}} + \frac{A\omega d^{n+1}(z)}{dx^{n+1}} + \frac{A'\omega^3 d^{n+4}(z)}{dx^{n+4}} + \text{ecc.}$$

Somministrerà il valore di z , onde sia

$$\Sigma(z) = \int dx \int dx \int dx \dots \int z dx$$

esprimendo n il numero de' segni d' integrazione affutti; il che ecc.

CAPITOLO TERZO.

Veduto per le funzioni di una sola variabile, è mestieri di fare qualche tentativo per le funzioni a più variabili ravvicinando sì le loro differenze finite che le somme al calcolo infinitesimale. Ma primamente mi sia permesso per facilità e comodo di allontanarmi dal consueto modo di contrassegnare i differenziali parziali delle espressioni analitiche. Potrebbe accadere, che si trovasse utile l'adoperarle comunemente anche fuori di questo caso. Nel rovescio pertanto della lettera corsiva d esprimente l'ordinaria differenziazione si affiggano le lettere x, y, z ecc. con cui sogliono segnarsi le variabili in questo modo $\mathfrak{d}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}$ ecc. dando luogo a queste forme caratteristiche come a' radicali, a' segni d'integrazione ecc. Se V sia funzione, o espressione in genere di quante variabili si vuole x, y, z ecc., $\mathfrak{d}V$ farà il differenziale di V preso facendo variare la sola x , e prendendo per costanti le altre y, z ecc., $\mathfrak{y}V$ farà il differenziale di V non facendo variare, che y , e così dell' altre. Essendo la lettera variabile nel rovescio, resta luogo agli esponenti, alle parentesi, e ad ogni altra indicazione nella parte

destra. Così $\left(\frac{dV}{dx}\right) dx$, ch' è in uso, farà per noi $\mathfrak{d}V$

semplicemente, $\left(\frac{dV}{dx}\right)$ farà $\frac{\mathfrak{d}V}{dx}$, che non potrà più con-

fonderfi con $\frac{dV}{dx}$, ove occorra indicare la differenza dV presa facendo variar tutto, e divisa per dx . Similmente d^2V esprimerà $(\frac{ddV}{dx^2}) dx$, $\frac{d^2dV}{dx}$ esprimerà $(\frac{ddV}{dx dy}) dy$, e così successivamente. Ciò premesso accingiamoci alla cosa.

§. XXV.

P R O B L E M A VII.

Trovare la variazione finita di z funzione di x, y e costanti, posti rispettivamente ω , μ i moduli delle differenze Δx , Δy .

Essendo generalmente $\Delta dz = d\Delta z$ (§. I.), farà integrando $\Delta z = \int \Delta dz$. Ma $dz = Mdx + Ndy$ secondo le regole del calcolo differenziale, e però $\Delta z = \int \Delta Mdx + \int \Delta Ndy$. Quindi secondo il modo qui innanzi proposto essendo $Mdx = dz$, $Ndy = dz$, farà $\Delta z = \int \Delta dz + \int \Delta dz$. Ma $\frac{dz}{dx} = M$, facendo figura di funzione della sola x , potrà essere trattata $\int \Delta dz$ come funzione di x , e però essendo ω il modulo delle differenze per x , e dx costante, farà (§. XI.)

$$\Delta \int dz = \omega \frac{dz}{dx} + \omega^2 \frac{d^2z}{2dx^2} + \omega^3 \frac{d^3z}{2.3dx^3} + \text{ecc.}$$

Similmente rappresentando $\frac{dz}{dy} = N$ una funzione della sola y , ed essendo μ il modulo delle differenze per y , e dy costante farà

$$\Delta \int dz = \mu \frac{dz}{dy} + \mu^2 \frac{d^2z}{2dy^2} + \mu^3 \frac{d^3z}{2.3dy^3} + \text{ecc.}$$

Dunque aggiugnendo la debita funzione P , avremo per Δz in generale l'espressione (A)

$$(A) \dots Az = P$$

$$+ \omega \frac{d^2 z}{dx^2} + \omega^2 \frac{d^4 z}{2 dx^4} + \text{ecc.}$$

$$+ \mu \frac{d^2 z}{dy^2} + \mu^2 \frac{d^4 z}{2 dy^4} + \text{ecc.}$$

Il che ecc.

§. XXVI.

S C O L I O.

Quanto al completare la variazione, o al determinare la funzione P , due nature di quantità in genere debbono definirsi, l'una che può essere funzione di x , o di y , o di entrambe le variabili, l'altra puramente costante. Per la prima si chiami M il risultamento dalle forme precedenti per Δz , sicchè sia $\Delta z = M + P$. Si differenzj attualmente la funzione z , e sia $dz = dQ$, e di questa equazione si prenda pur attualmente la variazione finita, sicchè sia $\Delta dz = \Delta dQ$. Ma $\Delta dz = d\Delta z$, e però sarà $\Delta dz = dM + dP$. Dunque $\Delta dQ = dM + dP$, dalla qual equazione si determinerà la forma P col calcolo integrale comune. E quanto alle costanti puramente a cui mettesse capo una tal deduzione, non è difficile cosa il vedere, che qualunque siasi la funzione z da differenziare finitamente, e di qualunque numero di variabili x, y ecc. sia ella funzione, nel valore successivo z' , allorchè x, y, z ecc. vi diventano $x + \omega, y + \mu, z + \pi$ ecc. sempre dee trovarsi una funzione de' moduli ω, μ, π ecc. simile alla funzione z proposta, la quale non isvanisce nella differenza $z' - z = \Delta z$. Questa osservazione pertanto ci farà rinvenir sempre sul fatto le quantità puramente costanti di cui avremo mestieri per completare la differenza trovata con questo metodo. Passiamo dunque agli esempi.

I. Esempio.

Sia $z = axy + by^2$ di cui si cerca la variazione finita; farà $d^2 z = ay dx$, $d^2 z = 0$, $d^3 z = 0$ ecc. Similmente $d^2 z = ax dy + 2b dy^2$, $d^3 z = 0$, $d^4 z = 0$ ecc. Si

sostituiscano questi valori nell'espressione (A), e si avrà
(K) $\Delta z = P + a\omega y + a\mu x + 2b\mu y + b\mu^2$

Per determinare la funzione P si trovi il differenziale $dz = aydx + axdy + 2bydy$, indi la variazione finita di questo differenziale (Cap. 1.)

$$\Delta dz = adx\Delta y + ady\Delta x + 2bdy\Delta y = a\mu dx + a\omega dy + 2b\mu dy.$$

$$\text{Ma } \Delta dz = d\Delta z = dP + a\omega dy + a\mu dx + 2b\mu dy.$$

Dunque $dP = 2b\mu dy$, e $P = 2b\mu y + \text{cost. } f$. Ora nel valore (K) è già compresa la funzione del modulo μ simile alla funzione by^2 ; dunque $\text{cost. } f = a\omega\mu$ funzione de' moduli ω, μ simile alla funzione axy . In conseguenza

$$\Delta (axy + by^2) = a\omega y + a\mu x + 2b\mu y + b\mu^2 + a\omega y.$$

II. Esempio.

Sia $z = ax^2y + bx^2y^2$. Posto prima $z = ax^2y$, sarà $\mathcal{H}z = 2ayx dx$, $\mathcal{H}'z = 2ay dx^2$, $\mathcal{H}''z$, $\mathcal{H}'''z$ ecc. $= 0$. Similmente $\mathcal{H}z = ax^2 dy$, $\mathcal{H}'z$, $\mathcal{H}''z$ ecc. $= 0$, e però fatte queste sostituzioni nella forma (A) del Problema, si avrà

$\Delta ax^2y = 2a\omega xy + a\omega^2y + a\mu x^2 + P'$, posto P' una parte di P corrispondente al primo termine dell'espressione proposta. Differenziando $z = ax^2y$, si ottiene $dz = 2axy dx + ax^2 dy$, e però $\Delta dz = 2adx\Delta xy + ady\Delta x^2$. Ed è per l'esempio precedente $2a\Delta xy = 2a\omega y + 2a\mu x + 2a\omega\mu$, e $a\Delta x^2 = 2a\omega x + a\omega^2$ (Cap. 1.). Dunque $\Delta dz = 2a\omega y dx + 2a\mu x dx + 2a\omega\mu dx + 2a\omega x dy + a\omega^2 dy = d\Delta z$. Quindi assumendo per Δz il valore trovato, differenziandolo, e paragonandolo a Δdz , si troverà $dP' = 2a\omega\mu dx$, e però $P' = 2a\omega\mu x + c$. Ma c deve essere una funzione in $\omega\mu$ simile alla funzione ax^2y proposta, cioè $a\omega^2\mu$. In conseguenza sarà

$$(K') \dots \Delta ax^2y = 2a\omega xy + a\omega^2y + a\mu x^2 + 2a\omega\mu x + a\omega^2\mu.$$

Sia ora di nuovo per riguardo al secondo termine $z = bx^2y^2$; sarà $\mathcal{H}z = 2by^2x dx$, $\mathcal{H}'z = 2by^2 dx^2$, e $\mathcal{H}''z$ ecc. $= 0$. Similmente $\mathcal{H}z = 2bx^2y dy$, $\mathcal{H}'z = 2bx^2 dy^2$, $\mathcal{H}''z$ ecc. $= 0$. Fatte queste sostituzioni sarà

$\Delta bx^2y^2 = 2b\omega xy^2 + b\omega^2y^2 + 2b\mu x^2y + b\mu^2x^2 + P''$. Posto ciò, si differenzi $z = bx^2y^2$, e si avrà $dz = 2by^2x dx + 2bx^2y dy$, e però $\Delta dz = 2bdx\Delta xy^2 + 2bdy\Delta yx^2$. Ma posto nella variazione del termine precedente (K') $2b$ in luogo di a , si ha

$$2b\Delta x^2y$$

$$2b\Delta x^2y = 4b\omega xy + 2b\omega^2y + 2b\mu x^2 + 4b\omega\mu x + 2b\omega^2\mu.$$

E di nuovo posto nella stessa equazione (K') $2b$ in luogo di a , x in luogo di y , μ in luogo di ω , e ω in luogo di μ , si avrà

$$2b\Delta y^2x = 4b\mu xy + 2b\mu^2x + 2b\omega y^2 + 4b\omega\mu y + 2b\mu^2\omega.$$

In conseguenza sarà

$\Delta dz = 4b\omega xy dy + 2b\omega^2y dy + 2b\mu x^2 dy + 4b\omega\mu x dy + 2b\omega^2\mu dy + 4b\mu xy dx + 2b\mu^2x dx + 2b\omega y^2 dx + 4b\omega\mu y dx + 2b\mu^2\omega dx$, il qual valore paragonato col differenziale del valore trovato per Δbx^2y^2 somministrerà $dP'' = 4b\omega\mu (x dy + y dx) + 2b\omega^2\mu dy + 2b\omega\mu^2 dx$, e $P'' = 4b\omega\mu xy + 2b\omega^2\mu y + 2b\mu^2x + c$. Ma deve essere $c = b\omega^2\mu^2$, funzione in ω , μ simile alla funzione proposta bx^2y^2 . Dunque unendo i valori trovati pe' due termini $ax^2y + bx^2y^2$, si avrà

$$\Delta (ax^2y + bx^2y^2) = (2a\omega + 4b\omega\mu)xy + 2b\omega xy^2 + 2b\mu x^2y + b\omega^2y^2 + (a\mu + b\mu^2)x^2 + (2b\omega^2\mu + a\omega^2)y + (2a\omega\mu + 2b\mu^2)x + a\omega^2\mu + b\omega^2\mu^2.$$

§. XXVII.

S C O L I O.

Ed ecco come al calcolo integrale comune è ridotto il trovare le variazioni finite delle funzioni a due variabili; nel che è notevole, che nel determinare la funzione P ri-vengono bensì in campo nuove variazioni da determinarsi, ma sempre di grado successivamente inferiore per modo, che in fine si riduce l'occorrenza ultima a variazioni finite di una sola variabile, onde s'è trattato ne' Cap. precedenti. Sembra intanto, che per tal via sieno queste variazioni rese capaci di non difficile maneggio. La forma che competerebbe, secondo il Sig. *de la Grange* (Mem. cit. al §. XVIII.) per Δu , essendo u funzione di due variabili, è questa

$$\frac{du}{dx} \xi + \frac{du}{dy} \Psi$$

$$\Delta u = e - 1$$

essendo ξ il modulo per le differenze di x , Ψ il modulo per y , la quale non è trattabile senza lunghe e difficili preparazioni, come può chiunque riconoscere anche dal solo

caso svolto da questo illustre Geometra per u funzione della sola x al §. XI. Non sarà pertanto inutile, che seguitiamo a far prova del metodo sopra le funzioni di tre variabili, onde riconoscere di che possiamo prometterci generalmente.

§. XXVIII.

P R O B L E M A VIII.

Trovare la variazione finita di Z funzione delle variabili x, y, z e costanti, posti rispettivamente ω, μ, π i moduli $\Delta x, \Delta y, \Delta z$.

Ripigliando il Teorema fondamentale $\Delta dZ = d\Delta Z$, farà integrando $\Delta Z = \int \Delta dZ$; ma per le regole del calcolo differenziale essendo $dZ = Mdx + Ndy + Pdz = \mathcal{H}Z + \mathcal{H}Z + \mathcal{H}Z$ nel modo indicato qui innanzi, farà $\Delta Z = \int \Delta \mathcal{H}Z + \int \Delta \mathcal{H}Z + \int \Delta \mathcal{H}Z$. Rappresentando pertanto $\frac{\mathcal{H}Z}{dx}$ una funzione della sola x , $\frac{\mathcal{H}Z}{dy}$ una funzione della so-

la y , $\frac{\mathcal{H}Z}{dz}$ una funzione della sola z , si potranno definire colle regole ordinarie, come nel Probl. precedente, le forme degl' integrali $\int \Delta \mathcal{H}Z$, $\int \Delta \mathcal{H}Z$, $\int \Delta \mathcal{H}Z$, e però farà generalmente

(B') $\Delta Z = P$

$$+ \omega \frac{\mathcal{H}Z}{dx} + \omega^2 \frac{\mathcal{H}^2 Z}{2dx^2} + \omega^3 \frac{\mathcal{H}^3 Z}{2.3dx^3} + \text{ecc.}$$

$$+ \mu \frac{\mathcal{H}Z}{dy} + \mu^2 \frac{\mathcal{H}^2 Z}{2dy^2} + \mu^3 \frac{\mathcal{H}^3 Z}{2.3dy^3} + \text{ecc.}$$

$$+ \pi \frac{\mathcal{H}Z}{dz} + \pi^2 \frac{\mathcal{H}^2 Z}{2dz^2} + \pi^3 \frac{\mathcal{H}^3 Z}{2.3dz^3}$$

Il che ecc.

Esempio I.

Sia da trovarsi pel caso più semplice $\Delta axyz$. Sarà pertanto $\mathcal{H}Z = ayzdx$, e svaniranno i differenziali successivi, e simil-

mente $\mathcal{H}Z = axzdy$, $\mathcal{H}Z = axydz$, svanendo parimenti per tutte due le forme i differenziali successivi. Sostituendo perciò questi valori rispettivamente nelle forme del Problema precedente, si avrà

$$(B'') \dots \Delta Z = \Delta axyz = P + a\omega yz + a\mu xz + a\pi xy.$$

Posto ciò, essendo $dZ = ayzdx + axzdy + axydz$, farà $\Delta dZ = adx\Delta yz + ady\Delta xz + adz\Delta xy$. Si trovino dunque col mezzo del Probl. VII. le Δyz , Δxz , Δxy a due variabili, e si avrà

$$\Delta yz = \pi y + \mu x + \pi \omega$$

$$\Delta xz = \omega z + \pi x + \pi \omega$$

$$\Delta xy = \omega y + \mu x + \mu \omega. \text{ Dunque farà}$$

$$\Delta dZ = adx(\pi y + \mu x + \mu \omega) + ady(\omega z + \pi x + \pi \omega) + adz(\omega y + \mu x + \mu \omega).$$

Ma questo valore deve essere uguale a $d\Delta Z$, e però il si uguagli al differenziale della formula (B'') , e si otterrà

$$dP = a\pi \mu dx + a\pi \omega dy + a\mu \omega dz, \text{ e } P = a\pi \mu x + a\pi \omega y + a\mu \omega z + C. \text{ Ma } C = a\omega \mu \pi \text{ funzione di } \omega, \mu, \pi \text{ simile alla funzione } axyz \text{ (§. XXVI.). Dunque}$$

$$\Delta axyz = a\omega yz + a\mu xz + a\pi xy + a\pi \mu x + a\pi \omega y + a\mu \omega z + a\omega \mu \pi.$$

Esempio II.

Sia per un altro esempio $Z = ax^2yz + byz + zy^2$. Essendo il secondo e terzo termine funzioni ciascheduno di due sole variabili, intenderemo, che sieno trattati col metodo del VII. Problema, e che però sia $\Delta byz = X$, $\Delta zy^2 = Y$, senza che qui le si cerchino non necessariamente. Si riduce pertanto il quesito a trovare Δax^2yz . Sarà pertanto

$$\mathcal{H}Z = 2ayzxdx, \mathcal{H}^2Z = 2ayzdx^2, \text{ e gli altri differenziali svaniranno successivamente. Similmente farà } \mathcal{H}Z = ax^2zdy,$$

$$\mathcal{H}Z = ax^2ydz, \text{ e faranno del pari nulli i successivi differenziali per tutte due le forme. Si sostituiscano perciò questi valori nelle forme precedenti } (B'), \text{ e si avrà}$$

$$(I) \dots \Delta Z = 2a\omega yzx + a\omega^2yz + a\mu x^2z + a\pi x^2y + P$$

$$\text{Ma } dZ = 2ayzxdx + ax^2ydz + ax^2zdy, \text{ e però}$$

$$(II) \dots \Delta dZ = 2adx\Delta yzx + adz\Delta x^2y + ady\Delta x^2z; \text{ e poichè dall' es. preced. si ricava il valore di } \Delta yzx, \text{ e dal Probl. VII. si ottengono i valori di } \Delta x^2y, \Delta x^2z, \text{ se questi si sostituiscano}$$

Aa ij

no nell'equazione (II), e si paragoni il valore che ne risulta col differenziale della formula (I), si troverà

$$dP = 2a\omega\mu(xdz + zdx) + 2a\omega\pi(xdy + ydx) + 2a\omega\pi\mu dx \\ + 2a\pi\mu x dx + a\omega^2\mu dz + a\omega^2\pi dy, \text{ e però}$$

$$P = 2a\omega\mu xz + 2a\omega\pi xy + 2a\omega\pi\mu x + a\pi\mu x^2 + a\omega^2\mu z + a\omega^2\pi y + C.$$

E poichè $C = a\omega^2\mu\pi$, unendo tutti i valori trovati, sarà

$$\Delta(ax^2yz + byz + zy^2) = 2a\omega yzx + a\omega^2yz + a\mu x^2z + a\pi x^2y \\ + 2a\omega\mu xz + 2a\omega\pi xy + 2a\omega\pi\mu x + a\pi\mu x^2 + a\omega^2\mu z + a\omega^2\pi y + a\omega^2\mu\pi \\ + X + Y.$$

§. XXIX.

S C O L I O.

E qui pure si osserva, che la funzione P può determinarsi con un regolare andamento, riducendosi la sua definizione prima a differenze di grado inferiore, e gradatamente poi alla differenza di funzioni di una sola variabile. Il metodo pertanto sembra esser proprio per funzioni di qualunque numero di variabili, non avendovi altra difficoltà fuorchè quella del calcolo. Tentiamo ora di conoscere, se con altrettanta semplicità ci riesca il metodo inverso, cioè l'integrare le funzioni finite a più variabili.

§. XXX.

P R O B L E M A IX.

Trovare l'integrale di Z funzione delle variabili x, y , ritenute per moduli delle differenze rispettive $\Delta x, \Delta y$ le caratteristiche ω, μ .

Essendosi dimostrato superiormente (Cap. I.) essere generalmente $\Sigma dZ = d\Sigma Z$, sarà integrando $\Sigma Z = \int \Sigma dZ$
 $= \int \Sigma (Mdx + Ndy) = \int \Sigma (\mathcal{A}Z + \mathcal{B}Z)$. Si ripigli pertanto l'espressione generale degl' integrali finiti (§. XXI.)

$$\Sigma Z = \left(\frac{\phi}{a} - \frac{1}{2}\right)Z + \left(Aa - \frac{\phi^2}{2a}\right)\frac{dZ}{d\phi} + \text{ecc.}$$

in cui Z rappresenta una funzione di ϕ , e a il modulo $\Delta\phi$;

e considerando $\frac{dZ}{dx}$ come funzione di x , si sostituisca per Z in questa espressione l'integrale $\int dZ$ in supposizione di y costante, x in luogo di ϕ , ω in luogo di a , e sarà

$$\Sigma \int dZ = \left(\frac{x}{\omega} - \frac{1}{2} \right) \int x dZ + \left(A\omega - \frac{x^2}{2\omega} \right) \frac{dZ}{dx} + \text{ecc.}$$

Similmente considerando $\frac{dZ}{dy}$ come funzione della sola y , si sostituisca nell'equazione superiore per Z l'integrale $\int dZ$ in supposizione di x costante, y per ϕ , μ per a , e si avrà

$$\Sigma \int dZ = \left(\frac{y}{\mu} - \frac{1}{2} \right) \int y dZ + \left(A\mu - \frac{y^2}{2\mu} \right) \frac{dZ}{dy} + \text{ecc.}$$

In conseguenza nel caso nostro sarà generalmente $\Sigma Z = P$

$$+ \left(\frac{x}{\omega} - \frac{1}{2} \right) \int x dZ + \left(A\omega - \frac{x^2}{2\omega} \right) \frac{dZ}{dx} + \text{ecc.}$$

$$+ \left(\frac{y}{\mu} - \frac{1}{2} \right) \int y dZ + \left(A\mu - \frac{y^2}{2\mu} \right) \frac{dZ}{dy} + \text{ecc.}$$

Il che ecc.

§. XXXI.

S C O L I O.

E' facile da vedersi, che per determinare la funzione P non è mestieri di alcun particolare artificio, come nel caso delle variazioni, o differenze, mentre il prendere attualmente la variazione finita dell'equazione per determinarla è cosa dipendente da' Problemi di questo, e de' Capitoli antecedenti. Per altro riuscirà comodo bene spesso e compendioso, nel cercare gl' integrali delle funzioni a due variabili, il supporre costante una di queste, e maneggiare quella solamente delle due forme qui trovate, in cui la medesima variabile è supposta costante, tutto allora riducendosi al definire la funzione P . Così nel caso di tre variabili può ridursi la ricerca all' integrale d'una funzione di due variabili, e così successivamente.

Esempi.

I. Sia per esempio semplicissimo $Z = xy$ di cui si cerca l'integrale finito. Sarà $\mathcal{H}Z = ydx$, $\mathcal{H}'Z$ ecc. $= 0$, e similmente $\mathcal{H}Z = xdy$, $\mathcal{H}'Z$ ecc. $= 0$. Sostituendo pertanto questi valori nelle forme precedenti, si troverà

$$\Sigma xy = P + \frac{x^2y}{2\omega} + \frac{y^2x}{2\mu} - xy + \frac{\omega y}{12} + \frac{\mu x}{12}.$$

Per determinare la funzione P si differenzj finitamente l'equazione, e farà

$$xy = \Delta P + \frac{1}{2\omega} \Delta x^2y + \frac{1}{2\mu} \Delta y^2x - \Delta xy + \frac{\omega}{12} \Delta y + \frac{\mu}{12} \Delta x.$$

Ma pel Probl. VII.

$$\frac{1}{2\omega} \Delta x^2y = \frac{xy}{2} + \frac{\omega y}{2} + \frac{\mu x}{2} + \frac{\mu x^2}{2\omega} + \frac{\omega \mu}{2}$$

$$\frac{1}{2\mu} \Delta y^2x = \frac{xy}{2} + \frac{\mu x}{2} + \frac{\omega y}{2} + \frac{\omega y^2}{2\mu} + \frac{\omega \mu}{2}$$

$$\Delta xy = \omega y + \mu x + \omega \mu$$

e pe' Cap. precedenti

$$\Delta \frac{\omega y}{12} = \frac{\omega \mu}{12}, \Delta \frac{\mu x}{12} = \frac{\omega \mu}{12}. \text{ Fatte dunque le convenevoli ridu-}$$

zioni si avrà $\Delta P = -\frac{\mu x^2}{2\omega} - \frac{\omega y^2}{2\mu} - \frac{\omega \mu}{6}$, di cui si troverà effe-
re l'integrale

$$P = -\frac{\mu x^3}{3\omega^2} + \frac{\mu x^2}{2\omega} - \frac{\mu x}{6} - \frac{\omega y^3}{3\mu^2} + \frac{\omega y^2}{2\mu} - \frac{\omega y}{6}.$$

Per conseguenza farà

$$\Sigma xy = xy \left(\frac{x}{2\omega} + \frac{y}{2\mu} - 1 \right) - \frac{\mu x^3}{3\omega^2} + \frac{\mu x^2}{2\omega} - \frac{\mu x}{6} - \frac{\omega y^3}{3\mu^2} + \frac{\omega y^2}{2\mu} - \frac{\omega y}{6}.$$

II. Trovare l'integrale di $Z = ax^2y$. Essendo $Z = ax^2y$, farà $\mathcal{H}Z = 2ayxdx$, $\mathcal{H}'Z = 2aydx^2$, e poichè i successivi differenziali svaniscono, si sostituiscano questi valori nella prima delle due espressioni del Problema, e però in supposizione di y costante farà

$$\Sigma ax^2y = P + \frac{ayx^3}{3\omega} - \frac{ax^2y}{2} + \frac{axxy}{6}.$$

Si differenzj finitamente l'equazione, e poichè

$$\Delta \frac{ayx^3}{3\omega} = ax^2y + a\omega xy + \frac{a\omega^2y}{3} + \frac{a\mu x^3}{3\omega} + \mu x^2 + \omega\mu x + \frac{\omega^2\mu}{3},$$

si faccia $\frac{a\omega^2y}{3} + \frac{a\mu x^3}{3\omega} + \mu x^2 + \omega\mu x + \frac{\omega^2\mu}{3} = Q$, essendo i termini funzioni di una sola variabile; quindi sarà

$$ax^2y = \Delta P + ax^2y + a\omega xy + Q - \Delta \frac{ax^2y}{2} + \Delta \frac{a\omega xy}{6}, \text{ e}$$

$\Delta P = -a\omega xy - Q + \frac{1}{2}\Delta ax^2y - \frac{1}{6}\Delta a\omega xy$. Pertanto integrando

$$P = -\Sigma a\omega xy - \Sigma Q + \frac{ax^2y}{2} - \frac{a\omega xy}{6}; \text{ e perciò}$$

$\Sigma ax^2y = -\Sigma a\omega xy - \Sigma Q$, essendo il primo termine dell'omogeneo dato dall'esempio precedente, e il secondo dal Cap. I.

III. Trovare l'integrale di $Z = ax^3y + bx^2y^2$. Si ponga primamente $Z = ax^3y$, e si finga nella funzione Z costante la y ; farà $\int dZ = ax^3y$, $dZ = 3ayx^2dx$, $d^2Z = 6ayxdx^2$, $d^3Z = 6aydx^3$, svanendo i successivi differenziali, e però fatta la sostituzione di questi valori nella prima delle due espressioni del Problema, si avrà

$$a\Sigma x^3y = P + \frac{ax^3y}{4\omega} - \frac{ax^3y}{2} + \frac{a\omega x^2y}{4} - \frac{ay}{4.5.6}.$$

Differenziando pertanto finitamente l'equazione, dovrà essere

$$ax^3y = \Delta P + \Delta \frac{ax^3y}{4\omega} - \Delta \frac{ax^3y}{2} + \Delta \frac{a\omega x^2y}{4} - \Delta \frac{ay}{4.5.6}, \text{ e però}$$

si differenzj attualmente il solo termine $\frac{ax^3y}{4\omega}$ superiore di grado alla funzione proposta, e si avrà

$$\begin{aligned} a\Delta \frac{x^3y}{4\omega} &= ax^3y + \frac{3a\omega x^2y}{4} + a\omega^2xy + a\omega^3y + a\mu x^4 \\ &+ 4a\omega\mu x^3 + 3a\omega^2\mu x^2 + 4a\omega^3\mu x + a\mu\omega^4 \\ &= ax^3y + \frac{3a\omega x^2y}{4} + a\omega^2xy + M, \text{ posto} \end{aligned}$$

$$M = a\omega^3y + a\mu x^4 + 4a\omega\mu x^3 + 3a\omega^2\mu x^2 + 4a\omega^3\mu x + a\mu\omega^4,$$

ove i termini sono tutti funzioni di una sola variabile. In conseguenza

$$ax^3y = \Delta P + ax^3y + \frac{3a\omega x^2y}{4} + a\omega^2xy + M - \Delta \frac{ax^3y}{2}$$

$$+ \Delta \frac{a\omega x^2y}{4} - \Delta \frac{ay}{4 \cdot 5 \cdot 6}, \text{ e però integrando}$$

$$P = \frac{ax^3y}{2} - \frac{a\omega x^2y}{4} + \frac{ay}{4 \cdot 5 \cdot 6} - \Sigma \frac{3a\omega x^2y}{4} - \Sigma a\omega^2xy - \Sigma M.$$

Fatta pertanto questa sostituzione in luogo di P , farà

$$(B_1) \dots \Sigma ax^3y = \frac{ax^4y}{4\omega} - \Sigma \frac{3a\omega x^2y}{4} - \Sigma a\omega^2xy - \Sigma M,$$

ove gl'integrali del secondo e terzo termine si sono già trovati negli esempj precedenti, e quello del terzo dipende dal Cap. 1. Resta pertanto da integrarsi il secondo termine della funzione proposta.

Essendo perciò $Z = bx^2y$, $dZ = 2by^2x dx$, $d^2Z = 2by^2 dx^2$, e nulli gli altri differenziali successivi, si finga come sopra y costante, sicchè possa trascurarsi la seconda espressione del Problema. Fatte queste sostituzioni nella prima, farà

$$\Sigma bx^2y^2 = \frac{bx^3y^2}{3\omega} - \frac{bx^2y^2}{2} + \frac{b\omega y^2x}{6} + P$$

e differenziando finitamente

$$bx^2y^2 = \frac{1}{3\omega} \Delta bx^3y^2 - \frac{1}{2} \Delta bx^2y^2 + \frac{1}{6} \Delta b\omega y^2x + \Delta P.$$

Si passi pertanto alla sola attuale differenziazione del primo termine superiore di grado alla funzione proposta e si avrà, fatte le convenevoli riduzioni,

$$\Delta P = \frac{1}{2} \Delta bx^2y^2 - \frac{1}{6} \Delta b\omega y^2x - \frac{2b\mu yx^2}{3\omega} - b\omega xy^2 - 2b\mu x^2y - 2b\omega \mu xy - N$$

$$\text{posto } N = \frac{b\omega^2y^2}{3} + \frac{2b\omega^2\mu y}{3} + \frac{b\mu^2x^2}{3\omega} + b\mu x^2 + \omega\mu^2x + \frac{\omega^2\mu}{3},$$

termini contenenti funzioni solamente di una variabile. In conseguenza integrando

$$P =$$

$$P = \frac{bx^2y^2}{2} - \frac{b\omega xy^2}{6} - 2b\mu \Sigma x^2y - b\omega \Sigma xy^2 - 2b\mu \Sigma x^2y \\ - 2b\omega \Sigma xy - \Sigma N$$

$$\text{e però } \Sigma bx^2y^2 = \frac{bx^3y^2}{3\omega} - 2b\mu \Sigma x^2y - b\omega \Sigma xy^2 - 2b\mu \Sigma x^2y \\ - 2b\omega \Sigma xy - \Sigma N.$$

cioè, sostituendo $2b\mu$ in luogo di a nel valore (B_1) trovato qui innanzi, onde avere $2b\mu \Sigma x^2y$,

$$(C_1) \dots \Sigma bx^2y^2 = \frac{bx^3y^2}{3\omega} - \frac{b\mu x^4y}{2\omega} - b\omega \Sigma xy^2$$

$$+ \left(\frac{3b\mu\omega}{2} - 2b\mu \right) \Sigma x^2y + (2b\mu\omega^2 - 2b\mu\omega) \Sigma xy - \Sigma N + \Sigma M$$

essendo M' ciò che divien M posto $2b\mu$ in luogo di a .

Pertanto si uniscano i valori (B_1) , (C_1) , e si avrà

$$\Sigma (ax^2y + bx^2y^2) = \frac{ax^4y}{4\omega} + \frac{bx^3y^2}{3\omega} - \frac{b\mu x^4y}{2\omega}$$

$$+ \left(\frac{3b\mu\omega}{2} - 2b\mu - \frac{3a\omega}{4} \right) \Sigma x^2y - b\omega \Sigma xy^2 + (2b\mu\omega^2 - a\omega^2 - 2b\mu\omega) \Sigma xy$$

$$+ \Sigma (M' - M - N)$$

ove i termini 4.°, 5.°, 6.° si determinano per gli esempi precedenti, e l'ultimo dipende dal Cap. I. trattandosi di funzioni di una sola variabile.

§. XXXII.

PROBLEMA X.

Trovare l'integrale finito di Z funzione delle variabili x, y, z, posti ω , μ , π i moduli Δx , Δy , Δz .

Ripigliando il Teorema fondamentale $\Sigma dZ = d\Sigma Z$, farà integrando $\Sigma Z = \int \Sigma dZ$. Ma per le regole del calcolo differenziale essendo $dZ = Mdx + Ndy + PdZ = \check{d}Z + \hat{d}Z + \tilde{d}Z$, farà generalmente

$$(A) \dots \Sigma Z = \int \Sigma \check{d}Z + \int \Sigma \hat{d}Z + \int \Sigma \tilde{d}Z.$$

Rappresentando pertanto $\frac{\check{d}Z}{dx}$ una funzione della sola x, $\frac{\hat{d}Z}{dy}$

una funzione della sola y , $\frac{\partial Z}{\partial z}$ una funzione della sola z , si potranno definire colle regole ordinarie, come nel Probl. precedente, le forme (A) col mezzo delle espressioni generali degl'integrali finiti, e però sarà generalmente

$$\Sigma Z = P$$

$$\begin{aligned} &+ \left(\frac{x}{\omega} - \frac{1}{2} \right) \int \partial Z + \left(A\omega - \frac{x^2}{2\omega} \right) \frac{\partial Z}{\partial x} + \text{ecc.} \\ &+ \left(\frac{y}{\mu} - \frac{1}{2} \right) \int \partial Z + \left(A\mu - \frac{y^2}{2\mu} \right) \frac{\partial Z}{\partial y} + \text{ecc.} \\ &+ \left(\frac{z}{\pi} - \frac{1}{2} \right) \int \partial Z + \left(A\pi - \frac{z^2}{2\pi} \right) \frac{\partial Z}{\partial z} + \text{ecc.} \end{aligned}$$

Il che ecc.

§. XXXIII.

S C O L I O

Per determinare in questo caso la funzione P possono primamente adoperarsi tutte e tre le forme precedenti; ma può eziandio supporfi, nella funzione Z , costante una delle variabili z , nel qual caso delle tre forme due sole in x ed y vogliono essere maneggiate, riducendosi il Problema a quello di due variabili. E possono talvolta ancora considerarsi costanti, nella funzione Z , due variabili qualunque, come y , z , onde trattare la sola forma, in cui la x è variabile. In tutti i modi, de' quali può l'uno riuscire più compendiofo dell'altro ne' diversi casi, la determinazione della funzione P dipende dal differenziare finitamente l'equazione, posto tutto variabile, onde ridurla a dipendere da integrali finiti successivamente inferiori di grado, come s'è veduto precedentemente. Per evitar dunque un foverchio calcolo in cosa fatta chiara dalle cose antecedenti, mi limiterò ad un solo esempio.

Esempio.

Sia da trovarsi l'integrale finito della funzione a tre variabili $Z = axyz + bxyz^2$. Prendendo un termine dopo l'al-

tro, sia prima $Z = xyz$. Sarà $\mathcal{H}Z = yzdx$, $\mathcal{H}Z = xzdy$, $\mathcal{H}Z = xydz$, e come gli altri successivi differenziali svaniscono per ciascuna delle variabili, si facciano queste sostituzioni nelle forme trovate, e sarà

$$\begin{aligned} \Sigma xyz &= P + \frac{ayzx^2}{2\omega} + \frac{ay^2xz}{2\mu} + \frac{ayxz^2}{2\pi} - \frac{3}{2}ayzx \\ &\quad + \frac{a\omega yz}{12} + \frac{a\mu xz}{12} + \frac{a\pi xy}{12} \\ &= P + \frac{ayzx^2}{2\omega} + \frac{axzy^2}{2\mu} + \frac{axyz^2}{2\pi} - \frac{3}{2}xyz + M \end{aligned}$$

essendo $M = \frac{a\omega yz}{12} + \frac{a\mu xz}{12} + \frac{a\pi xy}{12}$ funzioni di due sole

variabili. Dovrà pertanto essere, differenziando finitamente, $axyz = \Delta P + \Delta Q$, posto Q il complesso degli altri termini. Si differenzj attualmente un solo de' termini dell'espressione

Q superiore di grado alla funzione $axyz$, cioè $\frac{ayzx^2}{2\omega}$,

e sarà (§. XXVIII.)

$$\begin{aligned} \Delta \frac{ayzx^2}{2\omega} &= xyz + \frac{a\pi x^2}{2\omega} + \frac{a\mu x^2z}{2\omega} + a\pi xy + a\mu xz \\ &\quad + \frac{a\omega yz}{2} + \frac{a\mu \pi x^2}{2\omega} + a\mu \pi x + \frac{a\omega \pi y}{2} + \frac{a\omega \mu z}{2} + \frac{a\omega \mu \pi}{2}. \end{aligned}$$

Si denoti poi per M' il complesso di tutti questi termini, escluso il primo, come funzioni al più di due variabili, e sarà

$$\Delta \frac{ayzx^2}{2\omega} = xyz + M'. \text{ Dunque avremo}$$

$$\Delta P = -M' - \Delta \frac{ay^2xz}{2\mu} - \Delta \frac{ayxz^2}{2\pi} + \Delta \frac{3}{2}xyz - \Delta M, \text{ e}$$

$$P = -\Sigma M' - \frac{ay^2xz}{2\mu} - \frac{ayzx^2}{2\pi} + \frac{3}{2}xyz - M.$$

Sostituito questo valore per P , si avrà

$$\Sigma xyz = \frac{ayzx^2}{2\omega} - \Sigma M', \text{ dipendendo } \Sigma M' \text{ da' Probl. precedenti.}$$

Trovato l'integrale del primo termine della funzione proposta, sia ora $Z = bxyz^2$. Sarà $\delta Z = byz^2 dx$, $\delta Z = bxz^2 dy$, $\delta Z = 2bxyz dz$, $\delta^2 Z = 2bxy dz^2$; e poichè gli altri differenziali successivi svaniscono, si facciano queste sostituzioni nelle forme del Problema, e farà

$$\Sigma bxyz^2 = P + \frac{bxyz^3}{3\pi} + \frac{bx^2yz^2}{2\omega} + \frac{bxz^2y^2}{2\mu} + \frac{3}{2} bxyz^2 \\ + \frac{b\pi xyz}{6} + R$$

posto $R = \frac{b\omega yz^3}{12} + \frac{b\mu xz^3}{12}$, funzioni di due variabili. Sarà dunque differenziando $bxyz^2 = \Delta P + \Delta Q$, essendo Q il complesso di tutti gli altri termini. Si differenzj pertanto attualmente nella forma Q il solo primo termine, e farà (§. xxviii.) $\Delta \frac{bxyz^3}{3\pi} = bxyz^2 + b\pi xyz + S$, essendo S il complesso delle funzioni risultanti di due variabili. Si avrà pertanto

$$\Delta P = -S - b\pi xyz - \Delta \frac{bx^2yz^2}{2\omega} - \Delta \frac{bxz^2y^2}{2\mu} + \frac{3}{2} \Delta bxyz^2 \\ - \frac{b\pi}{6} \Delta xyz - \Delta R, \text{ e però}$$

$$P = -\Sigma (S + b\pi xyz) - \frac{bx^2yz^2}{2\omega} - \frac{bxz^2y^2}{2\mu} + \frac{3}{2} bxyz^2 \\ - \frac{b\pi xyz}{6} - R. \text{ In conseguenza}$$

$\Sigma bxyz^2 = \frac{bxyz^3}{3\pi} - \Sigma (S + b\pi xyz)$, e posto $b\pi$ in luogo di a nel valore trovato poco fa di $\Sigma axyz$, sicchè M' diventi M'' , sarà $\Sigma bxyz^2 = \frac{bxyz^3}{3\pi} - b\pi yzx^2 + \Sigma M'' - \Sigma S$. Unendo dunque insieme i valori trovati, si avrà

$$\Sigma (axyz + bxyz^2) = \frac{bxyz^3}{3\pi} + \left(\frac{a-b\pi}{2\omega} \right) yzx^2 \\ + \Sigma (M'' - M' - S)$$

ove M'' , M' , S sono funzioni al più di due variabili, che possono trattarsi co' Probl. antecedenti.

§. XXXIV.

S C O L I O.

Non credo necessario di estendermi di più, scorgendosi manifestamente da questa Teoria, che le variazioni finite non meno, che gl' integrali delle funzioni a più variabili sono ridotte alle stesse leggi delle funzioni di una sola variabile, 'al che ci ha condotto per mano la combinazione delle differenze e de' differenziali delle funzioni con felice successo. Non resta pertanto, che, come s'è fatto per le funzioni di una sola variabile (Cap. II.), s'indichi pure la via onde ascendere da' differenziali a più variabili alle forme finite, e di discendere reciprocamente da queste a' differenziali corrispondenti.

§. XXXV.

P R O B L E M A X I.

Proposto il differenziale $Mdx + Ndy$ in cui M , N sono funzioni qualunque di x , y e costanti, rimontare alla forma finita ϕ funzione delle medesime variabili, onde sia $\Sigma\phi = \int (Mdx + Ndy)$, ritenuti i moduli consueti ω , μ per le differenze Δx , Δy .

Si faccia $\Sigma\phi = Z$; farà $\phi = \Delta Z = \int \Delta dZ$. Ma (§. xxv.) $\Delta Z = P$

$$+ \frac{\omega^2 dZ}{dx} + \frac{\omega^2 d^2 Z}{2 dx^2} + \frac{\omega^3 d^3 Z}{2.3 dx^3} + \text{ecc.}$$

$$+ \frac{\mu dZ}{dy} + \frac{\mu^2 d^2 Z}{2 dy^2} + \frac{\mu^3 d^3 Z}{2.3 dy^3} + \text{ecc.}$$

Dovendo pertanto essere $d\Sigma\phi = Mdx + Ndy = dZ$ per supposizione, si sostituisca in queste forme Mdx per dZ , $dx dM$ per $d^2 Z$ ecc.; e similmente Ndy per dZ , $dy dN$ per

$\mathcal{H}^2 Z$ ecc., e ϕ per ΔZ , sarà generalmente
 $\phi = P$

$$+ \omega M + \frac{\omega^2 \mathcal{H} M}{2 dx} + \frac{\omega^3 \mathcal{H}^2 M}{2.3 dx^2} + \text{ecc.}$$

$$+ \mu N + \frac{\mu^2 \mathcal{H} N}{2 dy} + \frac{\mu^3 \mathcal{H}^2 N}{2.3 dy^2} + \text{ecc.}$$

Il che ecc.

Esempio.

Sia $2axydx + ax^2dy + bdy + cdx$ una formula differenziale da cui si tratti di rimontare alla forma finita ϕ , onde l'integrale di quella formula sia uguale a $\Sigma \phi$. Essendo pertanto $M = 2axy + c$, $N = ax^2 + b$, sarà $\mathcal{H} M = 2aydx$, $\mathcal{H}^2 M$, $\mathcal{H}^3 M$ ecc. = 0. Ed è pure $\mathcal{H} N$, $\mathcal{H}^2 N$ ecc. = 0; dunque fatte queste sostituzioni nelle forme precedenti si avrà

$$\phi = P + 2a\omega yx + c\omega + a\omega^2 y + a\mu x^2 + b\mu.$$

Per definire la funzione P si consideri, che dovendo essere $\Sigma \phi = \int (Mdx + Ndy)$, sarà differenziando

$$d\Sigma \phi = Mdx + Ndy = 2axydx + ax^2dy + bdy + cdx.$$

Ma $d\Sigma \phi = \Sigma d\omega$, e $d\phi = dP + 2a\omega ydx + 2a\omega xdy + a\omega^2 dy + 2a\mu xdx = dR$. Dunque $\Sigma d\phi = \Sigma dR = 2axydx + ax^2dy + bdy + cdx$, e però differenziando finitamente, sarà $dR = dP + 2a\omega ydx + 2a\omega xdy + a\omega^2 dy + 2a\mu xdx = 2ad\omega x\Delta y + ady\Delta x^2 = 2ad\omega (\omega y + \mu x + \omega \mu) + 2a\omega xdy + a\omega^2 dy$.

In conseguenza $dP = 2a\omega \mu dx$, e $P = 2a\omega \mu x$. Dunque

$$(A) \dots \omega = 2a\omega xy + a\omega^2 y + a\mu x^2 + 2a\omega \mu x + c\omega + b\mu.$$

In fatti dalla forma (A) si può immediatamente discendere al differenziale (B)

$$(B) \dots 2axydx + ax^2dy + bdy + cdx$$

col tramutare il modulo ω nel modulo infinitesimo dx , e il modulo μ nell'infinitamente piccolo dy , rigettando gl'infinitesimi di secondo ordine.

§. XXXVI.

P R O B L E M A XII.

Proposto il differenziale $Mdx + Ndy + Qdz$, in cui M, N, Q sono funzioni delle variabili x, y, z , e costanti, rimontare alla forma finita ϕ , onde sia $\Sigma\phi = \int(Mdx + Ndy + Qdz)$, posti come innanzi ω, μ, π i moduli $\Delta x, \Delta y, \Delta z$.

Si faccia $\Sigma\phi = Z$, onde risulti $\phi = \int \Delta dZ$; e poichè

$$\Delta Z = P + \frac{\omega dZ}{dx} + \frac{\omega^2 d^2 Z}{2dx^2} + \text{ecc.} + \frac{\mu dZ}{dy} + \frac{\mu^2 d^2 Z}{2dy^2} + \text{ecc.}$$

$$+ \frac{\pi dZ}{dz} + \frac{\pi^2 d^2 Z}{2dz^2} + \text{ecc.}$$

e in oltre deve essere $\Sigma\phi = \int(Mdx + Ndy + Qdz) = Z$, si ponga nel valore di ΔZ , $Mdx, dx dM, dx d^2 M$ ecc. in luogo di $dZ, d^2 Z, d^3 Z$ ecc., e similmente $Ndy, dy dN, dy d^2 N$, ecc. in luogo di $dZ, d^2 Z, d^3 Z$ ecc. e ϕ in luogo di ΔZ , e farà

$$\phi = P$$

$$+ \omega M + \frac{\omega^2 dM}{2dx} + \frac{\omega^3 d^2 M}{2.3dx^2} + \text{ecc.}$$

$$+ \mu N + \frac{\mu^2 dN}{2dy} + \frac{\mu^3 d^2 N}{2.3dy^2} + \text{ecc.}$$

$$+ \pi Q + \frac{\pi^2 dQ}{2dz} + \frac{\pi^3 d^2 Q}{2.3dz^2} + \text{ecc.}$$

Il chè ecc.

§. XXXVII.

S C O L I O.

Con lo stesso metodo si potrà procedere ne' differenziali di più variabili, senza che sia necessario di mostrarlo a parte a parte. Veggiamo dunque del discendere dalle funzioni finite a più variabili a' differenziali corrispondenti.

§. XXXVIII.

P R O B L E M A XIII.

Proposta la funzione ϕ delle variabili x, y , discendere al differenziale $Mdx + Ndy$, onde sia $\int (Mdx + Ndy) = \Sigma \phi$ co' moduli consueti ω, μ .

Poichè deve essere $\int (Mdx + Ndy) = \Sigma \phi$, farà differenziando $Mdx + Ndy = d\Sigma \phi$. Ma s'è trovato per l'integrale finito delle funzioni a due variabili (§. XXX.)

$$\begin{aligned} \Sigma \phi = P + \left(\frac{x}{\omega} - \frac{1}{2} \right) \int d\phi + \left(A\omega - \frac{x^2}{2\omega} \right) \frac{d\phi}{dx} + \text{ecc.} \\ + \left(\frac{y}{\mu} - \frac{1}{2} \right) \int d\phi + \left(A\mu - \frac{y^2}{2\mu} \right) \frac{d\phi}{dy} + \text{ecc.} \end{aligned}$$

ed è $d\Sigma \phi = d\Sigma \phi + d\Sigma \phi$. Dunque differenziando $\Sigma \phi$ in supposizione di y costante, farà $M = \frac{d\Sigma \phi}{dx}$, e differenziando di nuovo $\Sigma \phi$ in supposizione di x costante, farà $N = \frac{d\Sigma \phi}{dy}$, con che si determinerà il differenziale dimandato. Il che ecc.

§. XXXIX.

S C O L I O.

Nello stesso modo col sussidio del Probl. x. si definiranno le funzioni M, N, P del differenziale $Mdx + Ndy + Qdz$, se ϕ fosse funzione delle variabili x, y, z , e così di mano in mano se ϕ fosse funzione di più che tre variabili. E qui basti di questo Calcolo combinato, onde non sarà per avventura senza frutto l'aver esposto in questa Memoria i primi faggi elementari.

SOLUZIONE GENERALE

DI UN PROBLEMA GEOMETRICO DI PAPPO ALESSANDRINO.

Del Sig. GIAN-FRANCESCO Malfatti Pubblico Professore di Matematica nella Pontificia Università di Ferrara .

P R O B L E M A

* *Dato un cerchio e qualunque numero di punti dentro o fuori del cerchio, inscrivere allo stesso cerchio un poligono di tanto numero di lati, quanti sono i punti, cosicchè i suoi lati prodotti, se occorre, incontrino i punti dati.*

Il Problema di un cerchio e tre punti costituiti in una medesima retta linea è stato trattato prima da Pappo nel lib. vii. delle Collez. Mat. Prop. cxvii, poi più generalmente dai celebri uomini *Eulero*, *Castillon*, *la Grange*, *Lexell*, e *Fufs*. Ma, eccettuata la soluzione di *Fufs* fatta alla maniera degli antichi Geometri, ch'è elegantissima, delle altre analitiche non s'è pubblicato altro che i risultati finali, senza esporne il calcolo, riuscito forse troppo lungo, e la sintetica di *Castillon*, che dietro al corredo di parecchi lemmi ha ben tutt'altro pregio che quello della brevità, la quale è tanto raccomandabile in sì fatti problemi. Corre ora una voce, che un valoroso giovanetto di 16 anni Napoletano abbia superato se stesso con una soluzione breve e ingegnosa non solo del problema de' tre punti, ma eziandio del problema generalizzato a qualunque numero di punti si voglia. Ciò ha dato stimolo alla mia curiosità per tentarne io pure la soluzione sintetica generale, la quale essendomi felicemente riuscita, mi sono determinato di mandarla all'illustre *Presidente* della Società Italiana, perchè ne faccia quell'uso che più troverà conveniente.

Tomo IV.

C c

L E M M A I.

Dato un cerchio OMNI, e due punti P, D, determinare nella periferia un punto O per modo, che condotte dai dati punti le secanti PON, DOM, e tirata la corda MN, sia questa parallela a una data. (Fig. I.)

Colla PD unisco i punti dati, e faccio PZ parallela alla data. Poi supposto fatto ogni cosa, tiro MI parallela alla PD , che mi fa l'angolo alla periferia $IMN =$ al dato DPZ . Dal centro C del cerchio guido i raggi CN, CI , e tiro la corda NI , che prodotta incontra la PD in Q . Finalmente su NI cade la normale CL , che la biseca in L . I due angoli OMI, ONI sono uguali. Ma $IMO =$ all'alternò ODP . Dunque $ONI = ODP$, e quindi nel quadrilatero $ODQN$ gli angoli ODQ, ONQ eguaglian due retti. Dunque $DP \cdot PQ = NP \cdot PO =$ al quadrato noto della tangente che da P va al dato cerchio, e perciò resta cognita la PQ . Perchè poi ICN è doppio di IMN , cioè doppio di DPZ , farà $ICL = DPZ$. Presa pertanto PS uguale al raggio del cerchio dato, e condotta la SR normale alla PZ , risulterà $PR = CL$. Onde congiunta la CQ , con essa come diametro si descriva il cerchio QLC . Da C si adatti la corda $CL = PR$; appresso si conduca la QLN che incontra il dato cerchio ne' punti I, N , e finalmente si tiri la NP che lo interseca in O . Questo è il punto, per cui fatta passare la DM , e guidata la MN , fa essere MN parallela alla data PZ . La soluzione di questo problema è similissima a quella del Ch. Sig. *Fufs*. Se si osserva la Fig. 2, si vedrà indi nascere una seconda soluzione del problema. Deesi produrre la DP in Q fino a che il rettangolo $DQ \cdot DP$ riesca eguale al quadrato della tangente nota che non più da P , ma da D va al cerchio dato IOM . Il punto O , che si cerca, resta collocato nella periferia concava del cerchio, e le secanti PO, DO il segano ne' punti N, M , cosicchè NM è parallela alla data PZ . Colle dovute modificazioni si scioglie il problema anche quando i punti P, Q son dentro il cerchio, o un dentro e un fuori.

L E M M A II.

Dato un cerchio MOZ e due punti P, Q, determinare nella circonferenza un punto O in guisa che condotte a quel punto le rette PO, QO, formino l'angolo POQ eguale a un dato. (Fig. 3.)

Qui non s'ha a far altro, che determinare, siccome insegna *Euclide*, il segmento POZO di un cerchio che comprenda un angolo eguale al dato. Se questo cerchio sega col suo arco POQ il dato ne' punti O, Z, le rette PO, ZO, ovvero le rette PQ, QZ sciolgono il problema. Se poi non s'ottiene nè intersezione, nè contatto, il problema è impossibile.

P R O B L E M A I.

Dato un cerchio MION, e tre punti A, B, C, inscrivere al cerchio un triangolo IMO tale, che i suoi lati, se sia d'uopo, prodotti passino pei tre punti dati. (Fig. 4.)

La retta AB congiunga i due punti A, B; e supposto ogni cosa fatta, da M si tiri la corda MN parallela ad AB, e da N per O la retta NOP, che incontra la AB in P. Nel quadrilatero MION, gli angoli MIO, MNO fanno due retti. Ma $MNO = OPB$. Dunque ancora AIO, APO presi insieme faran due retti, e farà il rettangolo $ABP =$ al rettangolo IBO , cioè eguale al quadrato della nota tangente, che da B si guida al cerchio, onde farà noto il punto P. Congiungo ora P col terzo punto C, e il problema è ridotto al I. Lemma, che dati due punti P, C determina nella periferia il punto O di maniera che condotte le secanti PON, COM, risulti la corda MN parallela alla data AB.

P R O B L E M A II.

Dato un cerchio LMO, e quattro punti A, B, C, D, inscrivere al cerchio un quadrilatero OIME, cosicchè i suoi lati, se occorre, prodotti incontrino i punti dati. (Fig. 5.)

Coll'ordine tenuto nel problema precedente si congiungano due punti A, B colla retta AB , e supponendo la cosa fatta, da M si tiri la corda MN parallela ad AB , indi da N per O la retta NOP , che incontra la AP in P . Ragionando alla stessa maniera del probl. I., avremo $AB.BP =$ al quadrato della tangente, che si spicca da B e va al cerchio. Dunque P è punto noto. Unisco ora P con C , e da N tiro la corda NL parallela a PC , e congiungo LE , che incontra la CP in Q . Onde riesce il rettangolo $PCQ =$ al quadrato della 2.^a nota tangente che si parte da C , e però abbiain cognito il punto Q . Conduco ora al quarto punto D la retta QD , e dico: gli angoli MNL, MEL , che insistono sullo stesso arco ML , sono tra loro eguali. Ma perchè è MN parallela a PB , e NL parallela a PC , diventa l'angolo $MNL = BPC$, cioè noto. Dunque LEM pure, o il suo opposto al vertice DEQ sarà noto. Il presente problema vien dunque ridotto al II. Lemma: dati 2 punti, Q, D e un cerchio, determinare nella circonferenza un punto E per modo che, condotte DE, QE , sia dato l'angolo DEQ .

P R O B L E M A III.

Dato un cerchio LMNO e cinque punti A, B, C, D, E, inscrivere al cerchio un pentagono MIOGF cosicchè i suoi lati, se fa bisogno, prodotti incontrino i cinque punti dati (Fig. 6.)

Col solito ordine unisco i punti A, B , e tiro la corda MN parallela ad AB , e da N per O la retta NOP . Il rettangolo $ABP =$ al quadrato della tangente da B . Dunque P è punto noto. Congiungo P con C , e da N tendo la corda NL parallela a PC , e guido la secante LGQ che incontrando PC in Q fa essere il rettangolo PCQ e-

Fig. 2.

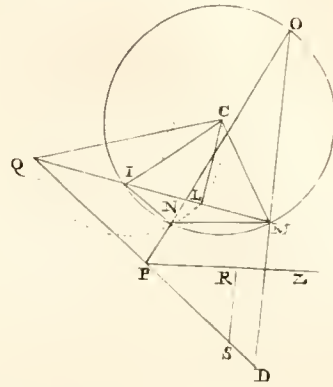


Fig. 4.

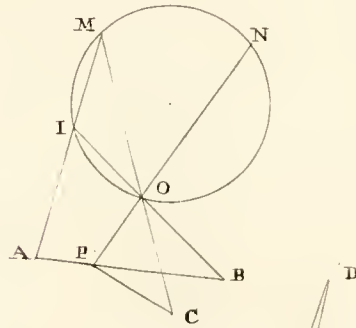


Fig. 6.

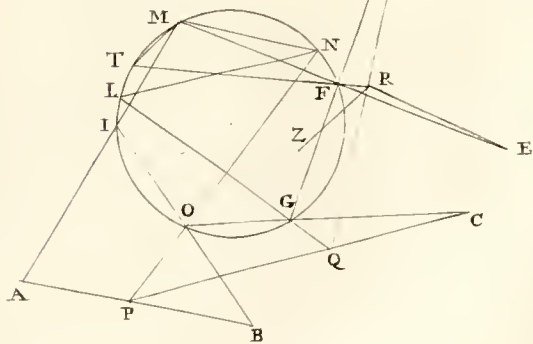


Fig. 1.

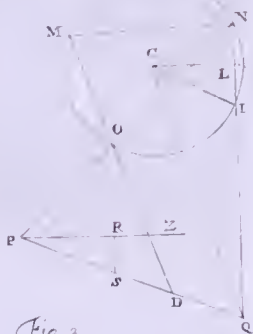


Fig. 3.

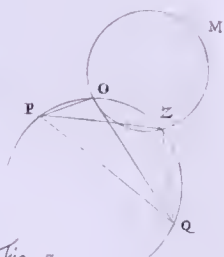


Fig. 5.

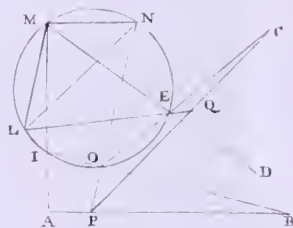


Fig. 2.

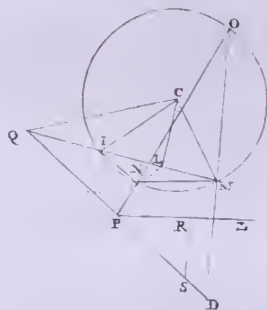


Fig. 4.

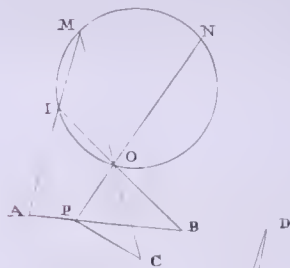
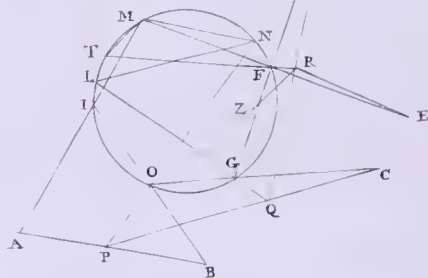


Fig. 6.



guale al quadrato della tangente da C ; e $\mathcal{Q}$ si fa noto. Da $\mathcal{Q}$ al 4.° punto D conduco la $\mathcal{QD}$, e da L la corda LT parallela alla $\mathcal{QD}$, poi da T per F la retta TF , che incontra la $\mathcal{QD}$ in R . Qui pure avremo il rettangolo $\mathcal{QDR} =$ al quadrato della tangente da D , e il punto R resterà determinato. Condotta finalmente al 5.° punto E la retta RE , tiro la corda TM . Nel quadrilatero inscritto al cerchio $LTMN$ la somma degli angoli LTM, MNL fa due retti. Ma è noto l'angolo $MNL = BPC$. Dunque riuscirà egualmente noto l'angolo LTM . Quindi, poichè è RD parallela a LT , se adatteremo la RZ , che faccia con RD l'angolo cognito LTM , a questa dee riuscir parallela la TM , e il problema resta sciolto coll'ajuto del I. Lemma, mentre, dati i punti R, E , si deve trovare nella periferia del cerchio un punto F tale, che, condotte le secanti EFM, RET , comprendano una corda DM parallela alla data RZ .

S C O L I O G E N E R A L E .

Questo invariato metodo, che abbiamo finora praticato, ci fa conoscere, che essendo dispari il numero de' punti dati, la soluzione del problema dipende dal primo Lemma, ed essendo pari, dal secondo: il che con facili cangiamenti che devon farsi, avrà luogo eziandio nell'ipotesi, che o tutti o parte de' punti dati sieno collocati dentro il dato circolo. E per tal modo resterà sciolto compiutamente e in tutta la sua generalità questo celebre Problema.



E S A M E

DI UNA DIMOSTRAZIONE,

Che dà l' Eulero d' un Teorema analitico; e di una celebre regola per determinare la natura e i valori prossimi delle radici di qualunque equazione.

DEL MEDESIMO.

A R T I C O L O I.

Esame della dimostrazione di un teorema dell' Eulero sul valore del prodotto $1.2.3.4...n$, quando n è infinito.

1. *M*oivre ed Eulero seguitati da tutti i Geometri hanno assegnato al prodotto $1.2.3.4...n$, nel caso che sia n infinito, il valore semplicissimo $\frac{n^{n+\frac{1}{2}}\sqrt{2\pi}}{e^n}$ in cui π è la femicirconferenza di raggio 1, ed e il numero, che ha l'unità per logaritmo iperbolico. La dimostrazione, che dà l'Eulero di questo bel teorema, che può esserci in molti casi di grande uso per maneggiar l'infinito, dipende da un altro teorema di *Giacomo Bernoullio* sulla somma generalissima delle serie, la quale modificata al caso del termine generale di certa determinata serie, si vuol che faccia nascere per valore di quel prodotto infinito la suddetta frazione. Per poter dunque apprezzar bene la forza della dimostrazione *Euleriana*, la quale, per quel ch'io sappia, non è stata da alcun ricusata, fa mestieri premettere la teoria del *Bernoullio*, della quale io darò la sostanza, ciò servendo o per rinfrescarne la memoria al lettore che ne sia già istrutto, o per non obbligarlo in caso contrario a ricorrere per istruirsene alle opere del chiarissimo Autore.

2. E' cosa di patente verità, che, chiamato t il termine generale di qualunque serie, e n il numero de' termini, questa equazione $(m) \dots S.t = A + Bn + Cn^2 + Dn^3 + En^4$ ecc. in infinito, essendo A, B, C, D , ecc. costanti indipendenti da n , potrà sempre aver luogo, perchè qualunque formula di somma o algebrica o trascendente ridotta in serie può essere suscettibile di questa espressione. Ora, se nel 2.º membro di (m) introduco $n-1$ in vece di n , è pur chiaro, che questo 2.º membro soffre tal cangiamento, che, laddove prima rappresentava la somma di tutti i termini di $S.t$ fino al posto n viene ad esprimere così mutato la somma de' medesimi termini men l'ultimo, cioè fino al termine di posto $n-1$. Onde, chiamato t' il termine penultimo della stessa data serie, farà

$$\begin{aligned} \dots S.t' &= A + Bn + Cn^2 + Dn^3 + En^4 \text{ ecc.} \\ &\quad - B - 2Cn - 3Dn^2 - 4En^3 \\ &\quad + C + 3Dn + 6En^2 \\ &\quad - D - 4En \\ &\quad + E \end{aligned}$$

Ma $S.t - S.t' = t$. Dunque, sottraendo la seconda dalla prima serie, avremo

$$\begin{aligned} (n) \dots t &= B + 2Cn + 3Dn^2 + 4En^3 \text{ ecc.} \quad \text{Si differenzj la prima} \\ &\quad - C - 3Dn - 6En^2 \quad \text{equazione} \\ &\quad + D + 4En \\ &\quad - E \end{aligned}$$

(m) , e risulterà

$$\frac{d.S.t}{dn} = B + 2Cn + 3Dn^2 + 4En^3 \text{ ecc. Posto poi } dn \text{ co-}$$

stante, si torni a differenziare, e questo 2.º differenziale si divida per 2. Si passi alla nuova differenziazione di questo 2.º differenziale, e il 3.º differenziale che risulta si divida per 3; e così proseguendo a differenziar senza limite, si divida sempre il nuovo differenziale pel numero delle differenziazioni; e otterrassi per tal modo

$$\frac{d^2 S.t}{2dn^2} = C + 3Dn + 6En^2 \text{ ecc.}; \quad \frac{d^3 S.t}{2.3dn^3} = D + 4En \text{ ecc.};$$

$$\frac{d^4 S.t}{2.3.4dn^4} = E \text{ ecc. ecc.}$$

Sicchè sostituendo tutti questi differenziali nella equazione (n), si ha

$$(p) \dots t = \frac{dS.t}{1.dn} - \frac{d^2S.t}{1.2dn^2} + \frac{d^3S.t}{1.2.3dn^3} - \frac{d^4S.t}{1.2.3.4dn^4} \text{ ecc.}$$

Coll' ajuto di questa equazione, data la somma di una serie, se ne ha il termine generale, che farà una quantità di numero finito di termini, ove la somma sia una funzione algebrica intera e razionale di n , ma in tutti gli altri casi non potrà esser dato che per una serie infinita.

3. Che se è dato il termine generale t di una serie, e se ne cerca la somma, questa non si potrà avere senza il regresso della serie che è in (p). Pongasi dunque generalmente

$$(q) \dots S.t = \int t dn + At + \frac{Bdt}{dn} + \frac{Cd^2t}{dn^2} + \frac{Dd^3t}{dn^3} + \frac{Ed^4t}{dn^4} \text{ ecc.},$$

di cui le costanti A, B, C ecc. si determineranno nel progresso del calcolo. Si differenzj illimitatamente questa equazione colla regola de' coefficienti numerici ne' denominatori dei differenziali di $S.t$, che abbiamo sopra notata, e nasce

$$\frac{dS.t}{dn} = t + \frac{Adt}{dn} + \frac{Bd^2t}{dn^2} + \frac{Cd^3t}{dn^3} + \frac{Dd^4t}{dn^4} + \frac{Ed^5t}{dn^5} \text{ ecc.}$$

$$\frac{d^2S.t}{2dn^2} = \frac{dt}{2dn} + \frac{Ad^2t}{2dn^2} + \frac{Bd^3t}{2dn^3} + \frac{Cd^4t}{2dn^4} + \frac{Dd^5t}{2dn^5} \text{ ecc.}$$

$$\frac{d^3S.t}{2.3dn^3} = \frac{d^2t}{2.3dn^2} + \frac{Ad^3t}{2.3dn^3} + \frac{Bd^4t}{2.3dn^4} + \frac{Cd^5t}{2.3dn^5} \text{ ecc.}$$

$$\frac{d^4S.t}{2.3.4dn^4} = \frac{d^3t}{2.3.4dn^3} + \frac{Ad^4t}{2.3.4dn^4} + \frac{Bd^5t}{2.3.4dn^5} \text{ ecc.}$$

$$\frac{d^5S.t}{2.3.4.5dn^5} = \frac{d^4t}{2.3.4.5dn^4} + \frac{Ad^5t}{2.3.4.5dn^5} \text{ ecc.}$$

$$\frac{d^6S.t}{2.3.4.5.6dn^6} = \frac{d^5t}{2.3.4.5.6dn^5} \text{ ecc.}$$

Quindi sostituendo nella equazione (p) questi valori, vien generata quest' altra

$$t = t +$$

$$\begin{aligned}
 t = t + \frac{Adt}{dn} + \frac{Bd^2t}{dn^2} + \frac{Cd^3t}{dn^3} + \frac{Dd^4t}{dn^4} + \frac{Ed^5t}{dn^5} \text{ ecc.} \\
 - \frac{dt}{2dn} - \frac{Ad^2t}{2dn^2} - \frac{Bd^3t}{2dn^3} - \frac{Cd^4t}{2dn^4} - \frac{Dd^5t}{2dn^5} \\
 + \frac{d^2t}{2.3dn^2} + \frac{Ad^3t}{2.3dn^3} + \frac{Bd^4t}{2.3dn^4} + \frac{Cd^5t}{2.3dn^5} \\
 - \frac{d^3t}{2.3.4dn^3} - \frac{Ad^4t}{2.3.4dn^4} - \frac{Bd^5t}{2.3.4dn^5} \\
 + \frac{d^4t}{2.3.4.5dn^4} + \frac{Ad^5t}{2.3.4.5dn^5} \\
 - \frac{d^5t}{2.3.4.5.6dn^5}
 \end{aligned}$$

4. Dalla forma di questa equazione evidentemente si raccoglie, dovere fuor del primo t svanire tutti i termini nell' omogeneo di comparazione; la qual condizione ci somministra la determinazione delle nostre costanti A, B, C ecc., i cui valori emanano dalle seguenti equazioni;

$$\begin{aligned}
 A = \frac{1}{2}; \quad B = \frac{A}{2} - \frac{1}{2.3}; \quad C = \frac{B}{2} - \frac{A}{2.3} + \frac{1}{2.3.4}; \\
 D = \frac{C}{2} - \frac{B}{2.3} + \frac{A}{2.3.4} - \frac{1}{2.3.4.5}; \quad E = \frac{D}{2} - \frac{C}{2.3} \\
 + \frac{B}{2.3.4} - \frac{A}{2.3.4.5} + \frac{1}{2.3.4.5.6} \text{ ecc.}
 \end{aligned}$$

Non trascureremo qui di osservare, che risultando

$$B = \frac{1}{3.4}, \text{ se nel valore di } C \text{ s'introdurranno i valori di}$$

A, B , si farà $C=0$. Così trovandosi $D = -\frac{1}{5.9.16}$, col porre in E i valori di A, B, D , diventerà $E=0$; e così cominciando da C succederà in tutti i termini, che faranno al $3^\circ, 5^\circ, 7^\circ$ ecc. posto; il che vuol dire, che svaniranno i coefficienti dei differenziali di t che abbiano una denominazione pari; e in conseguenza che si poteva nella

equazione (q) mettere solo i termini dei differenziali di denominazione dispari, ricavandosi anche così i veri valori dei coefficienti de' termini nel regresso della serie presentato dalla equazione (p).

5. Ripudiata pertanto la forma della equazione (q), stabilisco quest'altra equivalente

$$(r) \dots S.t = \int t dn + \frac{t}{2} + \frac{Adt}{dn} + \frac{Bd^3t}{dn^3} + \frac{Cd^5t}{dn^5} + \frac{Dd^7t}{dn^7} \\ + \frac{Ed^9t}{dn^9} + \frac{Fd^{11}t}{dn^{11}} \text{ ecc.}$$

E colla solita regola passando alle successive differenziazioni, ne traggio

$$\frac{d.S.t}{dn} = t + \frac{dt}{2dn} + \frac{Ad^3t}{dn^3} + \frac{Bd^5t}{dn^5} + \frac{Cd^7t}{dn^7} + \frac{Dd^9t}{dn^9} + \frac{Ed^{11}t}{dn^{11}} \\ + \frac{Fd^{13}t}{dn^{13}} \text{ ecc. ;}$$

$$\frac{d^2.S.t}{2.dn^2} = \frac{dt}{2dn} + \frac{d^3t}{2.2dn^3} + \frac{Ad^5t}{2.dn^5} + \frac{Bd^7t}{2.dn^7} + \frac{Cd^9t}{2.dn^9} + \frac{Dd^{11}t}{2.dn^{11}} \\ + \frac{Ed^{13}t}{2.dn^{13}} \text{ ecc.}$$

$$\frac{d^3.S.t}{2.3.dn^3} = \frac{d^3t}{2.3.dn^3} + \frac{d^5t}{2.2.3.dn^5} + \frac{Ad^7t}{2.3.dn^7} + \frac{Bd^9t}{2.3.dn^9} + \frac{Cd^{11}t}{2.3.dn^{11}} \\ + \frac{Dd^{13}t}{2.3.dn^{13}} + \frac{Ed^{15}t}{2.3.dn^{15}} \text{ ecc.}$$

$$\frac{d^4.S.t}{2.3.4.dn^4} = \frac{d^5t}{2.3.4.dn^4} + \frac{d^7t}{2.2.3.4.dn^7} + \frac{Ad^9t}{2.3.4.dn^9} + \frac{Bd^{11}t}{2.3.4.dn^{11}} \\ + \frac{Cd^{13}t}{2.3.4.dn^{13}} + \frac{Dd^{15}t}{2.3.4.dn^{15}} \text{ ecc.}$$

$$\frac{d^5.S.t}{2.3.4.5.dn^5} = \frac{d^7t}{2.3.4.5.dn^5} + \frac{d^9t}{2.2.3.4.5.dn^9} + \frac{Ad^{11}t}{2.3.4.5.dn^{11}} \\ + \frac{Bd^{13}t}{2.3.4.5.dn^{13}} + \frac{Cd^{15}t}{2.3.4.5.dn^{15}} + \frac{Dd^{17}t}{2.3.4.5.dn^{17}} \text{ ecc.}$$

$$\frac{d^6 S.t}{2.3...6dn^6} = \frac{d^5 t}{2.3...6dn^5} + \frac{d^6 t}{2.2.3...6dn^6} + \frac{Ad^7 t}{2.3...6dn^7} \\ + \frac{Bd^8 t}{2.3...6dn^8} + \frac{Cd^{11} t}{2.3...6dn^{11}} \text{ ecc.}$$

$$\frac{d^7 S.t}{2.3...7dn^7} = \frac{d^6 t}{2.3...7dn^6} + \frac{d^7 t}{2.2.3...7dn^7} + \frac{Ad^8 t}{2.3...7dn^8} \\ + \frac{Bd^{10} t}{2.3...7dn^{10}} + \frac{Cd^{11} t}{2.3...7dn^{11}} \text{ ecc.}$$

$$\frac{d^8 S.t}{2.3...8dn^8} = \frac{d^7 t}{2.3...8dn^7} + \frac{d^8 t}{2.2.3...8dn^8} + \frac{Ad^9 t}{2.3...8dn^9} \\ + \frac{Bd^{11} t}{2.3...8dn^{11}} \text{ ecc.}$$

$$\frac{d^9 S.t}{2.3...9dn^9} = \frac{d^8 t}{2.3...9dn^8} + \frac{d^9 t}{2.2.3...9dn^9} + \frac{Ad^{10} t}{2.3...9dn^{10}} \\ + \frac{Bd^{11} t}{2.3...9dn^{11}} \text{ ecc.}$$

$$\frac{d^{10} S.t}{2.3...10dn^{10}} = \frac{d^9 t}{2.3...10dn^9} + \frac{d^{10} t}{2.2.3...10dn^{10}} + \frac{Ad^{11} t}{2.3...10dn^{11}} \text{ ecc.}$$

$$\frac{d^{11} S.t}{2.3...11dn^{11}} = \frac{d^{10} t}{2.3...11dn^{10}} + \frac{d^{11} t}{2.2.3...11dn^{11}} \\ + \frac{Ad^{12} t}{2.3...11dn^{12}} \text{ ecc.}$$

$$\frac{d^{12} S.t}{2.3...12dn^{12}} = \frac{d^{11} t}{2.3...12dn^{11}} + \frac{d^{12} t}{2.2.3...12dn^{12}} \text{ ecc.}$$

$$\frac{d^{13} S.t}{2.3...13dn^{13}} = \frac{d^{12} t}{2.3...13dn^{12}} \text{ ecc.}$$

6. Sostituisco tutti questi valori nella equazione (p), e per brevità noto solo tutti i differenziali di denominazione pari, perchè i valori de' coefficienti majuscoli tratti dai termini di differenzial dispari ritornan gl' istessi con quelli che

ci presentano i termini immediatamente precedenti di differenzial pari. Onde sarà

$$\begin{aligned}
 t = & t + \frac{d^2 t}{dn^2} \left(A - \frac{1}{2.2} + \frac{1}{2.3} \right) + \frac{d^4 t}{dn^4} \left(B + \frac{A}{2.3} \right. \\
 & \left. - \frac{1}{2.2.3.4} + \frac{1}{2.3.4.5} \right) \\
 & + \frac{d^6 t}{dn^6} \left(C + \frac{B}{2.3} + \frac{A}{2.3.4.5} - \frac{1}{2.2.3.4.5.6} + \frac{1}{2.3.4.5.6.7} \right) \\
 & + \frac{d^8 t}{dn^8} \left(D + \frac{C}{2.3} + \frac{B}{2.3...5} + \frac{A}{2.3...7} - \frac{1}{2.2.3...8} + \frac{1}{2.3...9} \right) \\
 & + \frac{d^{10} t}{dn^{10}} \left(E + \frac{D}{2.3} + \frac{C}{2.3.4.5} + \frac{B}{2.3...7} + \frac{A}{2.3...9} \right. \\
 & \left. - \frac{1}{2.2.3...10} + \frac{1}{2.3...11} \right) \\
 & + \frac{d^{12} t}{dn^{12}} \left(F + \frac{E}{2.3} + \frac{D}{2.3...5} + \frac{C}{2.3...7} + \frac{B}{2.3...9} \right. \\
 & \left. + \frac{A}{2.3...11} - \frac{1}{2.2.3...12} + \frac{1}{2.3...13} \right) \text{ ecc.}
 \end{aligned}$$

coll'andamento delle serie de' coefficienti di legge chiara.

7. In questa equazione, che deve essere identica, si annullano nel 2.^o membro tutti i termini, eccettuato il primo; dal che ci verrà fatto di stabilire tante equazioni, quante sono le indeterminate A, B, C ecc., e riusciran quindi cogniti i loro valori. Dalla prima si trae $A = \frac{1}{3.4}$. Col-

la seconda troviamo $B = - \frac{1}{2.3.2.3.4.5}$; e andando innanzi

si ha $C = \frac{1}{2.3.4.3.4.5.6.7}$; $D = - \frac{9}{2.3.5.2.3...9}$;

$E = \frac{25}{2.3.5.2.3...11}$; $F = - \frac{691}{2.3.5.7.2.3...13}$;

$$G = \frac{3675}{2.3.5.7.2.3...15}; H = - \frac{227871}{2.3.5.7.9.2.3...17};$$

$$I = \frac{1974015}{2.3.5.7.9.2.3...19}; L = - \frac{231010353}{2.3.5.7.9.11.2.3...21}$$

$$M = \frac{2960887545}{2.3.5.7.9.11.2.3...23} \text{ ecc. , indicando i nuovi simboli}$$

G, H, I, L, M i coefficienti nella equazione (r) che appartengono ai differenziali $\frac{d^{13}t}{dn^{13}}, \frac{d^{15}t}{dn^{15}} \dots$ fino al differenziale $\frac{d^{21}t}{dn^{21}}$.

8. Facendo ora uso dei ritrovati valori delle majuscole nella equazione (r), e ponendo sotto ciascun differenziale tanto numero di fattori 1.2.3 ecc. quanto è l'indice dello stesso differenziale, risulta

$$S.t = \int t dn + \frac{t}{2} + \frac{1}{3.4} \cdot \frac{dt}{1.dn} - \frac{1}{4.5.2.3} \cdot \frac{d^3t}{1.2.3dn^3} \\ + \frac{1}{6.7.2.3.4} \cdot \frac{d^5t}{1.2.3.4.5dn^5} - \frac{9}{8.9.2.3.5} \cdot \frac{d^7t}{1.2.3...7dn^7} \text{ ecc.}$$

$$\text{Onde fatto per comodo } \frac{1}{2.2.3} = a; \frac{1}{2.4.5.3} = b; \frac{1}{2.6.7.3}$$

$$= c; \frac{9}{2.8.9.3.5} = e; \frac{25}{2.10.11.3.5} = f; \frac{691}{2.12.13.3.5.7}$$

$$= g; \frac{3675}{2.14.15.3.5.7} = h; \frac{227871}{2.16.17.3.5.7.9} = i;$$

$$\frac{1974015}{2.18.19.3.5.7.9} = l; \frac{231010353}{2.20.21.3.5.7.9.11} = m;$$

$$\frac{2960887545}{2.22.23.3.5.7.9.11} = p \text{ ecc. , farà}$$

$$(s) \dots S.t = \int t dn + \frac{t}{2} + \frac{adt}{1.dn} - \frac{bd^3t}{1.2.3dn^3} + \frac{cd^5t}{1.2.3.4.5dn^5}$$

D d iij

$$\begin{aligned}
& - \frac{ed^7t}{1.2...7dn^7} + \frac{fd^9t}{1.2...9dn^9} - \frac{gd^{11}t}{1.2.3.11dn^{11}} + \frac{hd^{13}t}{1.2.3...13dn^{13}} \\
& - \frac{id^{15}t}{1.2...15dn^{15}} + \frac{ld^{17}t}{1.2...17dn^{17}} - \frac{md^{19}t}{1.2...19dn^{19}} \\
& + \frac{pd^{21}t}{1.2...21dn^{21}} \text{ ecc.}
\end{aligned}$$

9. Col mezzo di questa equazione, dato che sia il termine generale t di una serie, se ne troverà la somma espressa per un'altra serie, la quale al caso di t funzione algebrica, razionale e intera di n s'interrompe, e ne viene perciò esibita la somma in termini di numero finito. Ma, ove sia t funzione trascendente, irrazionale o fratta di n , la serie va all'infinito. Potrem però riprometterci anche in questo caso di avere il valor prossimo di $S.t$, quando se ne dimostri la convergenza, mentre al caso che diverga, essa riesce affatto inetta per sì fatta determinazione. Veggiamo presentemente, se abbia qualità di convergenza o divergenza la serie che costituiscono i numeri a, b, c ecc., che denomineremo da qui innanzi i numeri bernoulliani.

10. Questa serie, benchè al principio possa parer convergente, perchè è realmente $a > b$; $b > c$, diventando però in appresso $c < e$, $e < f$ ecc. coi termini susseguenti sempre maggiori degli antecedenti, in sostanza è una serie divergente, anzi di una divergenza assai notevole e grande, come si potrà conoscere col calcolo. Dunque qualora i termini affetti dai numeri bernoulliani non vengano piegati alla convergenza dai valori dei differenziali $\frac{dt}{1.dn}$, $\frac{d^3t}{1.2.3.dn^3}$ ecc. e dalle ipotesi dei valori di n , refterà sempre inidonea la serie dell'equazione (s) al rintracciamento del prossimo non che dell'esatto valore di $S.t$. Anzi nella supposizione ancora di n infinito, avvegnachè fatte le prescritte differenziazioni del termine generale t i termini dell'omogeneo in (s) venisser divisi da potestà sempre crescenti di n , come, per esempio, $\frac{a}{n} - \frac{b}{n^3} + \frac{c}{n^5}$ ecc., non ci farà lecito di asserire, che, per la sola ragione dell'infinito nel denominatore, tutti questi

termini svaniscano, perchè essendomi sino ad ora ignota la legge della divergenza nei numeratori, io non so decidere, se ne' termini all' infinito la forza de' numeratori possa, o no esser cresciuta a segno di equilibrare o anche di superare il contrasto per l' evanescenza de' termini medesimi che lor fanno i denominatori.

11. Mi piace di recare un esempio, che stabilisca palpabilmente la verità della mia proposizione. Mi presento la

serie $\frac{2^1}{n} + \frac{2^4}{n^2} + \frac{2^9}{n^3} + \frac{2^{16}}{n^4} \dots\dots + \frac{2^{m^2}}{n^m}$, e suppongo n in-

finito. Egli è certo, che posto m numero finito, quantunque grande, tutta la serie è un nulla. Ma se rimanendo n infinito, tale pur si fa m , e sia, per esempio, m dello stesso ordine di n , si può egli dire, che seguiti la serie medesima ad essere di valor zero? Mai no, perchè converrebbe a tal uopo, che i termini al posto infinitamente lontano

dal primo, e in conseguenza anche l' ultimo termine $\frac{2^{m^2}}{n^m}$

fosse quantità nulla. Il che non può accadere se non quando il numeratore 2^{m^2} sia effettivamente infinitamente minore del denominatore n^m . Da tale ipotesi, cioè 2^{m^2} inf.^e $< n^m$ passando ai logaritmi risulta $m^2 \log 2$ inf.^e $< m \log n$, e dividendo per m ; $m \log 2$ inf.^e $< \log n$. Ma le dottrine logaritmiche c' insegnano essere il numero infinito infinitamente maggiore del suo logaritmo. Dunque n inf.^e $> \log n$, e quindi tutte le quantità infinite dello stesso ordine di n infinitamente maggiori di $\log n$. Perciò anche m inf.^e $> \log n$, e molto più $m \log 2$ inf.^e $> \log n$: il che essendo verissimo ripugna alla conseguenza contraria dell' ipotesi assurda, che ci dava $m \log 2$ inf.^e $< \log n$. Ecco pertanto 2^{m^2} inf.^e $> n^m$; il che fa essere l' ultimo termine della proposta serie e conseguentemente tutta la serie una quantità infinita. Resta dunque provato con evidenza, che colla sola ragione dei denominatori infiniti de' termini di una serie che abbia i corrispondenti numeratori finiti e divergenti nei posti finitamente lontani dal primo, non si può aver certezza del suo svanimento, che debb' essere per altra via conosciuto, ove esso realmente succeda. Questo a me pare un

principio sicurissimo, sul quale non possa far cadere dubbio un geometra ragionatore.

12. Vengo ora alla applicazione che nel Cap. V. della II. Parte del calc. diff. fa l'Eulero di questa teoria del Bernoullio ad una funzione trascendente; e stabilisco con esso $t = \ln$, che dà $S.t = l_1 + l_2 + l_3 \dots + l_n$; $\int t dn = \int dn \ln = n \ln - n$; $\frac{dt}{dn} = \frac{1}{n}$; poi fatto dn costante,

$$\frac{d^2 t}{dn^2} = -\frac{1}{n^2}; \quad \frac{d^3 t}{dn^3} = \frac{1.2}{n^3}; \quad \frac{d^4 t}{dn^4} = -\frac{1.2.3}{n^4}; \quad \frac{d^5 t}{dn^5} =$$

$$= \frac{1.2.3.4}{n^5} \text{ ecc., ove si vede, che tutti i valori de' dif-}$$

ferenziali dispari hanno prefisso il segno positivo, e dei pari il negativo; che il coefficiente numerico del termine è il prodotto de' numeri naturali fino al numero di un'unità minore di quel che denomina il differenziale, e che la potestà di n nel termine è il numero dello stesso differenziale. Risultata da ciò, che se introdurremo nella equazione (s) tutti questi valori, senza omettere la costante, a cui ci obbliga la sommatoria nel 2.º membro, avremo

$$(t) \dots l_1 + l_2 + l_3 \dots + l_n = C + \left(n + \frac{1}{2}\right) \ln - n + \frac{a}{n} - \frac{b}{3n^3} + \frac{c}{5n^5} - \frac{e}{7n^7} + \frac{f}{9n^9} - \frac{g}{11n^{11}} + \frac{h}{13n^{13}} - \frac{i}{15n^{15}} + \frac{l}{17n^{17}} - \frac{m}{19n^{19}} + \frac{p}{21n^{21}} \text{ ecc..}$$

E questa equazione va-

le, qualunque sia il numero n .

13. Per la determinazione della costante C si è offerta all'Autore prima d'ogni altra l'ipotesi di $n = 1$, che induce nella equazione (t) la modificazione seguente;

$$l_1 = 0 = C - 1 + a - \frac{b}{3} + \frac{c}{5} - \frac{e}{7} + \frac{f}{9} \text{ ecc., o sia}$$

$$C = 1 - a + \frac{b}{3} - \frac{c}{5} + \frac{e}{7} - \frac{f}{9} \text{ ecc. Ma riflettendo tosto,}$$

che

che questa serie per la troppa divergenza si rende inetta a dare almeno un valor prossimo della costante C , si rivolge all'altra ipotesi di n infinito; e allora, soggiunge il celebre Autore, svaniscono tutti i termini affetti dai numeri bernoulliani, e resta $I \dots l_1 + l_2 + l_3 \dots + l_n = C + (n + \frac{1}{2}) \times l_n - n$; per determinar C pone nella stessa equazione I $2n$ in vece di n , ed ha

$II \dots l_1 + l_2 + l_3 \dots + l_{2n} = C + (2n + \frac{1}{2}) l_{2n} - 2n$. Aggiunge nella I dall'una e dall'altra parte nl_2 , e gli si genera

$$(l_1 + l_2) + (l_2 + l_2) + (l_3 + l_2) + (l_4 + l_2) \dots + (l_n + l_2) = C + (n + \frac{1}{2}) l_n - n + nl_2, \text{ cioè } III \dots l_2 + l_4 + l_6 + l_8 \dots + l_{2n} = C + (n + \frac{1}{2}) l_n - n + nl_2.$$

Sottraendo poi l'equazione III dalla II ottiene

$$IV \dots l_1 + l_3 + l_5 \dots + l(2n-1) = nl_n + (n + \frac{1}{2}) l_2 - n.$$

Ma per l'espressione Wallisiana nota a tutti i Geometri, si ha

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2.2.4.4.6.6.8.8.10.10.12 \text{ ecc.}}{1.3.3.5.5.7.7.9.9.11.11 \text{ ecc.}}$$

$$\text{ovvero } \frac{\pi}{2} = \frac{2.2.4.4.6.6.8.8. \dots (2n-2)(2n-2)(2n)}{1.3.3.5.5.7.7.9.9. \dots (2n-1)(2n-1)}, \text{ dove } \pi$$

significa la semicirconferenza di raggio 1, e il numero n è infinito. Dunque col prendere i logaritmi, avremo

$$l \frac{\pi}{2} = 2l_2 + 2l_4 + 2l_6 \dots + 2l_{2n} - l_{2n} - l_1 - 2l_3 - 2l_5$$

$- 2l_7 \dots - 2l(2n-1)$, ovvero ponendo $-2l_1$ in vece di $-l_1$, che è lo stesso, perchè $l_1 = 0$, e riducendo,

$$\frac{1}{2} l \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} l_{2n} = l_2 + l_4 + l_6 \dots + l_{2n} - l_1 - l_3 - l_5 - l_7 \dots$$

$- l(2n-1)$, cioè colla sostituzione nel 2.º membro degli o-

$$\text{mogenei delle equazioni } III, IV; \frac{1}{2} l \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} l_{2n} = C$$

$$+ (n + \frac{1}{2}) l_n - n + nl_2 - nl_n - (n + \frac{1}{2}) l_2 + n = C$$

$+\frac{1}{2} l \frac{n}{2}$. Quindi si deduce $C = \frac{1}{2} l \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} l 2\pi$

$-\frac{1}{2} l \frac{n}{2} = \frac{1}{2} l 2\pi$, cioè in frazioni decimali

$C = 0.9189385332046727417803297$; e però collocato questo valore nella equazione I , ci nasce... $l_1 + l_2 \dots + l_n$

$= (n + \frac{1}{2}) l_n - n + \frac{1}{2} l 2\pi$, cui equivale quest'altra

$l(1.2.3.4\dots n) = \log. \left(\frac{n^{n+\frac{1}{2}} \sqrt{2\pi}}{e^n} \right)$, supposta e la solita base

de'logaritmi iperbolici; onde finalmente passando dai logaritmi

ai numeri; $1.2.3\dots n = \frac{n^{n+\frac{1}{2}} \sqrt{2\pi}}{e^n}$, che è il teorema fin dal

principio enunciato.

14. Dopo tutto ciò che si è detto nei §.§. 9, 10, ognuno dee di per se vedere che la difficoltà, la quale potrebbe trattenere un attento Geometra dal prestare l'assenso a questa dimostrazione, è quella che nasce dalla secca decisione pronunciata dall'*Eulero* dello svanimento in (t) de' termini affetti dai numeri bernoulliani. Già abbiamo osservato collo stesso Autore che la serie di questi numeri è divergente, e di più ricaviamo dall'esempio della serie del §. 11., che le potestà dell' infinito nei denominatori de' termini non bastano a persuadere della evanescenza di tutta la serie. Con qual fondamento dunque, senza aver nota la legge di questa divergenza in una maniera che ci discopra il rapporto che hanno tra loro il numeratore e il denominatore de' termini infinitamente distanti dal primo, può egli asserire che la serie presa nella sua totalità non sia altro che zero? Io non veggio in questo passo la sicurezza del piede di quel grand' uomo; e mi fa ancora più caso, che dopo la cognizione della divergenza di quella serie, e la confessata sua inidoneità a dare qualunque valor prossimo, che col mezzo di essa si volesse ottenere, abbia poi sperato di trarne utile, e al

§. 159 del cap. citato imprenda di servirsene per aver la somma prossima di qualunque numero finito di logaritmi de' numeri naturali.

15. Il fatto però sta che la cosa gli è ben riuscita, e che i risultati combinano fino a buon numero di cifre decimali coi logaritmi delle tavole, quando però nell' adunamento de' termini della serie in (t) non si vada più avanti di un tal numero di essi termini, che secondo le ipotesi di n ora è maggiore, ora è minore. Ciò fa una grande presunzione per la verità del fissato valore della costante C , e del suddetto svanimento della serie nella supposizione di n infinito. Ma sempre sta, che resta a desiderarsi una dimostrazione più convincente di quel che sia la Euleriana, per potere ammettere con maggiore acquiescenza dello spirito la verità del suo teorema.

16. Tentiamone una così. Al §. 8. abbiain già notato i valori de' numeri bernoulliani fino all'undecimo termine. Presa pertanto da (t) la sola serie de' termini che ne sono af-

$$\text{fetti, abbiamo } (u) \dots \frac{a}{n} - \frac{b}{3n^3} + \frac{c}{5n^5} - \frac{e}{7n^7} + \frac{f}{9n^9} - \frac{g}{11n^{11}} \\ + \frac{h}{13n^{13}} - \frac{i}{15n^{15}} + \frac{l}{17n^{17}} - \frac{m}{19n^{19}} + \frac{p}{21n^{21}} \text{ ecc. Si stabi-}$$

liska prima di tutto $n=1$, e in tal caso essa diventa

$$a - \frac{b}{3} + \frac{c}{5} - \frac{e}{7} + \frac{f}{9} - \frac{g}{11} + \frac{h}{13} - \frac{i}{15} + \frac{l}{17} - \frac{m}{19} + \frac{p}{21} \text{ ecc.}$$

Ora facendo uso degli effettivi valori di a, b, c ecc., e ridotto ognuno de' superiori termini e frazioni decimali, col prescindere dal segno, e collo scrivere il valore sotto il termine analitico, risulta

$$\begin{array}{cccc}
 a & \frac{b}{3} & \frac{c}{5} & \frac{e}{7} \\
 0.08333333; & 0.00277777; & 0.00079365; & 0.00059523; \\
 \frac{f}{9} & \frac{g}{11} & \frac{h}{13} & \frac{i}{15} \\
 0.00084175; & 0.00191752; & 0.00641025; & 0.02955065; \\
 \frac{l}{17} & & \frac{m}{19} & \\
 0.179120627843; & 1.392432216906; & & \\
 \frac{p}{21} & & &
 \end{array}$$

13.402864044168; ecc.

Offervo in questa serie, che i primi 4 termini costituiscono una serie convergente, facendosi al quinto divergente, e continuando poi sempre tale.

17 Passo all'ipotesi di $n=2$, e (u) prende questa forma;

$$\frac{a}{2} - \frac{b}{3 \cdot 2^3} + \frac{c}{5 \cdot 2^5} - \frac{e}{7 \cdot 2^7} + \frac{f}{9 \cdot 2^9} - \frac{g}{11 \cdot 2^{11}} + \frac{h}{13 \cdot 2^{13}} - \frac{i}{15 \cdot 2^{15}} \\
 + \frac{l}{17 \cdot 2^{17}} - \frac{m}{19 \cdot 2^{19}} + \frac{p}{21 \cdot 2^{21}} \text{ ecc. , la quale espressione ri-}$$

dotta a decimali senza curare il segno, si fa

$$\begin{array}{ccc}
 \frac{a}{2} & \frac{b}{3 \cdot 2^3} & \frac{c}{5 \cdot 2^5} \\
 0.04166666; & 0.00034722; & 0.00002480; \\
 \frac{e}{7 \cdot 2^7} & \frac{f}{9 \cdot 2^9} & \frac{g}{11 \cdot 2^{11}} \\
 0.00000465; & 0.00000164; & 0.00000093; \\
 \frac{h}{13 \cdot 2^{13}} & \frac{i}{15 \cdot 2^{15}} & \frac{l}{17 \cdot 2^{17}} \\
 0.00000078; & 0.00000090; & 0.000001366582 \text{ ecc.}
 \end{array}$$

In questa i primi 7 termini fanno la parte convergente, e cominciano a divergere nell'ottavo.

18. La 3.^a ipotesi di $n=3$ induce in (u) tal cangiamento;

$$\frac{a}{3} - \frac{b}{3 \cdot 3^3} + \frac{c}{5 \cdot 3^5} - \frac{e}{7 \cdot 3^7} + \frac{f}{9 \cdot 3^9} - \frac{g}{11 \cdot 3^{11}} + \frac{h}{13 \cdot 3^{13}} \\ - \frac{i}{15 \cdot 3^{15}} + \frac{l}{17 \cdot 3^{17}} - \frac{m}{19 \cdot 3^{19}} \text{ ecc.}$$

ossia colla riduzione a decimali;

$$\begin{array}{cccc} \frac{a}{3} & \frac{b}{3 \cdot 3^3} & \frac{c}{5 \cdot 3^5} & \frac{e}{7 \cdot 3^7} \\ 0.02777777; & 0.00010321; & 0.00000326; & 0.00000027; \\ \frac{f}{9 \cdot 3^9} & \frac{g}{11 \cdot 3^{11}} & \frac{h}{13 \cdot 3^{13}} & \\ 0.00000004; & 0.00000001; & 0.000000004020; & \\ \frac{i}{15 \cdot 3^{15}} & \frac{l}{17 \cdot 3^{17}} & \frac{m}{19 \cdot 3^{19}} & \\ 0.000000002059; & 0.000000001387; & 0.000000001198; & \\ \frac{p}{21 \cdot 3^{21}} & & & \\ 0.000000001281; \text{ ecc.} & & & \end{array}$$

ove si vede che la parte convergente della serie abbraccia i primi 10 termini, e la parte divergente comincia all'undecimo.

19. Così se faremo $n=4$, $n=5$, $n=6$ ecc, troveremo che essendo le serie corrispondenti sul principio convergenti, cominciano a divergere nel 14.^{mo}, 17.^{mo}, 20.^{mo} ecc. termine, onde generalmente la divergenza avrà il suo principio al termine di posto $3n+2$, costituendo tutta la parte antecedente a questo una serie convergente.

20. Da ciò si trae, che presa la serie (u) per n numero di termini successivi, deve questa essere infallibilmente convergente, mentre riman pur tale sino al termine di posto $2n+2$, quando si vuol essa produrre oltre n . Dunque nell'ipotesi di n infinito tutta la serie infinita di numero n termini convergerà sino all'ultimo termine. E siccome in tale ipotesi di n infinito, il 1.^o termine della serie è un infinitesimo di 1.^o ordine; il 2.^o un infinitesimo di 3.^o, il 3.^o di 5.^o ecc., dovendo essere per la ragion della convergenza l'ul-

timo termine infinitesimo di un ordine infinitamente superiore, tutta la serie sino al posto n non farà che una quantità infinitamente piccola, cioè tutta la serie (u) affetta dai numeri bernoulliani sarà $= 0$.

21. Per poter asserire che la suddetta serie è un quanto nullo, quando n è infinito, posto che il primo suo termine è un infinitesimo di 1.° ordine, erami necessario il riflettere all'accrescimento degli ordini di infinitesimi nel valore de' termini successivi; perchè se il valore di ciascun termine fosse stato solo un infinitesimo di 1.° ordine, l'aggregato infinito di questi termini avrebberci portato a un valor di serie finito: come accade nella armonica

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} \dots + \frac{1}{2n}, \text{ di cui, come si fa, la som-}$$

ma ha un valor finito, quando n è infinito, sebbene ciascun de' suoi termini sia una quantità infinitesima.

22. Il raziocinio, che ci ha guidato a provare l'evanescenza della serie de' numeri bernoulliani, ove n è infinito,

ci fa conoscere al contrario, che la serie $\frac{2}{n}, \frac{16}{n^2}, \frac{512}{n^3}$ ecc.

del §. 10. nella stessa ipotesi di n infinito ha un valore infinito. Imperciocchè, fatto successivamente $n=1, 2, 3 \dots 7$, tutta la serie riman sempre divergente. Quando poi si fa

$n=8$, i due primi termini $\frac{2}{8}, \frac{16}{64}$ si fanno eguali, e diver-

gono i susseguenti. Alle ipotesi di $n=9, 10, 11 \dots 31$, i due primi termini convergono, e poi nel terzo comincia la divergenza che dura per tutta la serie. Ove si ponga $n=32$, il 2.° e il 3.° termine sono eguali, e il resto diverge. Da $n=33$ sino a $n=127$ i tre primi termini convergono, divergendo gli altri che seguono, e si fa eguale il 3.° al 4.° nella supposizione di $n=128$. Così si troverà l'eguaglianza del 4.° al 5.°, quando $n=512$, del 5.° al 6.°, ponendo $n=2048$ ecc. Pertanto se si chiama m il posto del termine, a cui diventa eguale il suo susseguente,

varrà l'equazione $n = 2^{2m+1}$, essendo appunto 2^{m+1} il termine generale della serie 8, 32, 128, 2048 ecc.

23 Or, poichè $n = 2^{2m+1}$, passando ai logaritmi, si ha

$$\ln = (2m+1)l_2 \text{ che ci somministra } m = \frac{\ln}{2l_2} - \frac{1}{2}. \text{ Dunque}$$

prendendo nella serie termini di numero n , e supponendo n infinito, la parte di questa serie, i cui termini convergono,

è composta di termini di numero m , cioè di numero $\frac{\ln}{2l_2}$

$-\frac{1}{2}$, ovvero di un numero, il quale, benchè infinito, è

però infinitamente minore del numero n de' termini di tut-

ta la serie, perchè $\ln$, e molto più $\frac{\ln}{2l_1} - \frac{1}{2}$ è infinitamen-

te minore di n . Dunque il residuo de' termini da m fino a n che è pure un residuo infinito, ma pel quale deve scorrere per arrivare al numero di termini n , costituisce una serie divergente infinita, e però tutta la serie è un infinito. Questa maniera di considerare le serie divergenti all' infinito aventi ne' denominatori de' termini potestà o funzioni di n , che non so, se sia stata da alcun Geometra adoperata, mi pare molto acconcia a trarne degli utili risultati per rintracciarne i loro valori, massimamente se ci manca il metodo di conoscer la forma comoda de' loro termini generali, come succede nella serie de' numeri bernoulliani.

24. Da ciò discende come natural corollario, che volendo ne' casi particolari di n il valor prossimo della somma de' logaritmi de' numeri naturali, non potremo far uso nella serie de' termini affetti dai numeri bernoulliani altro che della sua parte convergente, della quale, quanto maggior numero di termini prenderemo, tanto più il valore di questa somma farà vicino al vero. L' aggiunta che si facesse alla parte convergente di uno o più termini della 2.^a parte divergente guiderebbe sempre più lontano dal valore esatto della stessa somma. Così se $n=1$, poichè di 4 termini consta la parte convergente della serie, l'equazione utile, per ottenere il valor più prossimo possibile, farà $l_1 = 0 = C - 1 + a$

$-\frac{b}{3} + \frac{c}{5} - \frac{e}{7}$, ossia riducendo tutto a frazioni decimali e

compiendo il calcolo; $0 = -0.0003075$, con che abbiamo un valore minor del vero per quanto porta la frazione

$\frac{3075}{10000000}$. Se si cresce l'omogeneo di un termine solo del-

la parte divergente, cioè di $\frac{f}{9}$, ovvero di 0.0008417 , na-

sce $0 = 0.0005342$, di cui il 2.^o membro è un valor mag-

giore del vero per quanto porta la frazione $\frac{5342}{10000000}$, la

quale essendo maggiore di $\frac{3075}{10000000}$, vuol dire che coll'

aggiungere questo primo termine della serie divergente in vece di avvicinarci più al valore esatto di quel che abbi- am fatto col prendere la sola parte convergente, ce ne siamo anzi scostati. Se $n=2$, ci saran' utili pei valori prossimi della somma i 7 primi termini contenenti i numeri bernoulliani, ecc. cosicchè generalmente potrem servirci nella medesima serie di numero di termini $3n+1$.

26. Io spero con ciò di avere sufficientemente dimostrato e posto in sicuro l'elegante e mirabil teorema del grande *Eulero*. Di questo sommo uomo, che ha sparso tanto lume fu tutto il Mondo matematico, ed aperte tante ampie vie nella Meccanica e nel Calcolo ai suoi contemporanei ed ai posteri che verranno, si può quasi dire, che le verità più astruse eran per lui verità d' intuizione o almen di presentimento, rimanendo affatto vero ciò che egli asserisce per tale anche quando non lo affida ad una legittima e convincente dimostrazione.

In quest'altra maniera pure, che sarà forse più convincente, si potrà rinforzare la verità della equazione dell' *Eulero*. Nota egli nel citato artic., che i numeri del Bernoullio a, b, c ecc. vengono dati da equazioni della seguente forma

$$a =$$

$$a = \frac{1}{3 \cdot 4}$$

$$b = 3 \cdot 2 \cdot \frac{1}{5} a^2$$

$$c = 5 \cdot 4 \cdot \frac{2ab}{7}$$

$$e = 7 \cdot 6 \cdot \frac{2ac}{9} + \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{1}{9} b^2$$

$$f = 9 \cdot 8 \cdot \frac{2ae}{11} + \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{2}{11} bc$$

$$g = 11 \cdot 10 \cdot \frac{2af}{13} + \frac{11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{2}{13} be + \frac{11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} \cdot \frac{1}{13} c^2$$

$$h = 13 \cdot 12 \cdot \frac{2ag}{15} + \frac{13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{2}{15} bf + \frac{13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} \cdot \frac{2}{15} ce$$

$$i = 15 \cdot 14 \cdot \frac{2ab}{17} + \frac{15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{2}{17} bg + \frac{15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 2 \cdot 11 \cdot 10}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} \times$$

$$\frac{2}{17} cf + \frac{15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7} \cdot \frac{1}{17} e^2 \text{ ecc.}$$

colla legge che è chiara, facendo solo la riflessione, che ove s' incontra il quadrato di qualche numero, come a^2 , b^2 , c^2 , e^2 ecc., in vece del 2 che moltiplica i rettangoli ab , ac , ae , bc ecc. si mette l'unità.

Di questi simboli a , b , c ecc. troviamo i valori numerici, avvertendo di tener separati negli omogenei delle superiori equazioni i termini l' uno dall' altro ; con che si ottiene

$$a = \frac{1}{3 \cdot 4} ; b = \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} ; c = \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 6 \cdot 7} ; e = \frac{20 + 7}{2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 9} ;$$

$$f = \frac{3 + 2}{2 \cdot 3 \cdot 10 \cdot 11} ; g = \frac{350 + 231 + 110}{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 12 \cdot 13} ; h = \frac{691 + 455 + 429}{2 \cdot 5 \cdot 9 \cdot 14 \cdot 15} ;$$

$$i = \frac{4200 + 2764 + 2600 + 1287}{2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 16 \cdot 17} ;$$

$$l = \frac{75957 + 49980 + 46988 + 46410}{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 18 \cdot 19} ;$$

$$m = \frac{24126850 + 15875013 + 14922600 + 14730738 + 7348250}{2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11 \cdot 20 \cdot 21} \text{ ecc.}$$

Ora cominciando da e osservo, che prescindendo dai denominatori, i primi termini de' ritrovati valori di e, f, g ecc. sono rispettivamente i massimi; che i secondi termini superano in grandezza ciascuno dei susseguenti; e così dicendo gradatamente de' termini terzi, quarti ecc. fino agli ultimi che sono i minimi di tutti. Per veder poi, se anderà sempre così la faccenda, rifletto, che essendo il 1.^o numeratore binomio quello che appartiene a e , e il 2.^o quello che appartiene a f , sta il primo termine del binomio di e al suo secondo in maggior ragione del 1.^o termine del binomio di f al suo 2.^o, cioè $20:7 > 3:2$. Ma se seguitasse a verificarsi questa maggior ragione tra i due primi termini di f che tra i due primi di g , e così fosse maggiore la ragione tra i due primi di g , che tra i due primi di b ecc., potrebbesi temere, che andando innanzi nella serie de' numeri bernoulliani arrivasse in alcun d'essi il 2.^o termine a superare non che ad uguagliare il 1.^o; e in tal caso non ci sarebbe lecito di asserire, che i suddetti primi termini siano realmente i massimi. Ciò però non accade, perchè realmente presi i due primi termini in ciascuna delle equazioni col cominciare da f , abbiamo $3:2 < 350:231$; $350:231 < 691:455$; $691:455 < 4200:2764$; $4200:2764 < 75957:49980$; $75957:49980 < 24126850:15875013$ ecc.; e siam quindi sicuri, che il 1.^o termine di qualunque numero bernoulliano è sempre maggiore del 2.^o

Il primo numero, che ha il numeratore di 3 termini, è g . Confronto la ragione che passa tra il 2.^o e il 3.^o termine in g con quella che hanno i 2 termini omologhi nel susseguente b , e veggio che sta $231:110 > 455:429$. La continuazione di questa maggior ragione ne' termini 2.^o e 3.^o dei numeri antecedenti riferita a quella che osservan tra loro gli omologhi dei numeri immediatamente susseguenti potrebbe farci risorgere nuovamente il sospetto del superiore §. sull'ingrandimento del 3.^o termine sopra il 2.^o e fors' anche sopra il 1.^o coll'andare avanti nella serie. Ma svanisce subito questo sospetto, perchè minore si fa a un tratto la

ragione de' suddetti 2 termini in b che de' corrispondenti termini in i , e seguita poi sempre così negli omologhi susseguenti, essendo $455:429 < 2764:2600$; $2764:2600 < 49980:46988$; $49980:46988 < 15875013:14922600$ ecc. Concluderemo pertanto essere per tutta la serie in qualunque num.^o bernoulliano il 2.^o sempre maggiore del 3.^o, e perciò il 1.^o del 2.^o, e del 3.^o invariabilmente maggiore.

All' istesso modo, poichè i è il primo numero che ha 4 termini nel numeratore, prendendo i 3.ⁱ e i 4.ⁱ nel confronto con l farà $2600:1287 > 46988:46410$, ma poi proseguendo a m ; $46988:46410 < 1492260:14730738$; e questa minor ragione ne' termini 3.^o e 4.^o de' numeri che seguono continuerà sempre nel confronto colla ragione degli omologhi ne' numeri posteriori. Onde il 3.^o termine de' numeratori e conseguentemente il 1.^o resta perpetuamente maggiore del 4.^o; e così diremo del 5.^o, 6.^o ecc.; e verrà con ciò stabilito esso il massimo tra i termini che costituiscono i rispettivi numeratori fino al numero bernoulliano infinito.

Ciò posto, è cosa evidentissima, che principiando da b se ne' secondi membri prendo tanto numero di primi termini quanto è il numero di tutti termini ne' medesimi, e metto 2 in vece dell' unità per coefficiente de' quadrati a^2 , b^2 , c^2 ecc., vengo a formare una quantità maggiore del valore de' corrispondenti numeri bernoulliani. Noto coll' apice que-

sti numeri, in tal foggia accresciuti, ed ho $b' = 3.2. \frac{2a^2}{5}$;

$$c' = 5.4. \frac{2}{7} ab'; e' = 2.7.6. \frac{2}{9} ac'; f' = 2.9.8. \frac{2}{11} ae'; g'$$

$$= 3.11.10. \frac{2}{13} af'; h' = 3.13.12. \frac{2}{15} ag';$$

$$i' = 4.15.14. \frac{2}{17} ah' \text{ ecc. , dove è certamente } b' > b; c' > c;$$

$e' > e$ ecc. Pongo ora nel valore di c' il precedente valore di b' , e così in e' il valore trovato di c' ; il che s' intenda detto per tutti quelli che vengon poi; e nasce

$$b' = 3 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \frac{2^3 a^2}{5}$$

$$c' = 3 \cdot 1 \cdot 1^2 \cdot 2 \cdot \frac{2^4 a^3}{7}$$

$$c' = 3 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 1^2 \cdot 2 \cdot \frac{2^6 a^4}{9}$$

$$f' = 3 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 1^2 \cdot 2^2 \cdot \frac{2^8 a^5}{11}$$

$$g' = 3 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 1^2 \cdot 2^2 \cdot 3 \cdot \frac{2^{10} a^6}{13}$$

$$h' = 3 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 1^2 \cdot 2^2 \cdot 3^2 \cdot \frac{2^{12} a^7}{15}$$

$$i' = 3 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 1^2 \cdot 2^2 \cdot 3^2 \cdot 4 \cdot \frac{2^{14} a^8}{17} \text{ ecc.}$$

Onde chiamato m il posto pari del num. generale u' , cui corrisponde il numero bernoulliano u minore di u' , farà

$$u' = 3 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots m \cdot 1^2 \cdot 2^2 \cdot 3^2 \dots \frac{m^2}{4} \cdot \frac{2^{2m} a^{m+1}}{2m+3}, \text{ ovvero,}$$

$$\text{perchè } a^{m+1} = \frac{1}{3^{m+1} \cdot 2^{2m+2^3}}; u' = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots m \cdot 1^2 \cdot 2^2 \cdot 3^2 \dots \frac{m^2}{4}}{4 \cdot (2m+3) 3^m}.$$

Presentemente noi dobbiamo rimetterci sotto all' occhio la serie Euleriana $\frac{a}{n} - \frac{b}{3n^3} + \frac{c}{5n^5} - \frac{e}{7n^7} + \frac{f}{9n^9}$, che, ove si fissi il suo principio nel 2.º termine col prescindere dal segno, ha il suo termine generale $\frac{u}{(2m+1)n^{2m+1}}$. Pongo il numeratore accresciuto u' in vece di u , e adoperando il suo

$$\text{valore mi forge } \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots 1^2 \cdot 2^2 \cdot 3^2 \dots \frac{m^2}{4}}{4 \cdot 3^m (2m+1) (2m+3) n^{2m+1}}; \text{ la qual fra-}$$

zione voglio veder cosa diventa nella ipotesi di m , n infiniti ed eguali. Giacchè possiamo lavorare sul largo, supponendo eziandio che $1 \cdot 2 \cdot 3 \dots m$ fosse $m \cdot m \cdot m$ ecc. fino a fattori di num.º m non si avrebbe altro che m^m ; e così in vece di

$1.2.3 \dots \frac{m}{2}$ ponendo $\frac{m}{2} \cdot \frac{m}{2} \cdot \frac{m}{2} \dots$ fino a fattori di num.^o

$\frac{m}{2}$, per l'altro fattore del numeratore avremmo

$\left(\frac{m}{2}\right) \frac{2^m}{2} = \frac{m^m}{2^m}$. Dunque con tale sostituzione diventerebbe

il numeratore della formola $m^m \cdot \frac{m^m}{2^m} = \frac{m^{2m}}{2^m}$, e tutta la fra-

zione $\frac{m^{2m}}{2^{m+2} \cdot 3^m (2m+1) (2m+3) m^{2m+1}}$

$= \frac{1}{2^{m+2} \cdot 3^m (2m+1) (2m+3) m}$, cioè nulla. Quindi si dedu-

ce che con maggior ragione si dovrà dir che svanisca la for-

mola $\frac{1.2.3 \dots m \cdot 1^2 \cdot 2^2 \cdot 3^2 \dots \frac{m^2}{4}}{4 \cdot 3^m (2m+1) (2m+3) n^{2m+1}}$ cioè $\frac{u'}{(2m+1) n^{2m+1}}$. Ma è

$u' > u$, massimo numero bernoulliano. Dunque è egualmen-

te nulla la frazione $\frac{u}{(2m+1) n^{2m+1}}$, cioè l'ultimo termine

all'infinito della serie Euleriana. In conseguenza riesce di

nessun valore tutta la stessa serie, perchè i denominatori in-

finiti de' termini $\frac{a}{n} - \frac{b}{3n^3} + \frac{c}{5n^5}$ ecc. non rimangono del-

lo stesso ordine d'infiniti, come nella serie armonica

$\frac{1}{n}, \frac{1}{n+1}, \frac{1}{n+2} \dots \frac{1}{2n}$, la cui somma è un finito, ma

crescon sempre di grado.

In una eccellente Memoria del celebre nostro Presidente

Sig. Cavalier *Lorgna* inserita nel Tomo III. della R. Ac. di

Torino, e capitatami pur ora alle mani per dono gentilif-

fimo dello stesso Autore, trovo una curiosa derivazione dei

numeri bernoulliani dai termini dell'infinitinomio

$$\left(1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{2 \cdot 3} + \frac{x^3}{2 \cdot 3 \cdot 4} \text{ ecc.} \right)^{-1}, \text{ ove dopo aver trovato}$$

qualſivoglia termine, ſi ponga $x=1$. Io non dubito che, coll' ajuto della nuova eſpreſſione di queſti numeri, ſi poſſa anche dimoſtrare più direttamente il teorema dell' *Eulero*.

A R T I C O L O II.

Eſame di una famoſa regola per trovare il valor proſſimo delle radici di qualunque equazione.

1. **U**Na celebre regola ſulle tracce di un illuſtre Geometra preſenta il Ch. Sig. Ab. *Gianella* nella I. Parte dell' *Ac. R.* di Torino a car. 467, per conoſcere il valor proſſimo delle radici reali di qualunque equazione determinata, e per aſſegnare il numero delle radici immaginarie che in eſſa hanno. A queſta regola egli ſi fa ſtrada nella ſua Memoria con una ſerie di ingegnoliſſimi teoremi, che paſſo paſſo il guidano al teorema finale, il quale può eſſere così enunziato. Sia $(A) \dots x = k(z + \phi x^m + \phi' x^n + \phi'' x^p \text{ ecc.})^r$, ove $k, \phi, \phi', \phi'', \text{ ecc.}$ ſono quantità indipendenti da x e da z ; $r, m, n, p \text{ ecc.}$ ſono poſteſtà in qualſivoglia modo intere o rotte, poſitive o negative. Se ſi fa

$(B) \dots Z = \phi k^m z^{mr} + \phi' k^n z^{nr} + \phi'' k^p z^{pr} \text{ ecc.}$, farà vera queſta equazione $x = k(z + Z + \frac{d(Z^2)}{1.2} + \frac{d^2(Z^3)}{1.2.3} + \frac{d^3(Z^4)}{1.2.3.4} \text{ ecc.})^r$, ovvero queſt' altra, che ſi dimoſtra equivalente;

$$(C) \dots x = k\left(z' + Z d(z') + \frac{d(Z^2 d(z'))}{1.2} + \frac{d^2(Z^3 d(z'))}{1.2.3} + \frac{d^3(Z^4 d(z'))}{1.2.3.4} \text{ ecc.}\right), \text{ intendendo per comodo che}$$

$d(Z^2), d^2(Z^3) \text{ ec.}$, e così $d(z'), d(Z^2 d(z'))$, $d^2(Z^3 d(z'))$, ecc. ſiano i differenziali 1.°, 2.° ecc. delle funzioni di $z, z', Z^2 d(z'), Z^3 d(z') \text{ ecc.}$, nelle quali varia la ſola z , diviſi dalle riſpettive differenze $dz, dz^2 \text{ ecc.}$ (*)

2. Ciò poſto, abbiati un'equazione di grado m così eſpreſſa; $a + bx + cx^2 + dx^3 \dots + x^m = 0$, e ſe accade che manchi

(*) Se ne veggia la dimoſtrazione al luogo citato.

qualche termine, si renda essa completa colla trasformazione in un' altra che abbia tutti i suoi termini. Si lasci poi successivamente ciascun termine che contiene x nel 1.º membro, e si trasportino gli altri nel 2.º, riducendo sempre colla divisione il 1.º membro alla sola x lineare. E' chiaro, che essendo l' equazione del grado m , il numero de' termini affetti dalle potestà di x , farà pure m , e conseguentemente avremo numero m di equazioni, come qui si espongono;

$$1^a \dots x = -\frac{1}{b} (a + cx^2 + dx^3 \dots + x^m)$$

$$2^a \dots x = -\frac{1}{c} (b + ax^{-1} + dx^2 \dots + x^{m-1})$$

$$3^a \dots x = -\frac{1}{d} (c + ax^{-2} + bx^{-1} \dots + x^{m-2})$$

3. Confrontata ora la 1.^a equazione colla ecumenica (A),

si vede, che per l' identicità debb' essere $r=1$, $k=-\frac{1}{b}$,

$z=a$, $\phi=c$, $m=2$, $\phi'=d$, $n=3$, ecc. Onde colla sostituzione di questi valori in (B), si ottiene

$$Z = \frac{ca^2}{b^2} - \frac{da^3}{b^3} + \frac{ea^4}{b^4} - \text{ecc.}; \text{ e quindi corrispondendo qui}$$

il simbolo a al simbolo z delle equazioni (A), (B), ed essendo $d(z^r)=1$ perchè $r=1$, se col suppor variabile la sola a si faranno le differenziazioni delle potestà di Z prescritte dalla equazione (C), si avrà dato il valore di x , cioè di una delle radici dell' equazione. Allo stesso modo operan-

do per la equazione $2^a \dots x = -\frac{1}{c} (b + ax^{-1} + dx^2 \dots$

$+ x^{m-1})$, si troverà $Z = -acb^{-1} + \frac{db^2}{c^2} - \frac{eb^3}{c^3} \text{ ecc.}$, e fat-

to b solo variabile nella serie dei differenziali di Z colla legge della equazione (C), risulterà nota la 2.^a radice. Così si potrà conoscere il valore della 3.^a, 4.^a ecc. radice,

avendosi pei valori di x tante serie quant' è il numero m , o quanto è il numero delle radici della proposta equazione.

4. Poichè relativamente alla equazione 1.^a abbiamo $z=a$;

$$Z = \frac{ca^2}{b^2} - \frac{da^3}{b^3} \text{ ecc.}; \text{ e } x = -\frac{1}{b} \left(a + Z + \frac{d(Z^2)}{1.2} \right.$$

$$\left. + \frac{d^2(Z^3)}{1.2.3} \text{ ecc.} \right), \text{ fatta } a=0, \text{ si annulla } Z \text{ e ciascuno de'}$$

differenziali che le appartengono, onde anche $x=0$. Così rispetto all'equazione 2.^a si farà zero il valore di x , quando si pone $b=0$; per l'equazione 3.^a x farà nullo, quando c è nullo, ecc. Dunque, aggiunge il Sig. *Gianella*, questi valori di x dati per le corrispondenti serie sono assolutamente diversi; e perciò ciascuna serie rappresentando una delle radici dell'equazione di grado m , tutte le m serie rappresenteranno tutte le radici. Ora nelle equazioni, oltre le radici reali, potendo bene spesso aver luogo anche le radici immaginarie, tra le suddette serie ve ne faranno ancora delle rappresentative di queste. Le serie convergenti che s' incontreranno, non potranno mai essere di questo numero, perchè, non mescolandosi ne' loro termini alcun coefficiente immaginario, giacchè suppongonsi sempre reali le quantità a, b, c ecc., e dando esse fuor di dubbio coll' aggregato di parecchi di essi un valor prossimo reale, debbono necessariamente appartenere alle radici reali. Quindi per la ragion de' contrarj, conclude il Sig. Abate, le serie divergenti, che compariranno, spettano alle radici immaginarie; e si potrà stabilire la regola, che tante saranno le radici reali della equazione proposta, quante serie convergenti risultano colle operazioni dell'esposto metodo, e tante le immaginarie, quante sono le divergenti.

5. Questo seducente discorso pecca a parer mio in quella parte, ove si stabilisce, che per necessità le serie divergenti debbano rappresentare le radici immaginarie delle equazioni, e non siano atte ad occultare sotto l'aspetto della lor divergenza delle radici reali. Imperciocchè, o la proposizione si asserisce generalmente per tutti i valori di quantità espressi da serie, o si restringe ai valori rappresentati dalle serie

serie trovate col presente metodo. Accettando la proposizione nel senso di generalità, non sarebbe possibile svolgere un valor di quanto reale in una serie divergente, e, per esempio,

$$1 + \frac{2}{1} - \frac{1.2^2}{1.2} + \frac{1.3.2^3}{1.2.3}$$

— $\frac{1.3.5.2^4}{1.2.3.4}$ ecc. dovrebbe equivalere ad una quantità immaginaria. Pure ognuno può accorgersi di per se, che questa

serie trae origine dalla formola reale $(1 + \frac{1}{4})^{\frac{1}{2}}$ maneggiata col canone Newtoniano. La qual cosa sola, che può però unirsi ad altri frequentissimi esempj di serie divergenti esprimenti quantità reali, e incontrate tutto dì dagli Analisti, fa conoscere chiaramente, che non può verificarsi generalmente la necessità della corrispondenza di sì fatte serie alle quantità immaginarie, potendo esse talvolta equivalere alle reali. Se poi s'intende limitata la proposizione alle divergenti che emanano dall'esposto metodo, ragion voleva, che si dimostrasse, combinarsi nel caso nostro, malgrado la falsità del teorema in genere, tali circostanze che obbligano le stesse serie a non potere significare altro che le radici immaginarie. Or ciò non essendosi fatto, resta che si consideri come vizioso il raziocinio del precedente numero, e almen dubbia la conclusione che da esso deriva.

6. Cerchiamo, se adattando la regola alle equazioni trinomie, possiamo almeno riguardo ad esse liberarci da una tale incertezza; e supponiamo data l'equazione ecumenica di 2.º grado $a + bx + x^2 = 0$, nella quale a, b , siano quan-

tità positive, e le cui radici sono $x = -\frac{b}{2} \pm \sqrt{\frac{b^2}{4} - a}$;

$x = -b - \sqrt{\frac{b^2}{4} - a}$; reali, se $\frac{b^2}{4} > a$; immaginarie, se

$\frac{b^2}{4} < a$. A questa equazione di 2.º grado si dia la forma seguente

$x = -\frac{1}{b}(a + x^2)$, e confrontandola con (A), si

avrà $r=1$; $k=-\frac{1}{b}$, $z=a$, $\phi=1$, $m=2$, ϕ' ,

ϕ'' ecc. $=0$; onde posti questi valori in (B), farà $Z=\frac{a^2}{b^2}$;

e quindi eseguendo le prescritte differenziazioni col far che

$$\text{varj solo } a; \frac{d(Z^2)}{1.2} = \frac{4a^3}{1.2b^4}; \frac{d^2(Z^3)}{1.2.3} = \frac{5.6a^4}{1.2.3b^6}; \frac{d^3(Z^4)}{1.2.3.4}$$

$$= \frac{6.7.8a^5}{1.2.3.4b^8} \text{ ecc. ; e generalmente } \frac{d^n(Z^{n+1})}{1.2.3... (n+1)}$$

$$= \frac{(n+3)(n+4)(n+5) \dots 2n(2n+1)(2n+2)}{1.2.3 \dots (n)(n+1)} \cdot \frac{a^{n+2}}{b^{2n+2}},$$

che dà il termine immediatamente antecedente

$$\frac{d^{n-1}(Z^n)}{1.2.3...n} = \frac{(n+2)(n+3)(n+4) \dots (2n)}{1.2.3...n} \cdot \frac{a^{n+1}}{b^{2n}}.$$

Sostituendo pertanto i valori di Z e de' susseguenti differenziali in (C), si ha

$$x = -\frac{1}{b} \left(a + \frac{a^2}{b^2} + \frac{4a^3}{1.2b^4} + \frac{5.6a^4}{1.2.3b^6} \dots \right. \\ \left. + \frac{(n+2)(n+3) \dots 2n}{1.2.3 \dots n} \cdot \frac{a^{n+1}}{b^{2n}} + \frac{(n+3)(n+4) \dots (2n+2)}{1.2.3 \dots (n+1)} \cdot \frac{a^{n+2}}{b^{2n+2}}; \right)$$

e la serie del 2.^o membro di questa equazione vestirà la natura di convergente o divergente secondo le diverse determinazioni de' simboli a , b .

7. Ma questo carattere di convergenza o divergenza nelle serie non va dedotto dal valore de' termini vicini al primo, per non cadere in errore, succedendo assai spesso, che una serie la quale sui primi termini par convergente, andando avanti diverga, oppure al contrario; e la ragione di queste apparenti anomalie si vede ben che deriva dalla natura della curva espressa dalla equazione che ha l'ordinata variabile nel 1.^o membro, e la serie contenente un' altra quantità variabile nell' omogeneo di comparazione. Imperciocchè i flessi, i regressi, gli andamenti serpentinati, e le altre vicende, che può essa avere in corrispondenza di un accrescimento uniforme dell'ascissa, fanno essere l'ordinata rappresentata dal

valor della serie ora maggiore ora minore fino a che dopo aver subito la curva tutte queste variazioni, che le compongono, le quali restan però sempre ristrette dentro un finito spazio, acquisti in progresso un corso, dirò così, più libero e regolare, in conseguenza del quale o sempre cresca, o cali continuamente senza deviare dalla legge della sua equazione. Egli è dunque mestieri, perchè le serie si possan chiamare di lor natura o convergenti o divergenti, spinger la indagine al di là dei confini di questi cangiamenti delle curve e considerarle in quella regione, nella quale non van più soggette alle mentovate antinomie. Ma perchè si mettono in regola or più presto, or più tardi secondo le ipotesi di grandezza stabilita alle quantità costanti, che entrano ne' termini delle equazioni, ad evitare qualunque pericolo di falsa illazione sulla convergenza o divergenza delle serie, sarà ottimo consiglio il cercarne le proprietà ne' termini infinitamente distanti dal primo.

8. Onde volendo sapere di qual condizione debba esser fornita la nostra serie, affinchè abbia il natural carattere di convergente o divergente, prenderemo i due termini prossimi che sono collocati ne' posti indeterminati $n-1$, n §. 6; e diremo che la serie converge, ove sia

$$\frac{(n+2)(n+3) \dots 2n}{1.2.3 \dots n} \cdot \frac{a^{n+1}}{b^{2n}} > \frac{(n+3)(n+4) \dots 2n(2n+1)(2n+2)}{1.2.3 \dots n(n+1)} \cdot \frac{a^{n+2}}{b^{n+2}};$$

divergendo poi la medesima, quando succede il contrario. Levato pertanto dalle 2 formule il comun fattore

$$\frac{(n+3)(n+4) \dots 2n}{1.2.3 \dots n} \cdot \frac{a^{n+1}}{b^{2n}}, \text{ la condizione della detta conver-}$$

$$\text{genza si riduce a quest' altra; } n+2 > \frac{(2n+1)(2n+2)}{n+1} \cdot \frac{a}{b^2}$$

essendo per la condizione della divergenza

$$n+2 < \frac{(2n+1)(2n+2)}{n+1} \cdot \frac{a}{b^2}; \text{ cioè, fatto } n \text{ infinito, per la}$$

$$\text{convergenza dovrà essere } \frac{b^2}{4} > a; \text{ per la divergenza } \frac{b^2}{4} < a.$$

Ma queste condizioni son le stesse che abbiamo trovato §. 6

colla risoluzione dell' equazione trinomia per determinare la realtà o l'immaginarietà della radice. Dunque la regola del Sig. *Gianella* ci guida bene; ed effettivamente alla radice reale corrisponde la serie convergente, alla immaginaria la divergente.

9. Data alla equazione di 2.^o grado la forma 2.^a del §. 2, cioè $x = -1(b + ax^{-1})$, somministrerà nel confronto con (A) $k = -1$, $r = 1$, $z = b$, $\phi = a$, $m = -1$, annullandofi tutto il resto. Quindi nasce $Z = -ab^{-1}$, e supponendo b

$$\text{fola variabile; } \frac{d(Z^2)}{1.2} = -\frac{2a^2}{1.2b^3}; \quad \frac{d^2(Z^3)}{1.2.3} = -\frac{3.4a^3}{1.2.3b^5};$$

$$\frac{d^3(Z^4)}{1.2.3.4} = -\frac{4.5.6a^4}{1.2.3.4b^7} \text{ ecc. } \frac{d^n(Z^{n+1})}{1.2.3...(n+1)}$$

$$= -\frac{(n+1)(n+2)...2n}{1.2.3...(n+1)} \cdot \frac{a^{n+1}}{b^{2n+1}}; \text{ e perciò il valore della 2.^a radice verrà così espresso;}$$

$$x = -b + \frac{a}{b} + \frac{2a^2}{1.2b^3} + \frac{3.4a^3}{1.2.3b^5} + \frac{4.5.6a^4}{1.2.3.4b^7} \dots$$

$$+ \frac{n(n+1)...(2n-2)}{1.2.3...n} \cdot \frac{a^n}{b^{2n-1}} + \frac{(n+1)(n+2)...2n}{1.2.3...(n+1)} \cdot \frac{a^{n+1}}{b^{2n+1}}.$$

Per la convergenza poi di questa serie si esige che sia

$$\frac{n(n+1)...(2n-2)}{1.2.3...n} \cdot \frac{a^n}{b^{2n-1}} > \frac{(n+1)(n+2)...2n}{1.2.3...(n+1)} \cdot \frac{a^{n+1}}{b^{2n+1}}, \text{ cioè, tol-}$$

$$\text{to il fattor comune } n > \frac{(2n-1)(2n)}{n+1} \cdot \frac{a}{b^2}, \text{ e fatto } n \text{ infiniti-}$$

$$\text{to, } \frac{b^2}{4} > a. \text{ Così per la divergenza dovrà essere } \frac{b^2}{4} < a,$$

come appunto per la prima radice. Dunque alla supposizione della 2.^a radice reale corrisponde eziandio la serie convergente, e la divergente all' altra della 2.^a radice immaginaria: nel che non v'è dissenso tra i risultati del metodo con ciò che altronde è già noto.

10. Abbiamo supposto fin qui le specie a , b dell'equazione trinomia positive. Se b è negativo, ci vengon prodotti gli stessi valori ne' termini delle serie colla sola diversità de' segni mutati, ritornano le stesse condizioni per la lor convergenza e divergenza, quando convergono, sicuramente le radici son reali, quando divergono, immaginarie, e niente declina dal vero. Ci rimane perciò da esaminare l'ipotesi di a negativa, che cangia l'equazione quadratica in quest'altra $-a + bx + x^2 = 0$. In tal caso è chiaro, che, per avere i due valori di x , per mezzo delle serie, basterà nelle già notate ai §§. 6, 9 mutare il segno a tutte le potestà dispari di a , e faran quindi le radici 1.^a e 2.^a

$$x = -\frac{1}{b} \left(-a + \frac{a^2}{b^2} - \frac{4a^3}{1.2b^4} \dots \pm \frac{(n+2)(n+3)\dots 2n}{1.2.3\dots n} \cdot \frac{a^{n+1}}{b^{2n}} \right. \\ \mp \frac{(n+3)(n+4)\dots (2n+2)}{1.2.3\dots (n+1)} \cdot \frac{a^{n+2}}{b^{2n+2}}; \quad x = -b - \frac{a}{b} + \frac{2a^2}{1.2b^3} \\ - \frac{3.4a^3}{1.2.3b^5} \dots \mp \frac{n(n+1)\dots (2n-2)}{1.2.3\dots n} \cdot \frac{a^n}{b^{2n-4}} \\ \left. \pm \frac{(n+1)(n+2)\dots 2n}{1.2.3\dots (n+1)} \cdot \frac{a^{n+1}}{b^{2n+1}} \right).$$

Ora l'alternativa de' segni, che s'incontrano ne' termini di queste 2 serie non influendo niente nella divergenza o convergenza delle medesime, egli è indubitato, che ambedue faranno divergenti, qualora sia

in ciascuna di esse $\frac{b^2}{4} < a$; e coll'ammettere questa ipotesi

il Sig. *Gianella* c' insegna, che riescono immaginarie le due radici dell'equazione. Ma la risoluzione dell'equazione di

2.^o grado ci porta alle 2 radici $x = -b \pm \sqrt{\frac{b^2}{4} + a}$;

$x = -b - \sqrt{\frac{b^2}{4} + a}$, che sono radici reali. Dunque è falso,

che la natura del suo metodo tolga alle serie divergen-

ti che indi risultano la proprietà di esprimere le radici reali, e le obblighi a rappresentar solo le immaginarie. Il perchè ci tradisce la regola da lui stabilita, che non può assegnarsi come regola generale nemmeno nelle equazioni di 2.^o grado.

11. Appliciamola presentemente alle equazioni cubiche, e siccome vuolsi dal metodo, che le equazioni sian fornite di tutti i lor termini, ci proporremo l'equazione generale di 3.^o grado; $a - bx + cx^2 + x^3 = 0$, col solo coefficiente b negativo; cioè dandole la forma 1.^a del §. 2;

$x = \frac{1}{b} (a + cx^2 + x^3)$. Istituiscasi il confronto di questa

con (A), ed avremo $r = 1$, $k = \frac{1}{b}$, $z = a$, $\phi = c$, $m = 2$, $\phi' = 1$, $n = 3$, facendosi nulli gli altri termini. Sicchè introdotti questi valori in (B) diverrà $Z = \frac{a^3 + bca^2}{b^3}$

$= \frac{a^3}{b^3} \left(1 + \frac{bc}{a} \right)$, dove a dee far figura di variabile nelle differenziazioni delle potestà di Z . Dal ritrovato valore di Z emanano le seguenti ugualtà;

$$Z^2 = \frac{(a^3 + bca^2)^2}{b^6}; \quad Z^3 = \frac{(a^3 + bca^2)^3}{b^9}; \quad Z^4 = \frac{(a^3 + bca^2)^4}{b^{12}};$$

$Z^5 = \frac{(a^3 + bca^2)^5}{b^{15}}$ ecc. Onde passando alla 1.^a differenziazione

di Z^2 , alla 2.^a di Z^3 , alla 3.^a di Z^4 , ecc. poichè $d(z^r) = 1$,

$$\text{avremo; } \frac{d(Z^2)}{1.2} = \frac{(6a^2 + 4bca^2)}{1.2b^6} \left(1 + \frac{bc}{a} \right); \quad \frac{d^2(Z^3)}{1.2.3}$$

$$= \frac{(72a^2 + 96bca^2 + 30b^2c^2a^2)}{1.2.3b^9} \left(1 + \frac{bc}{a} \right); \quad \frac{d^3(Z^4)}{1.2.3.4}$$

$$= \frac{(1320a^3 + 2640bca^3 + 1680b^2c^2a^3 + 336b^3c^3a^3)}{1.2.3.4b^{12}} \left(1 + \frac{a}{bc} \right) \text{ ecc.}$$

12. Questi valori si possono presentare sotto una forma più

$$\text{chiara così, } \frac{d(Z^1)}{1.2} = \frac{6a^5}{1.2b^6} \left(1 + \frac{bc}{a}\right) \left(1 + \frac{1}{1} \cdot \frac{4}{6} \cdot \frac{bc}{a}\right);$$

$$\frac{d^2(Z^1)}{1.2.3} = \frac{9.8a^7}{1.2.3b^9} \left(1 + \frac{bc}{a}\right) \left(1 + \frac{2}{1} \cdot \frac{6}{9} \cdot \frac{bc}{a} + \frac{2.1}{1.2} \cdot \frac{6.5}{9.8} \cdot \frac{b^2c^2}{a^2}\right);$$

$$\frac{d^3(Z^4)}{1.2.3.4} = \frac{12.11.10}{1.2.3.4} \cdot \frac{a^9}{b^{12}} \left(1 + \frac{bc}{a}\right) \left(1 + \frac{3}{1} \cdot \frac{8}{12} \cdot \frac{bc}{a}\right.$$

$$\left. + \frac{3.2}{1.2} \cdot \frac{8.7}{12.11} \cdot \frac{b^2c^2}{a^2} + \frac{3.2.1}{1.2.3} \cdot \frac{8.7.6}{12.11.10} \cdot \frac{b^3c^3}{a^3}\right); \quad \frac{d^4(Z^1)}{1.2.3.4.5}$$

$$= \frac{15.14.13.12}{1.2.3.4.5} \cdot \frac{a^{11}}{b^{15}} \left(1 + \frac{bc}{a}\right) \left(1 + \frac{4}{1} \cdot \frac{10}{15} \cdot \frac{bc}{a}\right.$$

$$\left. + \frac{4.3}{1.2} \cdot \frac{10.9}{15.14} \cdot \frac{b^2c^2}{a^2} + \frac{4.3.2}{1.2.3} \cdot \frac{10.9.8}{15.14.13} \cdot \frac{b^3c^3}{a^3}\right.$$

$$\left. + \frac{4.3.2.1}{1.2.3.4} \cdot \frac{10.9.8.7}{15.14.13.12} \cdot \frac{b^4c^4}{a^4}\right); \text{ ecc. Onde faranno general-}$$

mente i due termini prossimi di posto $n-1, n$;

$$\frac{d^{n-1}(Z^n)}{1.2.3...n} = \frac{3n(3n-1)(3n-2)...(2n+2)}{1.2.3...n} \cdot \frac{a^{2n+1}}{b^{3n}} \left(1 + \frac{bc}{a}\right)$$

$$\left\{ 1 + \frac{(n-1)}{1} \cdot \frac{2n}{3n} \cdot \frac{bc}{a} + \frac{(n-1)(n-2)}{1.2} \cdot \frac{(2n)(2n-1)}{3n(3n-1)} \cdot \frac{b^2c^2}{a^2} \right.$$

$$\left. + \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3} \cdot \frac{(2n)(2n-1)(2n-2)}{3n(3n-1)(3n-2)} \cdot \frac{b^3c^3}{a^3} \dots \right.$$

$$\left. + \frac{2n(2n-1)(2n-2)...(n+2)}{3n(3n-1)(3n-2)...(2n+2)} \cdot \frac{b^{n-1}c^{n-1}}{a^{n-1}} \right\}, \text{ che chiamo } P.$$

$$\frac{d^n(Z^{n+1})}{1.2.3... (n+1)} = \frac{(3n+3)(3n+2)...(2n+4)}{1.2.3... (n+1)} \cdot \frac{a^{2n+3}}{b^{3n+3}} \left(1 + \frac{bc}{a}\right)$$

$$\left\{ 1 + \frac{n}{1} \cdot \frac{(2n+2)}{3n+3} \cdot \frac{bc}{a} + \frac{n(n-1)}{1.2} \cdot \frac{(2n+2)(2n+1)}{(3n+3)(3n+2)} \cdot \frac{b^2c^2}{a^2} \right.$$

$$+ \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} \cdot \frac{(2n+2)(2n+1)(2n)}{(3n+3)(3n+2)(3n+1)} \cdot \frac{b^3 c^3}{a^3} + \dots$$

$$+ \left. \frac{(2n+2)(2n+1) \dots (n+3)}{(3n+3)(3n+2) \dots (2n+4)} \cdot \frac{b^n c^n}{a^n} \right\} \text{ che chiamo } \mathcal{Q}.$$

E sostituendo tutti questi valori in (C), ho

$$(D) \dots x = \frac{1}{b} \left(a + \frac{a^3}{b^3} \left(1 + \frac{bc}{a} \right) + \frac{6a^5}{1.2b^6} \left(1 + \frac{bc}{a} \right) \right.$$

$$\left. \left(1 + \frac{4bc}{6a} \dots + P + \mathcal{Q} \right) \right.$$

13. Per conoscere la convergenza o la divergenza di quest' ultima serie, bisognerebbe sapere, se in caso di n infinito sia $P > \mathcal{Q}$, o al contrario; e a questo fine, prescindendo dai primi fattori che moltiplican le serie ne' valori di P , $\mathcal{Q}$ converrebbe anticipatamente poter sommare le serie, che vengono da quelli moltiplicate, cioè una di esse, per esempio l'ultima, giacchè essendo cognita la somma di questa, resta pur nota quella del termine precedente. Ma la serie che è in $\mathcal{Q}$ è una di quelle, la cui somma generale non cade sotto nessuno de' metodi conosciuti. Ciò nonostante ci verrà fatto di trar dalla forma loro qualche conclusione utile al nostro intento, e prima di tutto, chiamata K la somma della serie che spetta a $\mathcal{Q}$, e K' quella del termine precedente

$$P, \text{ onde risulti } P = \frac{3n(3n-1) \dots (2n+2)}{1.2 \dots n} \cdot \frac{a^{2n+1}}{b^{3n}}$$

$$\left(1 + \frac{bc}{a} \right) K'; \quad \mathcal{Q} = \frac{(3n+3)(3n+2) \dots (2n+4)}{1.2 \dots (n+1)} \cdot \frac{a^{2n+3}}{b^{3n+3}}$$

$\left(1 + \frac{bc}{a} \right) K$, diremo, che la serie in (D) farà convergente, qualora sia nell' ipotesi di n infinito

$$\frac{3n(3n-1) \dots (2n+4)(2n+3)(2n+2)}{1.2.3 \dots n} \cdot \frac{a^{2n+1}}{b^{3n}} \left(1 + \frac{bc}{a} \right)$$

$$K' > \frac{(3n+3)(3n+2)(3n+1) \dots (2n+4)}{1.2.3 \dots n(n+1)} \cdot \frac{a^{2n+3}}{b^{3n+3}} \left(1 + \frac{bc}{a} \right) K,$$

essendo

essendo nel caso contrario divergente. Divido le due formole per i comuni fattori, e riduco la condizione della convergenza alla seguente; $(2n+3)(2n+2)K' >$

$$\frac{(3n+3)(3n+2)(3n+1)a^2}{n+1} K, \text{ ovvero, perchè } n \text{ è infinito, a}$$

$$\text{quest' altra } 4b^3 > \frac{27a^2K}{K'}; \text{ e così la condizione della diver-}$$

$$\text{genza a } 4b^3 < \frac{27a^2K}{K'}.$$

14. Faccio poi l' attual divisione fino al 3.^o termine della serie K per l' altra K' notando i veri coefficienti numerici, dai quali restano affetti questi tre primi termini, ed indicando i coefficienti de' termini rimanenti fino all' infinito coi simboli H, H', H'' ecc., e mi nasce

$$\frac{K}{K'} = 1 + \frac{n(2n+2)}{1} \cdot \frac{bc}{3n+3} \cdot \frac{1}{a} + \frac{n(n-1)}{1.2} \cdot \frac{(2n+2)(2n+1)}{(3n+3)(3n+2)} \cdot \frac{b^2c^2}{a^2} \dots$$

$$+ \frac{(2n+2)(2n+1) \dots (n+3)}{(3n+3)(3n+2) \dots (2n+4)} \cdot \frac{b^nc^n}{a^n}$$

$$+ \frac{(n-1)}{1} \cdot \frac{(2n)}{3n} \cdot \frac{bc}{a} + \frac{(n-1)(n-2)}{1.2} \cdot \frac{(2n)(2n-1)}{3n(3n-1)} \cdot \frac{b^2c^2}{a^2} \dots$$

$$+ \frac{(2n)(2n-1) \dots (n+2)}{(3n)(3n-1) \dots (2n+2)} \cdot \frac{b^{n-1}c^{n-1}}{a^{n-2}}$$

$$= 1 + \frac{2bc}{3a} - \frac{(3n+4)(n-1)}{3^2(3n+2)(3n-1)} \cdot \frac{b^2c^2}{a^2} + \frac{Hb^3c^3}{a^3} + \frac{H'b^4c^4}{a^4}$$

$$+ \frac{H''b^5c^5}{a^5} \text{ ecc.}$$

$$= 1 + \frac{2bc}{3a} - \frac{b^2c^2}{27a^2} + \frac{Hb^3c^3}{a^3} + \frac{H'b^4c^4}{a^4} + \frac{H''b^5c^5}{a^5} \text{ ecc.,}$$

perchè n è infinito. Facendo pertanto uso dell' ultimo no-

tato valore di $\frac{K}{K'}$ nella espressione della condizione, che

costituisce nella serie in (D) il carattere di convergenza, dovrà essere $4b^3 > 27a^2 + 18abc - b^2c^2 + 27a^2$

$(\frac{Hb^3c^3}{a^3} + \frac{H'b^4c^4}{a^4} \text{ ecc.})$; della quale quantità se $4b^3$ è mi-

nore, la serie in (D) si fa divergente. Gioverà poi il riflettere, che nel 2.^o membro di confronto la somma de' termini dopo il 3.^o, cioè

$27a^2 \left(\frac{Hb^3c^3}{a^3} + \frac{Hb^4c^4}{a^4} \text{ ecc.} \right)$ qualunque ella siasi, deve necessariamente contenere il simbolo b .

15. Riprendasi presentemente in mano l'equazione cubica; $a - bx + cx^2 + x^3 = 0$; e colla sostituzione $x = u - \frac{c}{3}$,

si trasformi essa nella seguente; $u^3 - \frac{(c^2 + 3b)u}{3}$

$+ \frac{27a + 2c^3 + 9bc}{27} = 0$ mancante del 2.^o termine. Affinchè

la trasformata, e in conseguenza la proposta abbia 3 radici reali, fanno tutti i Geometri, che debb'essere

$$\frac{(27a + 2c^3 + 9bc)^2}{4} < (c^2 + 3b)^3; \text{ cioè dopo le riduzioni;}$$

$4b^3 > 27a^2 + 18abc - b^2c^2 + 4ac^3$. Dunque, dico io, ove sia giusta la regola del Sig. *Gianella*, questa condizione farà identica con quella che risulta dai suoi canoni, ed è

$$4b^3 > 27a^2 + 18abc - b^2c^2 + 27a^2 \left(\frac{Hb^3c^3}{a^3} + \frac{Hb^4c^4}{a^4} \text{ ecc.} \right).$$

Onde $4ac^3$ esprimerà la somma della serie $27a^2 \left(\frac{Hb^3c^3}{a^3} \right.$

$\left. + \frac{Hb^4c^4}{a^4} \text{ ecc.} \right)$. Ma questo è impossibile, generalmente par-

lando, perchè $4ac^3$ non contiene la specie b , e la suddetta serie è una funzion necessaria de' simboli a, b, c . Egli potrebbe perciò avvenire, che una equazione cubica soddisfacesse alla formula di condizione, che dà la regola del Sig. Abate, e non all'altra, che danno i metodi conosciuti, che con questi si dovesse decidere la presenza nella equazione delle 3 radici reali, e con quella si dovesse concludere avervi nella medesima 2 radici immaginarie. Il che fa vedere, quanto a torto si stabilisca il criterio della divergenza della serie per inferirne da essa la necessaria immaginarietà della radice.

16. A confermar maggiormente la verità della mia proposizione, valgami l'equazione $x^3 - \frac{4x^2}{3} - \frac{2x}{3} + \frac{4}{9} = 0$, la

quale ha 3 radici reali; $x = -\frac{2}{3}$; $x = 1 + \sqrt{\frac{1}{3}}$

$x = 1 - \sqrt{\frac{1}{3}}$. Il confronto di questa coll'ecumenica $a - bx + cx^2 + x^3 = 0$ ci fa nascere queste determinazioni;

$$a = \frac{4}{9}, b = \frac{2}{3}, c = -\frac{4}{3}, bc = -2; 1 + \frac{bc}{a} = -1;$$

$$\frac{a^3}{b^3} = \frac{2^3}{3^3}, \frac{a^5}{b^5} = \frac{2^4}{3^4}, \frac{a^7}{b^7} = \frac{2^5}{3^5} \text{ ecc., coi quali valori posti}$$

$$\text{in (D) si ottiene } x = \frac{3}{2} \left(\frac{2^2}{3^2} - \frac{2^3}{3^3} + \frac{2^4}{3^4} + 0 - \frac{2^6}{3^5} \right. \\ \left. + \frac{7 \cdot 2^7}{3^7} \text{ ecc.} \right). \text{ Ora essendo in questo 2.º membro conver-}$$

genti i soli primi 4 termini, e divergenti gli altri che seguitano fino all' infinito, la serie è di sua natura divergente, e nondimeno sarebbe falsa la illazione, che l' equazione comprenda 2 radici immaginarie, perchè si è già veduto, essere tutte e tre le sue radici reali. Si consideri oltracciò, che, per ragione della divergenza della serie, dovrà essere ne' termini all' infinito $4b^3 < 27a^2 + 18abc - b^2c^2$

$$+ 27a^2 \left(\frac{Hb^3c^3}{a^3} + \frac{Hb^4c^4}{a^4} \text{ ecc.} \right), \text{ nel tempo stesso che ab-}$$

biamo $4b^3 > 27a^2 + 18abc - b^2c^2 + 4ac^3$, come porta la realtà delle 3 radici, e come si troverà in fatti, se in vece di a, b, c si sostituiscono i lor valori. Il perchè sarà proposizione di palpabile verità l'asserire che $27a^2 \left(\frac{Hb^3c^3}{a^3} \text{ ecc.} \right)$

è quantità diversa da $4ac^3$, e che la condizione di realtà nelle radici può star benissimo in compagnia delle serie divergenti, che s'incontrano col mentovato metodo.

17. Nella ipotesi però delle 3 radici reali di un' equazione cubica si può salvare, quando si voglia, la corrispondenza tra il convergere delle serie, e la realtà delle radici sempre che in vece di render completa l'equazione, ove le man-

chi qualche termine, siccome prescrive il Sig. Abate, si trasformi al contrario l'equazione cubica che sia completa in un'altra che del 2.º, o del 3.º termine restasse privata. Supponendola mancante del 2.º termine, l'equazione generale $a - bx + cx^2 + x^3 = 0$ diventa $a - bx + x^3 = 0$ che fa esser $c = 0$; e tale ipotesi porta all'uguaglià $\frac{K}{K'} = 1$. Ma ab-

biam veduto, che essendo $4b^3 > \frac{27a^3K}{K'}$, la nostra serie è convergente. Dunque pel caso della equazione mancante del 2.º termine, convergerà la serie del valor della 1.ª radice ove si verifichi la condizione di $4b^3 > 27a^2$; che è la condizione notissima della realtà di questa 1.ª radice.

18. Ma, non sol questa prima, anche le altre due radici reali verranno espresse da serie convergenti, col dare alla cubica la forma $x^3 = b - ax^{-1}$, da cui estraendo la radice quadrata, si ha $x = \pm 1 (b - ax^{-1})^{\frac{1}{2}}$. Di queste due radici prendo la positiva $x = 1 (b - ax^{-1})^{\frac{1}{2}}$, e confrontandola colla canonica (A), risulta $k = 1$, $r = \frac{1}{2}$, $z = b$, $\phi = -a$, $m = -1$, essendo tutto il resto zero. Quindi $Z = -ab^{-\frac{1}{2}}$, e facendo variar solo b nelle consuete differenziazioni, a-

$$\begin{aligned} \text{vremo } d(z') &= \frac{1}{2} b^{-\frac{1}{2}}, \quad Zd(z') = -\frac{a}{2b^{\frac{3}{2}}}; \quad \frac{d(Z^2 d(z'))}{1.2} \\ &= -\frac{3}{1.2} \cdot \frac{a^2}{2^2 b^{\frac{5}{2}}}; \quad \frac{d^2(Z^3 d(z'))}{1.2.3} = -\frac{6.4}{1.2.3} \cdot \frac{a^3}{2^3 b^{\frac{7}{2}}}; \\ \frac{d^3(Z^4 d(z'))}{1.2.3.4} &= -\frac{9.7.5}{1.2.3.4} \cdot \frac{a^4}{2^4 b^{\frac{9}{2}}} \text{ ecc., onde } \frac{d^n(Z^{n+1} d(z'))}{1.2.3... (n+1)} \\ &= \frac{3n(3n-2)(3n-4)...(n+2)}{1.2... (n+1)} \cdot \frac{a^{n+1}}{2^{n+1} b^{\frac{3n+1}{2}}}. \end{aligned}$$

Quest'ultima formola, che è il termine generale della serie dei differenziali, equivale alla seguente;

$$n^n \left(\frac{3n}{2} \right) \left(\frac{3n}{2} - 1 \right) \left(\frac{3n}{2} - 2 \right) \dots \left(\frac{n}{2} + 1 \right) \cdot \frac{a^{n+1}}{2^{n+1} b^{\frac{3n+1}{2}}}; \text{ e perciò}$$

$$\frac{1.2 \dots (n+1)}{2^{n+1} b^{\frac{3n+1}{2}}}$$

adoperando i ritrovati valori nella equazione (C), si avrà

$$x = b^{\frac{1}{2}} - \frac{a}{2b^{\frac{3}{2}}} - \frac{3}{1.2} \cdot \frac{a^2}{2^2 b^{\frac{5}{2}}} - \frac{6.4}{1.2.3} \cdot \frac{a^3}{2^3 b^{\frac{7}{2}}} - \frac{9.7.5}{1.2.3.4} \cdot \frac{a^4}{2^4 b^{\frac{9}{2}}}$$

$$\dots - \left(\frac{3n}{2} \right) \left(\frac{3n}{2} - 1 \right) \dots \left(\frac{n}{2} + 1 \right) a^{n+1}$$

$$\frac{1.2 \dots (n+1) \cdot 2b^{\frac{3n+1}{2}}}{2^{n+1} b^{\frac{3n+1}{2}}}$$

19. Dato a n un valore infinito, poichè pel teorema Euleriano, che è stato nel 1.º articolo rigorosamente dimostrato, si ha; $1.2.3 \dots n = \frac{n^{n+\frac{1}{2}} \sqrt{2\pi}}{e^n}$; se in vece di n sostituisco prima $\frac{n}{2}$, poi $\frac{3n}{2}$, farà $1.2.3 \dots \frac{n}{2}$

$$= \left(\frac{n}{2} \right)^{\frac{n}{2}} \sqrt{2\pi};$$

$$\frac{1.2.3 \dots \frac{n}{2} \left(\frac{n}{2} + 1 \right) \dots \frac{3n}{2}}{e^{\frac{n}{2}}};$$

$$= \left(\frac{3n}{2} \right)^{\frac{3n+1}{2}} \sqrt{2\pi}$$

$$\frac{1.2.3 \dots \frac{3n}{2}}{e^{\frac{3n}{2}}}. \text{ Dunque dividendo questa 2.ª equazio-}$$

ne per la precedente, si avrà dopo le riduzioni;

$$\left(\frac{n}{2} + 1 \right) \left(\frac{n}{2} + 2 \right) \dots \left(\frac{3n}{2} \right) = \frac{3^{\frac{3n+1}{2}} n^n}{2^n e^n}; \text{ e i due ultimi}$$

termini della serie, che rappresenta il valore di x , faranno i seguenti;

$$- \frac{3^{\frac{3n-1}{2}} (n-1)^{n-1}}{1.2.3 \dots n \cdot e^{n-1}} \cdot \frac{a^2}{2^n b^{\frac{3n-1}{2}}}; - \frac{3^{\frac{3n+1}{2}} n^n}{1.2.3 \dots (n+1) e^n} \cdot \frac{a^{n+1}}{2^{n+1} b^{\frac{3n+1}{2}}}.$$

H h iij

Laonde concluderemo, che la predetta serie farà convergente, quando abbia luogo la condizione;

$$\frac{3^{\frac{3n-1}{2}} (n-1)^{n-1}}{1.2...n.e^{n-1}} \cdot \frac{a}{2^n.b^{\frac{3n-1}{2}}} > \frac{3^{\frac{3n+1}{2}} n^n}{1.2...(n+1)e^n} \cdot \frac{a^{n+1}}{2^{n+1}b^{\frac{3n+1}{2}}}; \text{ ovvero }$$

$$\text{dopo l'espurgo; } (n-1)^{n-1} > \frac{3^{\frac{1}{2}} n^n}{(n+1)e} \cdot \frac{a}{2b^{\frac{1}{2}}}. \text{ Ma } (n-1)^{n-1}$$

$$= \frac{(n-1)^n}{n-1} = \frac{n^n \left(1 - \frac{n}{n} + \frac{n(n-1)}{1.2n^2} - \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3n^3} \right)}{n-1}$$

$$+ \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4n^4} \text{ ecc. })$$

$$= \frac{n^n}{n-1} \left\{ 1 - 1 + \frac{1}{1.2} - \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{1.2.3.4} \text{ ecc.} \right.$$

$$- \frac{1}{1.2n} + \frac{3}{1.2.3n} - \frac{6}{1.2.3.4n} + \frac{10}{1.2.3.4.5n}$$

$$\dots \pm \frac{m(m+1)}{1.2} - \frac{2}{1.2.3n^2} + \frac{11}{1.2.3.4n^3} - \frac{35}{1.2.3.4.5n^4}$$

$$+ \frac{85}{1.2...(m+1)n} \dots \pm \frac{m(m+1)(m+2)(3m+5)}{1.2.3.4} \text{ ecc. } \left. \right\};$$

e fatto m infinito dell'ordine di cui è n , le serie aggiunte alla prima vanno visibilmente a zero, essendo la prima

$$1 - 1 + \frac{1}{1.2} - \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{1.2.3.4} \text{ ecc.} = \left(1 + 1 \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} \right.$$

$$\left. + \frac{1}{1.2.3.4} \text{ ecc.} \right)^{-1} = \frac{1}{e}, \text{ posta } e \text{ la solita base de' logaritmi iperbolici. Dunque } \frac{(n-1)^n}{n-1} = \frac{n^n}{(n-1)e}; \text{ e quindi la con-}$$

$$\text{dizione } \frac{n^n}{(n-1)e} > \frac{3^{\frac{1}{2}} n^n}{(n+1)e} \cdot \frac{a}{2b^{\frac{1}{2}}}, \text{ ossia } 1 > \frac{3^{\frac{1}{2}} a}{2b^{\frac{1}{2}}}, \text{ che qua-}$$

drando dà $4b^3 > 27a^2$, farà la condizione della convergenza della serie, che è nello stesso tempo quella appunto delle 3 radici reali.

20. La 3.^a radice finalmente è $x = -1(b - ax^{-1})^{\frac{1}{2}}$, alla quale, istituiti i debiti confronti colle canoniche, corrisponde l' equazione

$$x = -b^{\frac{1}{2}} - \frac{a}{2b^{\frac{3}{2}}} + \frac{3a^2}{1.2.2^2b^{\frac{5}{2}}} - \frac{6.4}{1.2.3} \cdot \frac{a^3}{2^3b^{\frac{7}{2}}} + \frac{9.7.5}{1.2.3.4} \cdot \frac{a^4}{2^4b^{\frac{9}{2}}}$$

ecc., nella quale, principiando dal 2.^o termine, i segni vanno alternando, e in ciò sol diversifica dalla serie appartenente alla 2.^a radice. Sicchè per questa pure la condizione di $4b^3 > 27a^2$ farà essere la serie convergente in corrispondenza della realtà di questa 3.^a radice.

21. Fallace poi si rende la regola, se la cubica, cui manca il 2.^o termine, sia di tal natura, che una sola radice reale abbiavi in essa, essendo le altre due immaginarie. Imperciocchè unica essendo la condizione, che determina la divergenza di tutte e tre le serie che rappresentano le tre radici, cioè $4b^3 < 27a^2$, siccome per ragione delle 2 radici immaginarie, due di esse devono essere divergenti, segue che verificandosi anche per la serie della terza radice la condizione $4b^3 < 27a^2$, questa serie debba parimente essere divergente, e ciò si verifichi, quando appunto la radice è reale.

22. L'esame, che abbiamo fatto della regola del Sig. *Gianella* sul punto della corrispondenza tra la realtà delle radici e la convergenza delle serie, che le esprimono, così pure tra la immaginarietà delle prime e la divergenza delle seconde, ce l'ha fatta trovare talvolta giusta, ma generalmente erronea e difettosa. Vedremo ora, che non possiamo di essa fidarci nemmeno in quella parte, ove si dice, che in una equazione completa di qualunque grado, coll' ajuto delle canoniche §. 2, si potranno avere tante radici diverse, quanto è il grado della equazione, e per dimostrarlo non ci dipartiremo dalla cubica; $a + bx + cx^2 + x^3 = 0$, la quale sulla forma della 1.^a e 3.^a del citato §. 2 presenteremo così; $x = -\frac{1}{b}(a + cx^2 + x^3)$; $x = -1(c + ax^{-2} + bx^{-1})$. Fat-

ti i soliti confronti, per la prima di queste due si ottiene $k = -\frac{1}{b}$, $r = 1$, $z = a$, $Z = -\frac{a^2(a-bc)}{b^3}$; ed essendo in Z variabile solo a , si scorge evidentemente, che i valori de' differenziali delle potestà di Z , cioè $\frac{d(Z^2)}{1.2}$, $\frac{d^2(Z^3)}{1.2.3}$ ecc.

faranno tutti moltiplicati pel fattor comune $a-bc$; onde ammessa l'ipotesi che sia $bc=a$, faranno nulli questi differenziali, e insieme Z nullo; onde l'equazione (C) diventerà

$x = kz$, ovvero $x = -\frac{a}{b} = -c$. I confronti poi della

seconda somministrano $k = -1$, $r = 1$, $z = c$, $Z = \frac{a-bc}{c^3}$;

e qui pure nella assunta ipotesi di $bc=a$, sì Z che i differenziali delle sue potestà svaniscono onninamente. Laonde avremo anche colla 3.^a delle canoniche, $x = kz = -c$, cioè la stessa radice che abbiain trovata colla 1.^a. Nè ciò si dee attribuire all'eguaglianza di 2 radici, che potesse avere la nostra cubica così modificata, perchè nella equazione generale $a + bx + cx^2 + x^3 = 0$, sostituito bc in vece di a , è sibbene un fattor di questa $x + c = 0$; ma l'altro fattore diventa $x^2 + b = 0$, le cui radici immaginarie, ove sia b positivo, sono $x = \pm \sqrt{-b}$.

23. Quest'unico esempio ci dee bastare per concludere la insufficienza della regola ad esibire eziandio le tre diverse radici della equazione; e questo difetto, unito all'altro di esprimere assai spesso con serie divergenti i valori delle radici reali, ci fa desiderare, che si studj dai Geometri la maniera di liberarla da tali inconvenienti, che ce la rendon poco utile, o si trovi un altro metodo generale, che ci faccia conoscere con facilità e sicurezza, il che riesce di molta importanza, i valori prossimi di queste reali radici, insieme col criterio per determinare il numero delle immaginarie, che si occultano nelle equazioni.

M E M O R I A

SUI TETTI CHE PIOVONO DA UNA SOLA BANDA.

Del Sig. LEONARDO SALIMBENI Capitano degl'Ingegneri Veneti, e Professore di Matematica nelle Scuole Militari di Verona.

§. I.

DE' tetti che piovono da una sola banda e della loro pressione contro le muraglie che li sostengono è stato da molti scritto, ed ultimamente da' Signori Cav. *Lorgna*, e *P. Gregorio Fontana*; ma le risoluzioni di questi due celebri Matematici portano a risultamenti tanto differenti, che pare abbia ancora bisogno di rischiaramento questa parte così interessante della Matematica applicata. Per la qual cosa avendo io dello stesso problema da qualche anno ritrovata ed anche dettata a' miei Allievi del Collegio Militare una nuova risoluzione, che s' appoggia ad alcuni semplicissimi teoremi della Statica, ed osservando dipoi ch' essa mi fa strada a conciliare le opinioni di questi due sommi uomini, quantunque pajano a primo aspetto sì contrarie fra loro; ho creduto di non fare cosa discara al pubblico e ad essi medesimi mandando alla luce questa mia breve Memoria, dove mi propongo prima di descrivere questa nuova risoluzione del problema de' tetti che piovono da una sola banda, e poi di dimostrarla uniforme a quella di amendue i sopradetti Soggetti, solo che si voglia tener conto delle differenti condizioni da essi proposteli; dal che ne deriverà ch' essi medesimi effettivamente non discordano fra loro.

§. II.

E' certo per la Statica che quando un vette, o una verga rigida, sia in equilibrio fra tre forze che agiscono contro di essa per tre direzioni, l'una all'altra inclinate, queste tre direzioni prolungate, quand' occorra, debbono concorrere insieme in uno stesso punto. Per esempio se la verga rigida AC (*Fig. 1.*) sia in equilibrio fra le tre forze AB EF CD , che la tirano secondo le direzioni AB EF CD inclinate fra loro, esse direzioni AB EF CD prolungate debbono concorrere in uno stesso punto G . Da ciò ne segue che se la verga AC sia in equilibrio fra tre forze, e sieno dati i punti A C ove sono applicate in date direzioni le due forze AB CD , e sia dato in oltre il punto E a cui è applicata nella verga la terza forza, potrà determinarsi la direzione EG della stessa terza forza; imperciocchè prolungando le AB CD fino al loro concorso in G , e unendo la EG , farà la EG la ricercata direzione.

§. III.

E' certo in secondo luogo, che se la verga rigida AB (*Fig. 2.*) tirata dalla forza DE resti sostenuta da' piani FG HI , perfettamente levigati, le rette AC BC , condotte dall'estremità A B della verga ad angoli retti a' rispettivi piani, debbono concorrere in qualche punto C colla direzione DE prolungata: ed è in oltre dimostrato, che le pressioni della verga sopra i piani sono applicate a' punti A B secondo le direzioni perpendicolari CA CB .

§. IV.

Finalmente è noto, che se la verga rigida AB (*Fig. 2.*) tirata dalla forza DE rimanga sostenuta da' due piani FG HI , condotte da' punti A B le rette AC BC ad angoli retti agli stessi piani FG HI , le quali concorreranno in uno stesso punto C (§. III.) colla direzione DE ; se si compia il parallelogrammo $CXDL$, e vogliasi per CD espresso il valore

della forza DE , esprimerà CX la pressione sul piano FG , e CL quella sull' altro piano HI .

§. V.

Il teorema del §. III. ci dimostra evidentemente come debbasi risolvere questa preliminare quistione. Sia AB (*Fig. 3.*) una verga rigida inclinata all'orizzonte, ad un qualche punto F della quale sia appeso un grave E , e s' appoggi la verga con un' estremità A ad un piano AD dato di posizione, e coll'altra estremità B ad un altro piano, di cui non si fa la direzione; domandasi questa direzione medesima in modo che la verga da' due piani possa essere sostenuta. Pertanto se si prolunghi la verticale FE , e dal punto A si conduca la AC ad angoli retti al piano AD , che incontri in C la EFC , indi giunta la CB si tiri il piano BI ad essa CB perpendicolare, è manifesto esser BI la ricercata direzione del piano; perocchè la verga rigida AB tirata dalla forza FE potrà allora restare sostenuta da' due piani AD BI , avvegna- chè le rette AC BC condotte dalle sue estremità ad angoli retti a' rispettivi piani incontrano in un punto C (§. III.) la direzione EF prolungata. La risoluzione di questo problema, quantunque sì semplice, mi ha direttamente condotto a ritrovare il modo con cui i tetti, che piovono da una sola banda, spingono le muraglie alle quali sono addossati.

§. VI.

La quistione fisica vien comunemente da' Matematici ridotta a questo problema meccanico. La verga rigida AB (*Fig. 4.*) inclinata all'orizzonte rappresenti il pendio del tetto, e il peso E attaccato ad un punto qualsivoglia F della verga rappresenti il peso del tetto medesimo; suppongasì poi che l' estremità superiore A della verga s' appoggi al muro verticale ADV , e l'altra estremità B al muro BST ; ricercansi le pressioni della verga AB sopra l' uno e l' altro muro ADV BST .

§. VII.

Ecco come, poste le cose sopradette, io risolvo questo problema. Si prolunghi la verticale FE , e dal punto A si conduca la AC ad angoli retti al piano AD , che incontri la CFE nel punto C ; poi giungasi la CB . E' manifesto (§.v.) che il muro BST debbe terminare in cima in un piano BI , a cui sia la CB perpendicolare, affinchè possa la verga da' piani AD BI restar sostenuta, altrimenti cadrebbe la verga nè vi farebbe più equilibrio: quindi compiuto il parallelogrammo $CGFH$, se CF dinota il peso E , CG (§.iv.) esprimerà la pressione della verga sul piano verticale AD , e CH la pressione sul piano BI , che sono appunto le cose domandate.

§. VIII.

Se in luogo di far terminare superiormente il muro BST nel piano BI a cui sia perpendicolare la CB , si mettesse sul muro qualsivoglia ostacolo capace di far l' uffizio del piano stesso BI come nella (*Fig. 5*), vale a dire capace di tener ferma e in equilibrio la verga, come si sono immaginati tutti gli scrittori di questa materia, resterà sempre ugualmente vero, che CH esprimerà la pressione della verga sul muro medesimo BST .

§. IX.

Tornando ora alla risoluzione del §. vii, si sostituiscano alle linee le lettere, e facciasi (*Fig. 4.*) la $AB = a$, la $AF = b$, il seno tutto $= 1$, e tirata l'orizzontale BQ sia l'angolo $ABQ = \phi$, e finalmente il peso E dicasi $= P$. E perchè l'angolo FAC è uguale all'angolo ABQ , farà anche $FAC = \phi$, dunque la $CF = b \cdot \text{sen. } \phi$, e la $AC = b \cdot \text{cos. } \phi$. Di nuovo essendo $AB : BF :: AC : CG$, ovvero $a : a - b :: b \cdot \text{cos. } \phi : CG$, farà la $CG = \frac{b}{a} (a - b) \text{cos. } \phi = FH$; ma la linea retta $GF = \sqrt{(CF^2 + CG^2)}$ riuscirà uguale alla quantità $\sqrt{(b^2 \cdot \text{sen.}^2 \phi$

$$+ \frac{b^2}{a^2} (a-b)^2 \cdot \cos.^2 \phi) = \frac{b}{a} \sqrt{(a^2 \cdot \sin.^2 \phi + (a-b)^2 \cdot \cos.^2 \phi)} = CH;$$

per la qual cosa essendo come la CF alla CG , così il peso E alla cercata pressione contro il muro ADV , farà essa pressione

$$= \frac{P \cdot (a-b)}{a} \cdot \frac{\cos. \phi}{\sin. \phi} = \frac{P}{a} (a-b) \cdot \cot. \phi; \text{ e similmente essendo}$$

come la CF alla CH , così il peso E alla pressione sul muro BST , farà questa seconda ricercata pressione

$$= \frac{P}{a \cdot \sin. \phi} \sqrt{(a^2 \cdot \sin.^2 \phi + (a-b)^2 \cdot \cos.^2 \phi)}.$$

§. X.

Se si volesse trovare il momento dell'una e dell'altra pressione contro le rispettive muraglie, converrà operare nel seguente modo. Per supposizione stabilita fra tutti i Meccanici si tiene, che il centro del moto di un muro, o per meglio dire il punto d'intorno a cui cercano muovere il muro le forze contro di esso impiegate, sia il punto estremo esteriore della sua base: così quello del muro (*Fig. 4.*) ADV farà in V , e quello del muro BST in T ; laonde il momento della forza CG premente il muro ADV farà uguale al prodotto di essa forza CG moltiplicata per la retta VY condotta dal punto V perpendicolare alla CGY , e il momento della forza CH premente il muro BST farà uguale al prodotto della CH nella retta TX condotta dal punto T perpendicolare alla CBX . Per il che fatta l'altezza $AD = VY = c$, essendosi trovata la forza CG che preme il muro ADV

$$= \frac{P}{a} (a-b) \cdot \cot. \phi, \text{ farà il suo momento } = \frac{Pc}{a} (a-b) \cdot \cot. \phi.$$

Un poco più di difficoltà s'incontra nel determinare il momento dell'altra forza contro il muro BST , ma il risultamento non sarà niente meno elegante. Si tiri pertanto la SM parallela alla TX , e la TO parallela alla CX ; poi si chiami l'altezza BS della muraglia $BST = d$, e la sua grossezza ST in base $= e$. Ora essendo il triangolo CFH simile

al triangolo SMB , farà $CH:FH::BS:SM$, ovvero farà

$$\frac{b}{a} \sqrt{(a^2 \cdot \text{sen}^2 \phi + (a-b)^2 \cdot \cos^2 \phi)} : \frac{b}{a} (a-b) \cdot \cos \phi :: d : SM,$$

dunque $SM = d \cdot (a-b) \cdot \cos \phi : \sqrt{(a^2 \cdot \text{sen}^2 \phi + (a-b)^2 \cdot \cos^2 \phi)}$; similmente essendo il triangolo medesimo CFH simile al triangolo SOT , e come $CH:CF::ST:SO$, si troverà la $SO = a \cdot \text{sen} \phi : \sqrt{(a^2 \cdot \text{sen}^2 \phi + (a-b)^2 \cdot \cos^2 \phi)}$; dunque $TX = SM - SO = d(a-b) \cdot \cos \phi : \sqrt{(a^2 \cdot \text{sen}^2 \phi + (a-b)^2 \cdot \cos^2 \phi)} - a \cdot \text{sen} \phi : \sqrt{(a^2 \cdot \text{sen}^2 \phi + (a-b)^2 \cdot \cos^2 \phi)}$; la forza poi CH premente la muraglia BST si è dimostrata (§. IX.) uguale a

$$\frac{P}{a \cdot \text{sen} \phi} \sqrt{(a^2 \cdot \text{sen}^2 \phi + (a-b)^2 \cdot \cos^2 \phi)}; \text{ e però moltiplican-$$

dola per la perpendicolare TX s' avrà il ricercato suo mo-

$$\text{mento} = \frac{dP(a-b) \cdot \cos \phi}{a \cdot \text{sen} \phi} - eP = \frac{dP}{a} (a-b) \cdot \cot \phi - eP.$$

Di questi due momenti, che abbiamo espresso con formole sì semplici, conviene far uso quando vogliasi proporzionare la resistenza delle muraglie $ADV BST$ alle pressioni, ch' esse soffrono dal tetto, o dalla verga rigida AB caricata del peso E ; intorno alla qual cosa è superfluo il dire di più, essendo stato trattato questo argomento così diffusamente da' Matematici.

§. XI.

Dal punto B (*Fig. 4*) nella direzione CX si prenda la BL uguale alla forza CH , poi si divida la forza BL nelle due BP BR l'una orizzontale e l'altra verticale formando il parallelogrammo $BRLP$. Essendo pertanto il triangolo BRL uguale e simile al triangolo CFH , farà la FH uguale alla RL o alla BP , e però facendo come la CF alla HF , così il peso E ad un quarto proporzionale, si avrà il valore della spin-

$$\text{ta orizzontale } BP = \frac{P}{a} (a-b) \cdot \cot \phi; \text{ la forza poi verticale}$$

$BR = CF$ farà uguale al peso P . Questa divisione della for-

za *BL* mi è stata necessaria per poter fare il confronto che segue.

§. XII.

Il Cel. P. *Gregorio Fontana* risolve nel Tomo antecedente della nostra Società pag. 529 il problema della verga in due modi, uno che implica la necessità di sommare una serie, l'altro più semplice che dà gli stessi risultamenti del primo, e che noi qui riferiremo colle sue parole medesime. Avvertasi che *AD* (*Fig. 6.*) dimostra il piano verticale a cui s'appoggia l'estremità superiore *A* della verga, e l'altra estremità si suppone dall'Autore essere nel piano orizzontale *OD*, e in esso da qualche ostacolo trattenuta; la verga poi *AO* è, come da noi si è posta, $=a$, la $AF=b$, essendo *F* il punto a cui sta attaccato il peso $=P$, e l'angolo *AOD* della verga col piano orizzontale $=\phi$. „ Si risolva, dice l'Autore, la forza verticale *FP* del peso della verga nella orizzontale *FI* e nella *FL* parallela alla verga, e farà *FL*

$$= \frac{FP}{\text{sen. } FL P} = \frac{P}{\text{sen. } \phi}, \quad FI = \frac{P \cdot \cos. \phi}{\text{sen. } \phi}. \text{ Ora la forza } FL \text{ s' im-}$$

piega tutta a premere il punto *O* in direzione della ver-

$$\text{ga, e viene rappresentata da } OQ = FL = \frac{P}{\text{sen. } \phi}. \text{ Se si}$$

abbassa la verticale *QG*, nasce dalla forza *OQ* la spinta o-

$$\text{rizzontale } OG = OQ \cdot \text{sen. } OQG = \frac{P \cdot \cos. \phi}{\text{sen. } \phi}. \text{ La forza poi}$$

orizzontale *FI* trasferendo alle due estremità *A* ed *O* della verga la sua azione per modo che risulta in *A* la spinta

$$\text{orizzontale } AS = \frac{OF}{OA} \cdot FI = \frac{P(a-b)\cos.\phi}{a.\text{sen.}\phi}, \text{ ed in } O \text{ la spin-}$$

$$\text{ta orizzontale } OE = \frac{AF}{OA} \cdot FI = \frac{Pb.\cos.\phi}{a.\text{sen.}\phi}. \text{ Laonde tutta la}$$

spinta orizzontale contro *O*, ovvero contro l'ostacolo po-

$$,, \text{ sto in } O \text{ sarà } OG - OE = \frac{P \cdot \cos. \phi}{\text{sen. } \phi} - \frac{Pb \cdot \cos. \phi}{a \cdot \text{sen. } \phi}$$

$$,, = \frac{P(a-b) \cdot \cos. \phi}{a \cdot \text{sen. } \phi} = \frac{P}{a} (a-b) \cdot \cot. \phi. ,,.$$

Ora facciam la GK uguale alla OE , sicchè la OK diventi $= OG - OE$, e dal punto K conducam la KM parallela ed uguale alla QG , e uniscam la OM , la quale dimostrerà la forza composta della forza verticale GQ e dell'orizzontale $OG - OE$: e però OM indicherà la forza e la direzione con cui resta l'ostacolo premuto. E poichè la spinta orizzontale

$$OK = OG - OE = \frac{P}{a} (a-b) \cot. \phi, \text{ e la verticale } KM = GQ$$

$= FP = P$ precisamente come si era trovato nell'Articolo antecedente e nella Figura quarta, ne segue che la OM della Figura sesta sarà uguale e ugualmente all'orizzonte inclinata che la BL della quarta citata; la forza poi contro il piano ver-

ticale AD è $= \frac{P}{a} (a-b) \cdot \cot. \phi$ tanto nella risoluzione del dottissimo *P. Fontana*, che nella mia (§. ix.); dunque le nostre formole coincidono perfettamente fra loro.

§. XIII.

Ma sia proposta la risoluzione del problema più generalmente in questo modo. Sia la verga AB (*Fig. 7*) appoggiata in A al piano AD dato d'inclinazione coll'orizzonte, e nell'altra estremità B s'appoggi al muro BST ; e sia aggravata la verga dal peso E attaccato in un dato punto F della verga; domandati la pressione contro il piano AD e contro il muro BST . Seguendo i miei principj si risolve assai facilmente anche questo problema. Prolunghim pertanto la verticale EFC , e dal punto A si conduca la AC perpendicolare al piano AD , che incontri in C la EFC , e unita la CB , si tiri dal punto B la BI perpendicolare alla BC , che dimostrerà il piano della sommità del muro BST (§. v.); poi si compia il parallelogrammo $CGFH$, ed è manifesto che se CF dinota

dinota la gravità di E , dinoterà CH (§. IV.) la pressione sul piano AD , e CG quella contro il muro BST .

Sia dunque la $AB=a$, la $AF=b$, l'angolo BAD del vette col piano inclinato $AD=\phi$, l'angolo ADB di esso piano coll'orizzonte $=\omega$, e il peso $E=P$. E poichè i due angoli CRD CAD sono retti, faranno uguali a due retti gli angoli FCA ADB ; dunque sen. FCA =sen. ADB =sen. ω ; sarà poi sen. CAF = cos. BAD =cos. ϕ . Inoltre essendo l'angolo ABK uguale ai due angoli ADB BAD , sarà sen. ABK =sen. ABD =sen. $(\omega+\phi)$, e cos. ABD =cos. ABK =-cos. $(\omega+\phi)$; e però anche sen. BFR =cos. ABD =-cos. $(\omega+\phi)$; l'angolo poi BFR è uguale all'angolo CFA ; quindi anche sen. CFA =-cos. $(\omega+\phi)$. Ora la proporzione di sen. FCA :sen. CAF :: AF : CF , ovvero di sen. ω :cos. ϕ :: b : CF , darà CF

$$= \frac{b \cdot \cos. \phi}{\text{sen. } \omega}; \text{ e l'altra proporzione di sen. } FCA:\text{sen. } CFA::$$

$$AF:AC, \text{ o di sen. } \omega:-\cos. (\omega+\phi):: b:AC, \text{ darà } AC = \frac{-b \cdot \cos. (\omega+\phi)}{\text{sen. } \omega}; \text{ come poi } AB:BF::AC:CH; \text{ dunque}$$

$$CH = \frac{-b(a-b) \cdot \cos. (\omega+\phi)}{a \cdot \text{sen. } \omega}. \text{ Di nuovo nel triangolo rettangolo } FBR \text{ essendo la } FB=a-b, \text{ e sen. } ABD, \text{ o dicasi } FBR, = \text{sen. } (\omega+\phi), \text{ sarà la } FR=(a-b) \cdot \text{sen. } (\omega+\phi), \text{ che}$$

$$\text{aggiunto alla } CF \text{ già ritrovata, darà tutta la } CR = \frac{b \cdot \cos. \phi}{\text{sen. } \omega} + (a-b) \cdot \text{sen. } (\omega+\phi); \text{ ma nello stesso triangolo } FBR, \text{ perchè cos. } ABD, \text{ o dicasi } FBR, = -\cos. (\omega+\phi), \text{ si troverà la } BR = -(a-b) \cos. (\omega+\phi). \text{ Dati pertanto i cateti } CR \text{ } BR$$

$$\text{del triangolo rettangolo } CBR \text{ si avrà la } CB = \sqrt{\left(\frac{b^2 \cos.^2 \phi}{\text{sen.}^2 \omega} + 2b(a-b) \cdot \frac{\cos. \phi \text{ sen. } (\omega+\phi)}{\text{sen. } \omega} + (a-b)^2 \right)}; \text{ sicchè essendo}$$

$$\text{come } BA:AF::CB:CG, \text{ riuscirà la } CG = \frac{b}{a} \sqrt{\left(\frac{b^2 \cos.^2 \phi}{\text{sen.}^2 \omega} + 2b(a-b) \cdot \frac{\cos. \phi \text{ sen. } (\omega+\phi)}{\text{sen. } \omega} + (a-b)^2 \right)}. \text{ Per la qual}$$

cosa poichè come la CF alla CH , così è il peso E alla pressione sul piano AD , farà essa pressione $\frac{P(a-b) \cdot \cos.(\omega+\phi)}{a \cdot \cos. \phi}$;

e similmente essendo come la CF alla CG , così il peso E alla pressione contro il muro BST , avrassi essa pressione $= \frac{P}{a} \sqrt{\left(b^2 + 2b \cdot (a-b) \cdot \frac{\text{sen. } \omega \cdot \text{sen. } (\omega+\phi)}{\cos. \phi} + (a-b)^2 \cdot \frac{\text{sen.}^2 \omega}{\cos.}^2 \phi \right)}$.

Se si volesse poi avere una formola esprimente il momento di essa spinta contro il muro BST , bisognerà operare come nel §. x., e farà questa (chiamata l'altezza $BS = d$, e la grossezza $ST = e$) $= - \frac{Pd(a-b) \cdot \text{sen. } \omega \cdot \cos. (\omega+\phi)}{a \cdot \cos. \phi} - \frac{beP}{a}$

$- \frac{Pe(a-b) \cdot \text{sen. } \omega \cdot \text{sen. } (\omega+\phi)}{a \cdot \cos. \phi}$; ch'è una cosa importante

a saperfi, come abbiamo detto nel luogo citato, per poter proporzionare la muraglia allo sforzo ch'essa debbe sostenere.

§. XIV

Fatta la $BM = CG$, si divida la forza BM nelle due forze BK KM , la prima orizzontale, verticale l'altra. Per la somiglianza de' triangoli CBR MBK si troverà la spinta orizzontale $BK = \frac{P(a-b) \cdot \text{sen. } \omega \cdot \cos. (\omega+\phi)}{a \cdot \cos. \phi}$, e la spinta ver-

ticale $KM = \frac{Pb}{a} + \frac{P(a-b) \cdot \text{sen. } \omega \cdot \text{sen. } (\omega+\phi)}{a \cdot \cos. \phi}$. Il P. Gre-

gorio *Fontana* trova nella risoluzione di questo Problema la spinta orizzontale BK espressa colla medesima formola; ma

per la spinta verticale KM trova $\frac{P}{a \cdot \cos. \phi} (a \cdot \text{sen. } \omega \cdot \text{sen. } (\phi+\omega) + b \cdot \cos. \omega \cdot \cos. (\omega+\phi))$, che mediante un poco di calcolo può ridursi alla nostra. Anche per la spinta contro il muro AD trova la formola $\frac{P(a-b) \cdot \cos. (\omega+\phi)}{a \cdot \cos. \phi}$ ch'è pari-

menti la stessa della presentata da noi nell'articolo antecedente (*Veg. Mem. della Soc. Ital. Tomo III pag. 531. 532*).

§. XV.

Dalle cose sopradette ne segue, che fatto l'angolo BAD (*Fig. VII.*) della verga col piano AD uguale a zero, cioè $\phi = 0$, il qual caso avviene quando l'estremità A s'appoggi ad un piano che secondi l'inclinazione stessa della verga, riuscirà allora la spinta BM contro il muro $BST = \frac{P}{a} \sqrt{(b^2 + 2b(a-b) \cdot \text{sen.}^2 \omega + (a-b)^2 \cdot \text{sen.}^2 \omega)} = \frac{P}{a} \sqrt{(b^2 + (a^2 - b^2) \text{sen.}^2 \omega)}$; ovvero, chiamato l'angolo ABD che fa la verga coll'orizzonte $= \pi$, diventando gli angoli ABD ADB , cioè gli angoli π e ω uguali a due retti, e però $\text{sen.} \omega = \text{sen.} \pi$, farà la spinta $BM = \frac{P}{a} \sqrt{(b^2 + (a^2 - b^2) \text{sen.}^2 \pi)}$. Volendo poi dividerla nel solito modo nelle due BK KM , si troverà la spinta orizzontale $BK = -\frac{P}{a} (a-b) \cdot \text{sen.} \omega \cos. \omega = \frac{P}{a} (a-b) \cdot \text{sen.} \pi \cdot \cos. \pi$; e la verticale $KM = \frac{Pb}{a} + \frac{P}{a} (a-b) \cdot \text{sen.}^2 \pi$. La forza poi CH che preme il muro AD diverrà $= \frac{P}{a} (a-b) \cdot \cos. \pi$; ed inoltre il momento della forza BM contro il muro BST si cangierà in $\frac{Pd}{a} (a-b) \cdot \text{sen.} \pi \cdot \cos. \pi - \frac{beP}{a} - \frac{Pe}{a} (a-b) \cdot \text{sen.}^2 \pi$; le quali cose tutte seguono, come ognun vede, anche dai risultamenti del *P. Fontana*.

§. XVI.

Mi propongo ora di dimostrare che la risoluzione del Sig. Cav. *Lorgna* del problema de' tetti che piovono da una sola banda non discorda da quella del *P. Fontana*. Ecco le parole stesse di quest'altro Autore (*Veg. Saggi di Sta-*
 K k ij

tica e Meccanica ecc. pag. 1.) . “ Trovare la spinta orizzontale sostenuta da' punti $A B$ (Fig. 8) su' quali s'appoggia la verga rigida AB , essendo perfettamente levigati i piani $MN NO$, e ritenuto il capo della verga B dall'ostacolo P .

„ La verticale KS condotta dal centro di gravità K rappresenta il peso della verga AB . Si risolva la forza KS nelle due $QS KQ$, una parallela all'asse della verga AB , l'altra all'asse perpendicolare in K . E' certo primieramente che la forza QS esercita tutta la sua azione secondo la direzione AB contro il punto B ; e che l'altra KQ , operando con direzione perpendicolare, distribuisce con la stessa direzione le sue azioni sopra i punti $A B$ in reciproca ragione delle rispettive distanze dal centro di gravità K . Si divida pertanto la KQ in due parti $Af Bd$ in questa ragione, le quali sieno perpendicolarmente all'asse applicate a' punti $A B$, sì che sia Af a Bd , come BK a KA . Condotta l'orizzontale AC , e dal punto f la fr perpendicolare ad AC , essendo la forza Af risolta nelle due $fr Ar$, s'impiegherà la fr nel premere verticalmente il piano MN , e farà l'altra Ar la forza orizzontale, con cui è premuto lo stesso piano in A . E passando al punto B , si prolunghi la AB , e si faccia il prolungamento Bb uguale alla forza QS . Il punto B farà nello stesso tempo sollecitato dalle due forze $Bd Bb$, oppure, componendo, dalla forza ad esse equivalente Bg . Ma essendo BO orizzontale, si conduca dal punto g la ga perpendicolare a BO , e farà in tal guisa la forza Bg risolta nelle due $ga Ba$, la prima delle quali tenderà a premere verticalmente il piano NO , e l'altra Ba farà la forza orizzontale intesa a spingere l'ostacolo P nel punto B . Si è dunque determinata la quantità delle impulsioni orizzontali in A e B .

Lo scopo del celebre Autore è stato di trovare le spinte orizzontali $Ar Ba$ che operano contro il muro AN e l'ostacolo P , ma dalle cose da esso dette manifestamente apparisce, che l'intera spinta contro il piano MN è espressa dalla Af , e quella contro l'ostacolo P è espressa dalla Bg . Ora sia la $AB = a$, la $AK = b$, la $KS = P$, e l'angolo ABN

$= SKQ = \pi$, farà $QS = Bb = P. \text{sen. } \pi$, e $KQ = P. \text{cos. } \pi$, e però la $Af = \frac{P}{a} (a-b). \text{cos. } \pi$, e la $Bd = \frac{bP}{a}. \text{cos. } \pi$, dunque Bg

$$= \sqrt{(Bd^2 + Bb^2)} = \frac{P}{a} \sqrt{(b^2. \text{cos.}^2 \pi + a^2. \text{sen.}^2 \pi)} = \frac{P}{a} \sqrt{(b^2 + (a^2 - b^2). \text{sen.}^2 \pi)}$$

$\text{sen.}^2 \pi$). Oltre a ciò se vogliasi calcolare la forza orizzontale Ba contro l'ostacolo, e la verticale ag , si troveranno la

$$\text{prima} = \frac{P}{a} (a-b). \text{sen. } \pi. \text{cos. } \pi, \text{ e la seconda} = \frac{Pb}{a} + \frac{P}{a} (a-b). \text{sen.}^2 \pi.$$

I quali valori egualmente che i precedenti della forza Af contro il muro AN , e della intera forza Bg contro l'ostacolo P , coincidono perfettamente con quelli del §. xv. dedotti dalle formole del *P. Fontana* e dalle mie nella supposizione che il muro AN secondi l'andamento della verga AB . Per farfi un'idea distinta di questo caso veggasi la *Fig. 9* dove AZ mostra il piano su cui s'appoggia l'estremità A della verga, vale a dire AZ mostra la sommità del muro AVD .

§. XVII.

Si potrebbe risolvere affai facilmente questo caso col mio metodo, senza dedurre la sua risoluzione dal problema generale del §. xiii. e ciò in questo modo. Si conduca la AC perpendicolare alla AB , finchè incontri la verticale EFC in C ; e unita la CB , si compia il parallelogrammo $CGFH$, di cui se la diagonale CF esprime il peso E , CH esprimerà la pressione contro il muro AVD , e CG quella contro BST : e calcolando si troveranno le stesse identiche formole. Sembra pertanto che il dottissimo Sig. Cav. *Lorgna* nel determinare la forza Af (*Fig. 8*) che spinge il muro AN , facendola cadere secondo una direzione perpendicolare alla AB , abbia avuto in vista questa posizione della verga. Ciò mi dà occasione di discutere se sia più alla pratica conforme il supporre la verga nella posizione suddetta, ovvero in quella della *Fig. 4.*, come l'hanno intesa fino ad ora tutti gli Au-

tori eccetto il Sig. Cav. *Lorgna* : ma per procedere con sicuro fondamento in tale ricerca descriviamo prima la maniera tenuta da' nostri Architetti nella costruzione di questi tetti che piovono da una sola banda.

§. XVIII.

Dimostra *AB* (*Fig. 10*) un *puntone* collocato fra le muraglie : questi *puntoni*, che fanno l'uffizio di *cavalletti* per sostenere il tetto, mettonsi alla distanza di 10 a 12 piedi l'uno dall'altro per tutta la lunghezza che esso debbe avere, e si fanno, quando la *tratta* sia di 15 a 18 piedi, di legname grosso pol. 8 a 9, e meno, se la *tratta* è minore; e si sostengono qualche volta coi *vazzi* *YZ* come nella figura. I *puntoni* però si fanno poggiare nell'estraneità su' muri, dentro cui vanno incastrati; anzi per tenerli ben fermi, si sollevano alquanto i muri sopra di essi, e si affortificano con due *chiavi* di ferro *RR* una per parte. Sopra i *puntoni* si mettono i *correnti* *Q* di legname squadrato di pol. 5 a 6 alla distanza di 4 piedi circa uno dall'altro, e vanno distribuiti come nella figura medesima. Finalmente si mettono sopra a' *correnti* i *panconcelli* *DE* alla distanza di pol. 10 fra loro, e su questi le *pianelle*, e gli *embrici* o *tegolini*,

§. XIX.

I *panconcelli* vengono inchiodati ne' *correnti*, questi ne' *puntoni*; ma prescindendo da' ferramenti, da' quali bisogna prescindere volendo ridurre a calcolo lo sforzo del tetto, egli è manifesto che tutto il peso del tetto medesimo vien sostenuto da' *puntoni*, e che però dividendolo pel numero de' *puntoni* si avrà il peso *E* che opera contro ciascuno di essi. E questo peso *E*, per cagione dell'uniformità del tetto, potrebbesi, senza tema di andar molto lontani dal vero, intenderlo applicato al punto *F* della metà della lunghezza del *puntone* *AB*. Ma il *puntone* *AB* come si debbe intender egli appoggiato nelle sue due estremità *A B*, e qual supposizione può esser mai più alla verità e al fatto conforme?

§. XX.

Sembra che la supposizione più naturale sia quella d'intendere levate le muraglie superiori a' punti $A B$, le quali non producono che l'effetto, come abbiamo accennato nel §. XVIII, di tener obbligate l'estremità del puntone AB , e quindi intendere che l'estremità A s'appoggi sul piano AS che segue la stessa direzione del puntone. Certamente è più al vero conforme questa supposizione dell'altra, benchè comunemente abbracciata, per cui si tiene come reciso il tronco AS del puntone, e appoggiantesi questo in S al muro verticale SM ; poichè niuno può negare che appunto per mezzo di esso tronco AS s'assesta l'estremità superiore del puntone alla muraglia SMT . Bisognerà però nella prima posizione supporre ancora che l'altra estremità B s'assesti nel piano PB , la cui direzione pel §. v. dovrà esser perpendicolare alla retta BC tirata dal punto B al punto dove concorrono la verticale EF e quella retta, che dal punto A si conduce ad angoli retti alla AB , e ciò perchè possa il puntone restar sostenuto dai piani $AS PB$.

§. XXI.

Concludiamo pertanto 1.° che il *P. Fontana* ha risoluto il problema della verga appoggiata nella sua estremità superiore ad un piano o verticale, o comunque inclinato coll'orizzonte, in un modo fuori di qualunque eccezione. 2.° Che il Sig. Cav. *Lorgna* ha con ugual felicità risoluto il problema nella supposizione che l'estremità superiore della verga s'appoggi ad un piano secondante l'andamento della verga medesima. 3.° Che questa risoluzione si ricava anche dalle formole generali del *P. Fontana*. 4.° E per fine che la supposizione del Sig. Cav. *Lorgna* pare possa essere più alla verità conforme per calcolare le spinte de' tetti che piovono da una sola banda.

SPERIENZE ELETTRICHE

SOPRA L' ACQUA E SOPRA IL GHIACCIO

Del Sig. ANTON MARIA VASSALLI Professore di Filosofia nel R. Collegio di Cortona, Corrispondente della R. Accademia delle Scienze, Membro della R. Società Agraria di Torino, e dell' Accademia di Fossano.

D I R E T T O R E

Al Sig. C. A. G. ZIMMERMANN Professore di Matematica, di Fisica e d' Istoria Naturale nel Collegio Carolino di Brunswic, dell' Accademia delle Scienze di Gottinga, e della Società dei curiosi della Natura di Berlino.

Presentate dal Sig. MALACARNE.

A Ppena conobbero i Fisici la distinzione de' corpi indifferenti, e coibenti relativamente all' elettricità, che osservando la dissipazione (1) di questo fluido per mezzo de' vapori acquosi, e che se una quantità d' acqua faccia un corpo solo colla catena caricata si tirano da questo fluido le scintille come dal conduttore metallico, giudicarono tosto essere l' acqua ugualmente deferente dei metalli stessi. Nella qual opinione furono maggiormente confermati dalle sperienze del tragitto della scossa traverso fiumi, e laghi: quindi i primi scrittori di questo fluido credettero cosa certissima la massima deferenza dell' acqua, come tra gli altri mostra

(1) Questa dissipazione fu anche osservata prima che si distinguessero i diversi corpi indifferenti, e coibenti. Gilbert domandato padre dell' elettricità nel suo trattato *de magnete*, avvertì di già, che i vapori acquosi annichilano quasi i fenomeni elettrici. *Priestley Hist. de l'Electricité* Tom. 1. pag. 6.

Fig. 2.

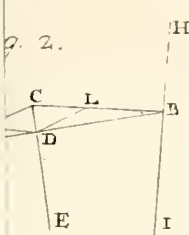


Fig. 3.

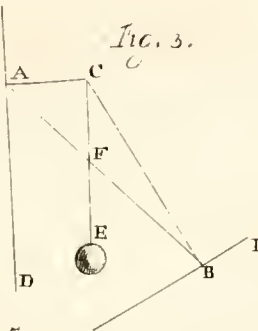


Fig. 5.

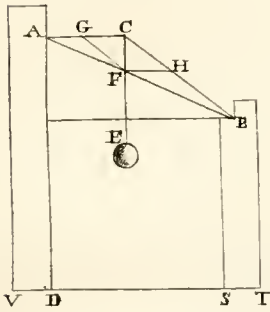


Fig. 8.

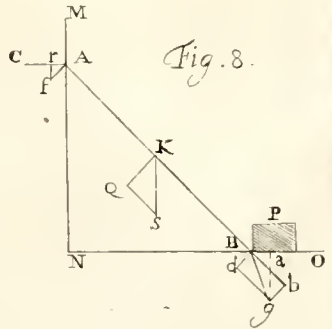


Fig. 6.

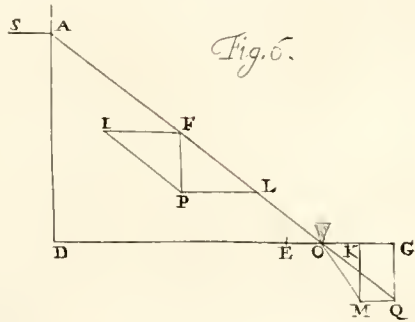


Fig. 9.

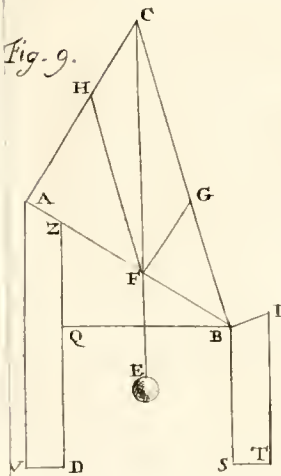


Fig. 10.

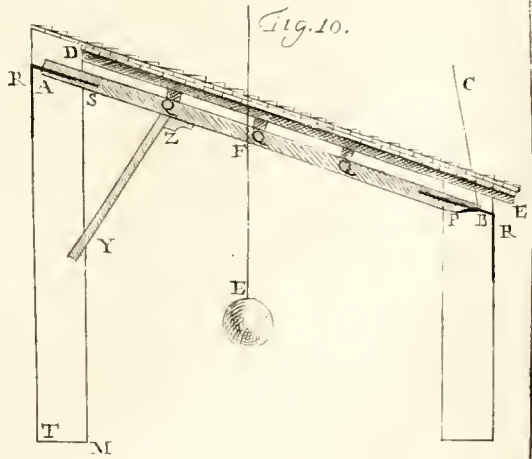


Fig. 1.

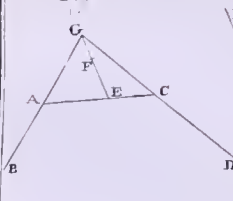


Fig. 2.

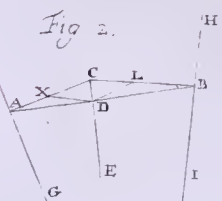


Fig. 3.

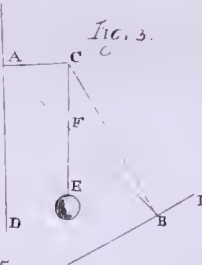


Fig. 8.

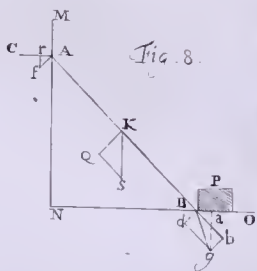


Fig. 4.

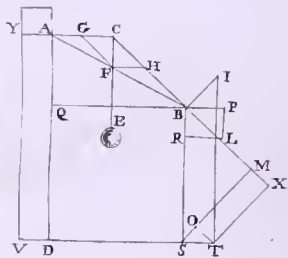


Fig. 5.

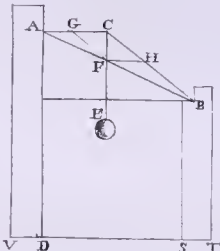


Fig. 6.

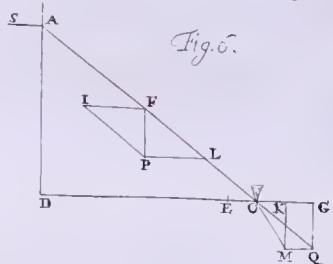


Fig. 7.

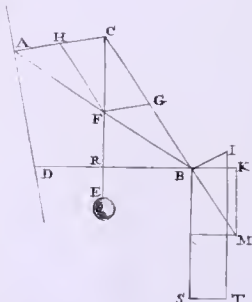


Fig. 9.

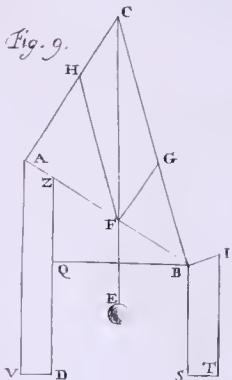
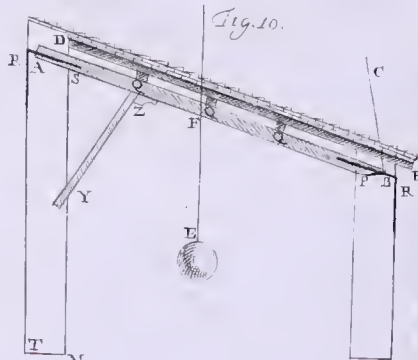


Fig. 10.



fra chiaramente *Eulero* nella dissertazione sopra la causa e la teoria dell'elettricità, coronata dall'Accademia di Pietroburgo (a). E quantunque alcuni diligenti sperimentatori, il primo de' quali a questo proposito credo che sia stato il *Beccaria* (b), abbiano tentato con molti fatti di rimuovere tale errore, tuttavia la sentenza contraria era così universalmente abbracciata, e ritrovavasi sostenuto da uomini di sì gran credito, che ancora a' nostri giorni vi sono scrittori che l'ammettono, altri poi che se non tolgono affatto ogni deferenza all'acqua, la scemano talmente che piccola differenza vi rimane tra essa, ed i corpi più coibenti. In tale contrarietà di pareri la sola via, che ci rimane per non isbagliare, seguendo l'autorità, si è d'interrogare la natura con gli esperimenti, e costringerla in tal modo a manifestarci quale in se la cosa è veramente. Ed in vero questo fu il metodo seguito dal *Beccaria* sino dal 1753 che pubblicò le sperienze, le quali formano la base dell'articolo II. dell'incomparabile capo della scintilla nell'opera del 1772. Ma sviato per altre occupazioni da questo soggetto lasciò ad altri il farne un più accurato esame, pel quale tra le altre cose ricercasi di provare il ghiaccio, avvertendo però come dice il degnissimo istorico di questo grand'uomo (c) di non lasciarci ingannare dal velo umido, che per lo più attornia il ghiaccio (d). Il Sig. *Bergmann* nel 1773. (e) presentò diversi sperimenti atti a rischiarare moltissimo questa materia facendo passare la scarica della boccia ora per diverse quantità d'acqua contenuta in tubi di vetro, ora per cilindri di neve, ora per pezzi di ghiaccio, i quali sperimenti farebbe-

Tomo IV.

L I

(a) N. 18. ed altrove. Vedi pure dello stesso *Lettres á une Princesse d'Allemagne*. Lettr. CXLI. in cui mette l'acqua prima de' metalli, e di qualunque altro corpo riguardo alla deferenza.

(b) *Elett. Artif. e Nat.* 1753. pag. 111. e seg.

(c) *Eandi Memorie istoriche intorno gli studi del P. G. B. Beccaria* s. XLIV.

(d) Non è improbabile, che da questo

velo umido siano stati ingannati coloro, che dissero il ghiaccio un ottimo conduttore, come pure il Sig. *Tallabert* nella sua sperienza nella boccia di *Leida*, in cui l'acqua era gelata. *Priestley* ivi pag. 239.

(e) *Novae Acta Regiae Societatis scientiarum Upsalienfis* vol. 1. Upsalia 1773.

Experimenta electrica transitum commotionis per aquam illustrantia Auctore Torbeno Bergmann. pag. 111.

ro stati di maggiore utilità se l'autore 1.^o non si fosse servito del metodo già usato dal *Beccaria* (a) di misurare la forza della scarica, cioè di far passare la scarica traverso il nostro corpo, e determinarne la forza dalla sensazione principalmente nelle articolazioni; poichè tutto di osservo grandissime differenze nella sensazione prodotta da uguali scariche nel corpo de' diversi soggetti, al che aggiungendo la difficoltà di esprimere talmente una sensazione, che gli altri intendano precisamente la stessa cosa, resta vieppiù manifesto quanto sia difettoso questo metodo. 2.^o Le esperienze sopra il ghiaccio, e la neve non sembrano abbastanza variate, nè circostanziate per poterne dedurre sicure conseguenze; da' suoi sperimenti però l'autore conchiuse: *Nonnisi quantitates magnæ explosionem transmittunt* (b), la qual proposizione, soggiunge, *duabus propositionibus notis repugnat, quarum altera hæc est: commotio aquam perfecte transit, altera vero glacies circulum explosionis intrans concussioni transitum omnino denegat. Prior axiomatis instar per duodecim circiter annos invaluit, posterior autem a Doctore Benjamin Franklin primum, quantum scio, est detecta, eamque glaciæ proprietatem jure miratur inventor, cum aquam dicti circuli optimum articulum crederet* (c).

Vedendo la disparità delle opinioni, e che l'esperienze recate per l'una e l'altra sentenza non vanno affatto esenti d'ogni taccia di qualche inaccuratezza nella relazione delle circostanze che possono influire sull'esito dello sperimento, cercai se mi era possibile d'accertarmi della verità d'alcuna delle due opposte sentenze, esaminando la natura nella seguente maniera.

Sperienze sopra l'acqua.

Siccome riesce molto più facile lo sperimentare sopra la deferenza dell'acqua, di quel che sia l'esaminar la deferenza del ghiaccio, perchè quella si può sempre avere in tanta copia come si desidera, perciò su d'essa ho fatto un maggior numero d'es-

(a) Elett. Art. e Nat. §. 384.

(b) Lib. cit. pag. 113.

(c) *Neus experiments and*

Observations on electricities. Lett.
III. §. 28.

perienze, delle quali però riferirò soltanto quelle che possono crederfi sostanzialmente diverse per la mutazione degli aggiunti.

1.^a Ho preso un vaso di rame di tre pollici di diametro, e mezzo pollice d' altezza . Questo pieno d' acqua comune l' ho posto sopra il quadro di *Franklin*, indi a cariche uguali misurate coll' elettrometro (a) estraeva le scintille ora dall' acqua ora dal quadro . Quelle del quadro erano bianche e vivacissime , le altre tirate dall' acqua comparivano rossiccie e deboli . Per determinarne la forza mi procurai tanti pezzi uguali di cartoncino fino, ed osservai che le scintille del quadro passarono sei pezzi posti uno sopra l' altro ; all' incontro quelle dell' acqua forarono un solo pezzo , ed il buco era di gran lunga minore di quello che vedeaasi negli altri sei pezzi .

2.^a Giudicando che lo strato d' acqua fosse troppo sottile e temendo che l' elettricità si elevasse sino alla superficie dell' acqua pel metallo, ho tolto il fondo ad un bicchiere alto tre pollici circa, e largo due di cristallo , e vi adattai un fondo d' ottone; di poi empito detto bicchiere d' acqua lo situai parimenti sul quadro . Le scintille tirate da questo , e dall' acqua non comparivano diverse da quelle dell' antecedente sperimento; ed avendo fatto uso de' pezzi di cartoncino per misurarne la forza, ritrovai che le scintille del quadro (s' intende sempre a cariche uguali) bucarono cinque pezzi, e quelle dell' acqua appena ne passavano uno lasciandovi un forellino quasi insensibile . Che se ne metteva due, uno sopra l' altro, la scarica passava con fischio senza scintilla .

3.^a Servendomi dello stesso apparato ho voluto provare a tirare le scintille dall' acqua al bujo, ed osservai primo che le scintille non comparivano che alla superficie dell' acqua di dove spiccavano . Secondo che nell' avvicinare il globo dell' arco conduttore all' acqua , questo giunto ad una certa

L I ij

(a) Molti usano di dare ugual numero di giri della rota per avere cariche uguali , ma questa regola , che qualche volta è giusta, per lo più la ri-

trovai fallace . Cambiandosi per lo stesso fregamento la forza del cristallo, e varie volte anche l' ambiente .

distanza cominciava a rilucere , e che lo accostava ancora per un certo tratto prima che spicasse la scintilla. Terzo che tenendo per qualche tempo il globo dell' arco conduttore alla distanza necessaria dall' acqua per osservare la luce , il quadro si scaricava silenziosamente , e scompariva la luce non si avea più alcuna scintilla.

Volendo misurare la distanza del globo dell' arco conduttore dall' acqua , in cui si vede la luce , e si scarica il quadro , replicai più volte questa esperienza, mettendo anche un appoggio alla mano per essere più sicuro di non muoverla e facendo presentare il chiaro tosto che osservava la luce , ritrovai che la distanza del suddetto globo dall' acqua era di quattro in cinque linee.

4.^a Vedendo che in questo modo d' esperimentare una parte della carica si potea disperdere inducendo i vapori dell' acqua in sentiero , e per essi portandosi all' arco conduttore, pensai di servirmi di tubi di vetro pieni d' acqua, ed otturarli da ambe le parti con turaccioli in parte metallici per avere una perfetta comunicazione coll' acqua, ed in tal modo tirare la scintilla dal metallo in contatto coll' acqua senza il menomo disperdimento della carica. A questo uopo ho preso un tubo di vetro lungo più di quattro piedi, e di un pollice e nove linee di diametro , ed avendogli adattati due turaccioli di sovero che chiudessero perfettamente, per questi feci passare due fili metallici , che ripiegandosi da una parte formavano un uncino fuori del turacciolo, e sporgendo dall' altra penetravano nell' acqua più d' un pollice. Indi caricato il quadro facendo comunicare l' uncino d' un turacciolo coll' armatura inferiore , e tenendo un estremo dell' arco conduttore fisso all' uncino dell' opposto turacciolo coll' altro estremo toccava l' armatura superiore del quadro obbligando in questa guisa la scarica a passare pel cilindro d' acqua contenuto nel tubo. A cariche uguali misurate sempre coll' elettrometro piccolissime, e rossiccie erano le scintille , che doveano passare per l' acqua; all' incontro fortissime quelle che tirava dal quadro secondo il metodo ordinario. Ed avendo sostituito il tavolino fulminante del *Beccaria* al quadro del *Franklin* per avere cariche più potenti, ritrovai che le scintille dell' acqua (con questo nome inten-

do le scintille che doveano passare per l' acqua) bucarono un solo pezzo di cartoncino, mentre le altre ne passavano otto, lasciandovi un foro patentissimo. In queste, e nelle altre simili sperienze il tubo di vetro era sempre sostenuto da un tavolino isolato.

5.^a Volendo provare sopra un cilindro d' acqua minore ho preso un tubo di vetro lungo quattro piedi, e di quattro in cinque linee di diametro, ed aggiustati i turaccioli come nella sperienza antecedente, ed empito d' acqua, provai a farne passare le scariche per esso facendo uso dello stesso tavolino fulminante, non ritrovai alcuna sensibile differenza nella forza delle scintille parendomi però, che in questo caso le scintille dell' acqua fossero alquanto maggiori, e vedendo che non passavano più d' un pezzo di cartoncino, mentre le altre ne passavano otto, cercai di determinarne la forza con pezzi di carta semplice da scrivere, e ritrovai che le scintille dell' acqua ne passavano due, e le altre venti. Ed avendo replicato l' esperienza col tubo d' un pollice, e nove linee di diametro, osservai che le scintille dell' acqua bucarono tre pezzi di carta, e le altre parimenti venti. In una simile sperienza mi sono anche servito d' un tubo di due linee di diametro, e lungo tre piedi con lo stesso successo della sperienza antecedente. Come pure ho provato di empire i tubi di vino, ma non osservai alcuna diversità nella deferenza di questi due fluidi.

Servendomi dei tubi di maggior diametro, ho a bell' arte lasciato entrare bollicelle d' aria per vedere se nel passaggio della scarica soffrivano qualche mutazione, ma non mi riuscì mai d' osservarvi la menoma variazione.

6.^a Essendo cosa notissima che la scarica si traduce fortissima traverso fiumi e laghi, ho voluto provare se mi riusciva di farla scorrere intera su la superficie di poca quantità d' acqua ristretta in un tubo. A questo oggetto ho empito soltanto per metà il tubo della sperienza 4.^a e disposta ogni cosa come nella stessa sperienza, provai a tirare le scintille, in cui non osservai alcuna differenza. Tolto un terzo dell' acqua, e ripiegati i fili metallici perchè s' immergessero nell' acqua, che non occupava più che un terzo del tubo, provai nuovamente a tirare le scintille nella maniera di sopra

stabilità; e mi parve che fossero alquanto maggiori delle altre, ma non ho potuto riconoscere alcuna differenza nella forza di bucare i pezzi di cartoncino.

Questa esperienza potrebbe al primo aspetto sembrare contraddittoria a tanti fatti della traduzione delle scariche traverso i fiumi; ma considerando alquanto la cosa, se non m'inganno, se ne può assegnare la ragione; la quale potrebbe essere che le scariche non passano pel corpo dell'acqua del fiume, ma portandosi alla superficie elevano una dose d'acqua in vapori (come osservai succedere nella esperienza 3.^a) i quali avendo maggiore capacità a proporzione che sono meno condensati, per essi liberamente scorrerà la scarica; la quale non poteva interamente tragittare pel tubo pieno a metà perchè le pareti del tubo impedivano che i vapori si rarefacessero abbastanza per acquistare la capacità di trasferirla. Non saprei se alla differenza che vi potesse essere nell'acqua, o all'ineguaglianza delle cariche, come mi pare più probabile, si debba riferire il diverso successo delle mie esperienze, e di quelle del Sig. *Bergmann*, il quale nello sperimento 2. (1) dice, che per un tubo barometrico lungo tre o quattro piedi, pieno d'acqua, e chiuso da ambe le parti con turaccioli di sovero, per cui passino fili metallici, che penetrino alquanto nell'acqua, la scarica d'una boccia o non vi passa o vi passa molto debole; quando io ho ottenuto una scarica scintillante per un tubo similmente apparecchiato lungo tre piedi, e di due linee di diametro (sper. 5.^a). Inoltre mi pare da considerarsi la maniera d'esprimersi, o non vi passa, o vi passa molto debole; poichè misurando il Sig. *Bergmann* la forza della scarica dalla sensazione della scossa nelle diverse articolazioni, e nel petto ecc. avrà detto, che non passava, quando l'uomo posto nel circolo della scarica non si lagnava d'alcun dolore nelle articolazioni, nel che è facile il prendere abbaglio, perchè passando la scarica a grande stento impiega un certo tempo a passare e le mutazioni che produce nel corpo dell'uomo sono troppo deboli per essere misurate dalla sensazione; onde avrebbe

(a) Opera citata pag. 122.

dovuto osservare se in minima distanza corpicciuoli leggerissimi si moveano per qualche tempo dall'uncino della boccia all'arco conduttore; ovvero ripetere lo sperimento al bujo per meglio distinguerne la luce all'estremo dell'arco conduttore portato in vicinanza dell'uncino della boccia. Il dire poi che certe volte vi passa molto debole, sembra manifestare che non si serviva sempre di cariche uguali. Dalla maniera di determinare la forza della scarica credo pure, che sia stato ingannato nello sperimento 3. (a) in cui dice, che se invece del tubo barometrico si adoperi un vaso che contenga molt'acqua, la scarica passa perfettamente, la qual cosa non mi riuscì mai di osservare di qualunque struttura ed ampiezza fossero i vasi.

Sperimenti sopra il ghiaccio.

1.° Ho preso due vasi uguali di rame larghi pollici $1\frac{1}{2}$ ed alti mezzo pollice; riempiuti d'acqua gli ho posti alla fera fuori della finestra; alla mattina il termometro secondo la graduazione di *Reaumur* segnava $5^{\circ}\frac{1}{2}$ circa sotto il zero, e l'acqua era tutto ghiaccio secco, in modo che passandovi sopra il dito non lo bagnava.

Posti questi vasi uno per volta sopra il quadro di *Franklin* tirai scintille ora dal ghiaccio, ora dal quadro per farne il paragone, avvertendo sempre d'aspettare a cavar la scintilla che l'elettrometro mi segnasse lo stesso grado d'elettricità.

Le scintille estratte dall'armatura del quale erano bianche, e poderose, all'incontro quelle cavate dal ghiaccio erano rossiccie e deboli.

Per misurarne la forza ho preso un cartoncino fino ben asciutto, e ne tagliai una quantità di pezzi uguali, indi aggiustati in modo, che uno si adattasse bene coll'altro, provai quanti ne poteva bucare la scintilla tirata dal quadro e quanti quella tirata dal ghiaccio, e ritrovai che la scin-

(a) Ivi pag. 114.

tilla tirata dal quadro ne bucava sette posti l'uno sopra l'altro, all'incontro ponendogli sopra il ghiaccio la scintilla non ne bucava più d'uno.

Replicai più giorni questo sperimento, ed ogni qual volta avea ghiaccio asciutto, l'esito fu consimile, colla differenza però che alcune fiate la scintilla del quadro non bucò di più di sei cartoncini, e la scintilla del ghiaccio ne bucò parimenti uno; ed un giorno che la scintilla estratta dal ghiaccio non bucava (almeno con foro visibile) il cartoncino, avendo sostituito fogli di carta comune da scrivere ben uniti insieme, ritrovai che la scintilla del ghiaccio ne bucò due, e l'altra dodici.

Essendomi succeduto d'ottenere ghiaccio poco fodo, e coperto d'un velo umido, le scintille che estraeva da questo erano alquanto maggiori; ed essendovi nel mezzo d'uno de' vasi una screpolatura nel ghiaccio, osservai che le scintille venivano più forti dalla screpolatura; anzi toccando il ghiaccio in poca distanza dall'apertura, le scintille venivano oblique, cioè uscivano dalla screpolatura, indi si portavano lambenti il ghiaccio al globo dell'arco conduttore.

Cercai di conoscere la differenza nell'estensione dell'atmosfera elettrica dell'armatura del quadro e del ghiaccio con un elettrometro di *Sauffur*, al quale in vece della punta metallica di due piedi, ho sostituito un filo metallico ricurvo in arco, per mezzo del quale esploro facilmente l'elettricità di vari corpi, ma credo per la poca elevazione ed ampiezza del ghiaccio le due atmosfere si confondevano.

2.° Per mezzo d'un cono di latta di tre pollici d'altezza e due di base mi procurai un cono di ghiaccio, che dovetti fondere alquanto tutto all'intorno per cavarlo intero dalla latta. Posto questo cono così bagnato sul quadro magico dall'apice ricavai diverse scintille molto forti; ma volendolo asciutto l'ho posto fuori della finestra sopra un disco metallico, ove il termometro segnava 5° sotto il zero, ed alla mattina essendo il termometro sotto i 6° lo ritirai nella camera ben asciutto; il termometro di paragone che tengo nella camera, in cui sperimento, era sotto i 4° sotto il zero. Posto il suddetto cono senza toccarlo sopra il quadro, provai a cavare delle scintille, che erano molto più deboli di

di quelle che ricavava il giorno antecedente, di modo che coloro, che assistevano a questo sperimento, non le giudicarono maggiori di $\frac{1}{4}$ di quelle, che avea dal quadro ugualmente carico. Ma volendole misurare col numero de' fogli di carta, che erano capaci di bucare le une e le altre, ritrovai che quelle estrate dal cono bucarono un pezzo di carta che attorniava il globo dell' arco conduttore, e le altre ne passavano ora cinque, ora sei.

3.^o Portatomi in sito ove si ritrovava ampia quantità di ghiaccio da riporsi in una ghiacciaja, ne ho scelto un pezzo maggiore d' un piede cubo, che era unitissimo e diafano come cristallo. Da questo pezzo per via di ferri roventi ne ricavai un prisma quadrangolare, che ben liscio e pulito con acqua calda era alto sei pollici, ed avea la base di tre pollici circa di diametro. Elevato questo prisma sopra un disco metallico lo situai fuori della finestra, alla mattina il termometro nel sito del prisma appena segnava 3° sotto il zero, e nella camera era quasi 2° sotto il zero. Posto il primo sopra il quadro magico tirai scintille ad uguali cariche e da questo e da quello. Le scintille del quadro erano vivacissime, e quelle tirate dalla sommità del prisma debolissime. Desiderando di determinarne la forza feci uso di varj pezzi uguali di cartoncino fino ben asciutto. Le scintille del quadro passavano cinque pezzi di cartoncino lasciando un foro patentissimo, e quelle estrate dal prisma non potevano bucarne un solo, che anzi tirandole traverso ad un pezzo venivano con iscroscio. Avendo sostituito pezzi di carta semplice al cartoncino, le scintille del prisma lasciavano un forellino piccolissimo passando per un solo pezzo, e quelle del quadro ne bucarono otto.

4.^o Riposto alla sera il prisma fuori della finestra sopra il suo disco metallico, alla mattina il termometro non era che al ghiaccio, e nella camera circa 1° più basso, ed il prisma era coperto d' un velo umido. Provai ad estrarne scintille nel modo solito, e le ritrovai alquanto più forti del giorno antecedente. Avendo col suddetto elettrometro (*sper.* 1.) esaminato le estensioni delle atmosfere elettriche, ritrovai che quella del quadro era assai forte alla distanza di nove pollici, e quella del prisma alla distanza di tre pollici e mezzo.

Alla sera posto di nuovo il prisma sopra il quadro ne tirai le scintille al bujo, e nello stesso istante che spiccava la scintilla dalla sommità del prisma, osservai una luce debole, che attorniava tutto il prisma sino alla metà dell' altezza in circa, e si elevava alquanto di più lungo gli angoli.

5.° Vedendo che a proporzione che il ghiaccio è più asciutto più piccole sono le scintille, ho voluto provare a cavarne dal cristallo umido; a tal uopo ho preso un bicchiere di cristallo alto tre pollici circa, e per coprirlo d'un velo umido l'ho immerso tutto nell'acqua, indi lasciata colare l'acqua soprabbondante lo situai sul quadro col fondo all' insù; e provando ad estrarre scintille essendo le cariche uguali erano più vive le scintille, che tirava dal fondo del bicchiere, di quelle che otteneva dalla sommità del prisma suddetto.

6.° Da un pezzo di ghiaccio simile al descritto nello sperimento 3.° mi procurai un prisma alto tre pollici circa colla base di due pollici di diametro. Indi postolo sopra un disco metallico fuori della finestra alla mattina quando lo ritirai per sperimentare il termometro all' esposizione del prisma era circa i 6° sotto il zero, e nella camera quasi ai 4°. Portato il disco col prisma sopra il quadro provai a tirare scintille da ambedue, avvertendo sempre, che le cariche fossero uguali. Fortissime erano le scintille cavate dal quadro, e molto deboli quelle estratte dalla sommità del prisma; e facendo uso de' soliti pezzi di cartoncino per determinarne la forza, ritrovai che le scintille tirate dalla sommità del prisma passavano un pezzo solo, e vi lasciavano un piccolissimo forellino; all' incontro quelle del quadro ne passavano sei, e facevano un buco assai ampio.

Da questi e da altri sperimenti consimili fatti sopra la deferenza del ghiaccio, sono portato a credere 1.° che se si potesse ottenere ghiaccio sodo affatto asciutto, si troverebbe coibente, e per tale si potrebbe usare. 2.° che non corrisponde ai fatti la regola stabilita dal Sig. Bergmann: *Non nisi quantitates magne explosionem transmittunt*; poichè dal paragone degli sperimenti 3.° e 6.° ne risulta piuttosto il contrario avendo trasmesso maggior parte della carica il prisma più piccolo, di quel che abbia trasmesso il prisma maggiore

del doppio; ed in vero se la deferenza del ghiaccio fosse nella sola ragione della grossezza, pare che il pezzo di ghiaccio usato dal Sig. *Bergmann* nello sperimento sesto (a) essendo lungo 15 largo 13 ed alto 8 pollici, avrebbe dovuto trasmettere tutta la scarica della boccia; l' *A.* però avverte, che l' avrebbe trasmessa intieramente se fosse stato maggiore, nel che non andiamo d' accordo, come siamo nell' affermare che l' acqua è più deferente del ghiaccio; (a) la quale maggiore coibenza del ghiaccio parmi anche manifesta dalla comparazione dello sperimento 4.^o con la sperienza 3.^a poichè tirando la scintilla dal ghiaccio si vedeva una luce fino alla metà dell' altezza di esso, il che dimostra una resistenza; all' opposto cavandola dall' acqua, non osservai mai alcuna luce, se non alla superficie dove spiccava la scintilla; nè in alcun' altra maniera mi riuscì di poter osservare la luce elettrica nel tragetto di questo fluido per l' acqua, al qual oggetto feci la seguente sperienza.

In un vaso di cristallo che contiene più di quattro libre d' acqua ne ho messo tanta quantità che la superficie rimanesse distante un pollice dall' orlo del vaso, indi posto questo sotto il conduttore, ad un uncino del medesimo ho appeso una verga metallica tutta coperta d' uno strato ben unito di cera lacca dello spessore d' una linea e mezzo tolti gli estremi, de' quali uno dovea ricevere l' elettricità del conduttore, e l' altro restava immerso nell' acqua alla distanza d' un pollice e mezzo dal fondo, e di circa quattro pollici dalla superficie; di poi presa un' altra verga metallica, la intonacai parimenti di cera lacca lasciando i soli estremi nudi. Quindi eccitata una forte elettricità nel conduttore, portai l' estremo della seconda verga metallica vicino all' estremo immerso nell' acqua della verga appesa al conduttore, anzi toccai più volte quell' estremo senza mai vedere alcuna luce sebbene affatto oscura fosse la camera. Tenendo la seconda verga per la cera lacca, mentre un estremo era

M m ij

(a) Opera citata pag. 116.

(a) Ivi pag. 117.

immerso nell'acqua, ricavava dall'altro estremo scintille non diverse di quelle, che tirava dal conduttore, e per vedere se nell'atto che estraeva una scintilla alle volte si fosse mostrata qualche luce nel passaggio del fuoco elettrico dall'estremo della verga appesa al conduttore, all'estremo dell'altra verga traverso all'acqua, per mezzo di cera molle applicata all'orlo del vaso, portai l'estremo della seconda verga alla distanza ora di quattro, ora di tre, ora di una sola linea dall'estremo dell'altra verga, e certe fiate più vicino ancora, indi faceva tirare le scintille dell'altro estremo osservando io attentissimamente, e secondo la mia usanza facendo anche osservare altri incapaci di prevenzione se mostravasi qualche luce nell'atto che tiravansi le scintille; nè ci fu mai possibile lo scoprire alcuna luce.

Usando olio in vece dell'acqua nello stesso sperimento, la luce dell'elettricità tragittante tra gli estremi delle due verghe è manifestissima. E siccome in questo liquido, come in ogni mezzo coibente, due pendoletti comunicanti col conduttore elettrizzato divengono, ho pure voluto provare se la coibenza dell'acqua era capace di procurare in essa qualche divergenza. A tal fine all'estremo inferiore della verga che appendeva al conduttore vi adattai due anelli di sottilissimo filo d'argento, ed a questi ho sospeso due pendoletti metallici perchè non galleggiassero, sostenuti da pezzetti dello stesso filo d'argento. Indi prima d'attuarli nell'acqua osservai che nell'aria divergevano benissimo. Allora sospesa di nuovo la verga al conduttore feci sì che i pendoletti venissero a rimanere immersi nell'acqua ad uguale distanza dal fondo, e dalla superficie; ed eccitata l'elettricità non mi fu mai possibile di conoscere in essi la menoma divergenza. Onde appare che la coibenza dell'acqua non è sufficiente ad opporre tanta resistenza al passaggio d'una modica quantità di fuoco elettrico da farlo risplendere nel suo tragitto, nè di procurare la divergenza de' pendoletti in essa immersi.

Nel fare queste sperienze si presentano varj fenomeni dello scorrimento del fuoco elettrico sopra i corpi coibenti, e delle modificazioni che sovr'essi prende: ma la descrizione e l'esame di queste osservazioni sono troppo lontani dal pre-

sente soggetto perchè possian quivi aver luogo, onde mi riferbo a trattarne altrove.

Sebbene però nella suddetta, ed in molte altre sperienze non abbia osservato alcuna luce del fuoco elettrico tragitante traverso all'acqua, tuttavia non dubito che facendo uso di cariche fortissime si possa benissimo osservare; ed in vero il *Priestley* che la osservò diverse volte avverte che è inutile intraprendere tali sperienze, se non si ha un' elettricità fortissima (a); la qual circostanza dimostra che l'acqua ha un grado di deferenza per cui trasmette una quantità di fuoco elettrico invisibile, ma che non è bastantemente deferente per trasmetterne qualunque grande quantità, comunque se ne accresca la copia. Ed avendo provato che l'acqua è più deferente del ghiaccio, come già scrissero *Franklin*, e *Bergmann* (b) contro il sentimento di *Priestley* (c), il quale dice che presso a poco il ghiaccio è tanto deferente quanto l'acqua; parmi che si potrebbe stabilire che la massima deferenza dell'acqua si ha quando questa è nello stato di vapori, i quali condensandosi perdono gran parte della loro capacità, come accade a tutti i corpi deferenti, scemmandoli il loro volume, e passando finalmente allo stato di ghiaccio si cangia in coibente, nè ritiene più della prima natura che in ragione che attorniata da particelle, le quali conservano lo stato primiero. Della quale mutazione abbiamo l'esempio del vetro, e di tanti altri corpi, i quali riscaldati ad un certo segno sono deferenti, e freddi sono coibenti; ma per giudicare con fondamento si ricercano ancora molte esperienze sull'acqua, sul ghiaccio, e sul passaggio dell'acqua d'uno stato all'altro, delle quali ne avrei già tentato una gran parte, se le mie circostanze me l'avessero permesso. La qual cosa mentre non posso per ora eseguire la vedrei molto volentieri esattamente adempita a vantaggio delle scienze.

M m iij

(a) Hist. de l'Electricité Tom. 3. pag. 394.

(b) Opere citate ed altrove.

(c) Ivi pag. 232.

GUARIGIONE MIRABILE

DI UN TISICO DISPERATO CON L'USO DELLA CICUTA

M E M O R I A

Del Sig. Dott. GIOVANNI VERARDO ZEVIANI.

Nec semper noxia est haec planta, imo salutifera quandoque deprehenditur. Geoffroy Mat. med.

IN un mio libro, che ha per titolo, *Dei morbi purulenti del corpo umano*, stampato la prima volta all'anno 1771, sta scritto così al capo decimo della prima parte; „ In casi „ difficili e disperati talvolta utilmente per bocca si prescri- „ vono i più potenti veleni, se fede si de' prestare alle as- „ serzioni degli scrittori, dai quali pur troppo spesso viene „ spacciata per verità la menzogna. „ E dopo al capo duodecimo della seconda parte. „ E riguardo ai rimedj inter- „ ni, se pur vere sono quelle guarigioni del cancro, che si „ millantano compiute felicemente con l'uso dell'estratto di „ cicuta, poichè non manca chi le revochi in dubbio ecc.“. A cader vengono queste diffidenze sopra alcune relazioni di *Antonio Storck*, il quale negli anni 1760, 1763, 1764, in speciali libretti riferì molte portentose cure operate in varj morbi con l'estratto di cicuta. Non ebbi io per mia parte veruna ragione di dubitare della verità e precisione delle osservazioni addotte dallo *Storck*: ma m'indusse in timore una lettera stampata di *Antonio de Haen*, contrariante alle asserzioni dello *Storck*. Ora essendomi ultimamente intravenuto di assicurarmi cogli occhi proprj della somma attività della cicuta in un caso disperato ed estremo, mi trovo in dovere di publicarne la storia, per restituire alla cicuta quella fama, di cui per le mie diffidenze fosse per ventura venuta meno. Anzi affinchè i più miserabili fra gl'infermi, ai quali sembra riservato dalla natura e prodotto questo soc-

corso, non restino di esso frodati, m' inoltrerò ad indagare d' onde mai avvenga che un rimedio, qualche volta efficacissimo, si trovi quasi sempre inutile in circostanze affatto simili di malattie. Non intendo io già con questo di far critica all' opera dello *Storchio*, nè di volerla emendare, ma di dare ad essa maggior risalto: a tenore appunto del desiderio del medesimo, il quale scrisse: *inquirantur rationes & cause cur in eodem morbo quandoque proficit cicuta, & radicaliter curet, & cur autem quandoque nil efficiat.* (a)

Un Mercatante, giovane d' anni 30, abitante nella piazza de' Signori, per occasione di una gonorrea virulenta mal curata, ebbe a lottare per il corso continuo di sei anni con varj morbi, contro de' quali inutilmente avea messo in pratica ogni sorte di rimedj mercuriali, purgativi violenti, decozioni de' legni e radici stibiate, ed altri specifici secreti creduti opportuni al suo bisogno. Era già abbandonato dal Medico, sotto la cura dell'esperto Chirurgo Sig. *Bevilacqua*, quando io la prima volta lo visitai, e fu sul finire dell' anno 1781. Giacea da due mesi nel letto in figura più di cadavero che di uomo, tanto era putido, sfigurato, piagato, confunto. I suoi mali visibili, oltre la febbre abituale, gli sputi marciosi, la diarrea, erano due esofossi, una al sincipite, l'altra alla spina dell'osso ilio: una fistola aperta sotto la cute dalle narici alla bocca: la caduta di un orlo della destra mascella superiore: esulcerazioni in bocca ed in gola. Tutto il collo davanti e nei lati offeso da glandole indurite: molte delle quali aperte in cancro a labbia roversa, ed una di esse aperta con fistola fin dentro alla trachea. Gli domandai che volesse da me con tanti mali, dopo tanti e sì forti rimedj inutilmente per tanto tempo ingollati, in una stagione nemica, con sì poco capitale di forze, di nutrizione e di vita. Mi rispose assai francamente: *o vincere, o morire.* Fu fortuna che in quei giorni io avea tra le mani l'opera dello *Storchio* su la cicuta, con il suo supplemento; dentro cui avea fresca memoria di aver letto i seguenti paragrafi: *Scrophulosos valde multos extracto cicutæ*

(a) *De Cicuta, libel. suppl. pag. 56.*

percuravi . (a) Scirrhus ingentes , annosos , dolentes circa parotides , sub axilla , in collo , in mammis ecc. solo cicuta usu interno externoque solvi , dissipavi . Ulcera saniosa , serpentina , cancroso , & ad omnia rebellia inde optime sanata , & fistulas profunde penetrantes , clausas saepius vidi . (b) Juvenis 19 annor. lue venerea pessime erat exculceratus per totum corpus : ossa utriusque tibiae erant profunde cariiosa . Remedia anti-venerea cujuscumque generis nocuerunt , & vires debilitatae sunt , & jam aderat summa macies ; mediocris cicuta dosi ad curandum hunc pertinacissimum venereum morbum suffecit (c) . Phthisin scrophularem sola cicuta & lacte saepius curavi (d) . Hac dosi per tres menses continuavimus , & hoc tempore omnes tumores sunt dissipati , & ulcera cicatrice obducta ; & sinus ac fistulae coaluerunt , rediitque collum totum ad statum naturalem (e) . Homo 29 ann. variis malis venereis per multos annos vexatus est , numquam autem integre curatus . Glandulae colli , inguinum , circa aures , sub axillis &c. demum intumuerunt , multumque dolorem die noctuque agro crearunt : tandem derelictus est penitus a suo Medico ordinario : suasi cicutam , & spatio duorum mensium erat curatus (f) . Cicuta reserat glandulas sublinguales , subaxillares , circa aures , in collo , sub axillis , in pectore &c. pulmonum scirrhus fundit , producitque sputum glutinosum , hinc tollit difficilem respirationem , sudorem nocturnum , tabem . (g) Tollit reliquias ex morbo venereo superstites , quae nulli alio remedio cedunt . (h) Fatto forte da queste espressioni e da questi fatti prescrissi all' infermo la cicuta . Premesso un purgante con manna cominciò a prendere cinque grani del suo estratto mattina e sera ; soprabbevendovi una decozione allungata di legno santo . Pochi giorni dopo niun effetto scorgendoli nè buono nè tristo , aumentai la dose ai dieci , e poi ai quindici grani due volte al giorno : frammettendo ogni settimana il purgante di prima . Passato il duodecimo giorno , gli scirri si fecero rubicondi , infiammati

(a) Lib. 2. pag. 233.
 (b) Lib. 2. pag. 236.
 (c) Lib. 2. pag. 172.
 (d) Lib. 2. pag. 182.

(e) Lib. 2. pag. 139.
 (f) Suppl. pag. 121.
 (g) Suppl. pag. 38.
 (h) Suppl. pag. 40.

infiammati e dolenti; le ulcere si ravvivarono e dilatarono, e cangiossi il loro atro icore in biancastro. Sino al ventesimo giorno crebbi a poco a poco la dose del rimedio: ed in quel tempo consumate appena otto dramme di estratto senza veruna sensibile operazione o molestia delle viscere interne, si sentì d'improvviso per tutto il corpo un noioso prurito, e singolarmente nelle esofisti, e ne' scirri d'intorno al collo: dentro ai quali diceva di sentire nuova vita, e come infinite punture di acute spine. Seguì imperterrito a prendere ogni giorno la stessa dose di cicuta: e fra il brevissimo spazio di altri otto giorni si videro del tutto scomparir i tumori; e le immonde ulcere e le fistole si nettarono e chiusero, e coprironsi di una soda e stabile cicatrice. E quel ch'è stupendo e sopra ogni credere, si trovarono abbassate nel tempo stesso le esofisti al cranio ed all'osso ilio: niun'altra molestia di morbo restando all'infermo, che il fastidioso prurito alla pelle. A moderar questo, ed insieme a rinutrire l'infermo, ho voluto che bevesse gran quantità di siero di latte: non ommettendo qualche lieve uso di cicuta per due o tre mesi. Con che ricuperò la pristina forma ed il natural vigore, in cui al dì d'oggi dopo sei anni si conserva e mantiene: pronto a mostrare a chiunque le impressioni alla cute delle antiche sue piaghe.

In questa storia si combinano per accidente fortunato molte circostanze insieme, per cui apparisce chiaramente essere provenuta la guarigione di quel male non per pura opera della natura, nè per virtù di altro medicamento, ma unicamente per virtù e forza della cicuta. Scirri, cancri, fistole, esofisti, spontaneamente in brevi giornate non sanano, ma ricercano diuturno uso di forti ed appropriati rimedj, e le più risolutive operazioni di Chirurgia. La stagione di fitto inverno s'opponesse alla maturazione e crisi de' morbi. Il morbo venereo non sana se stesso, come fanno gli altri morbi per la maggior parte; ma trascurato prende piede, e s'impadronisce tanto degli umori, che delle parti ferme del corpo. La estrema estenuazione dell'ammalato, e le perdute sue forze fanno vedere una natura che più non agisce, ma che è superata e vinta dal morbo. Il non aver esso per qualche mese prima della sua guarigione praticato verun rimedio nè

forte nè lieve, a cui si possa attribuire la sua guarigione, fanno vedere che alla sola cicuta si dee attribuire la felice forte di essere l' infermo scampato da tanti mali . I mali di questo infermo non erano per segni dedotti o argomentati, con lasciare però qualche dubbio della loro reale esistenza e natura: ma erano visibili e palpabili, e da tutti riconosciuti. La sua guarigione è certa, perchè l' uomo sussiste sano e vigoroso anche al dì d' oggi. Che manca qui a non dover credere effetto della cicuta questa portentosa guarigione? In vano si opporrà contro di questo un numero ben grande di altri somiglianti casi, dove la stessa cicuta si provò inutile, o ben anche dannosa; che per molti che siano non distruggeranno mai la verità di un solo, che riuscì. Questo modo di opporre fu indebitamente usato contro dello *Storchio* dall' *Hænio*; e si usa comunemente fra noi; onde l' uso medico della cicuta è omai bestemmiato e fuggito. Ma tutto all' opposto cercar conviene la ragione perchè la cicuta, in qualche caso così nobile e valoroso medicamento, in altri simili riesca disutile; per vedere se riuscisse mai d' incontrarla: alla quale per ventura potendosi opporre non restino frodati i più infelici e miserabili infermi di un sussidio per essi unico e solo.

La cicuta è un'erba umbellifera, che fiorisce nei mesi di giugno e di luglio, e dopo ancora. *Folia ejus, longis, crassius, cavis pedunculis appensu, plurifariam myrrhoidis modo in alas plurimas, tenues, atrovirentes divisa sunt. Culmus procerus, ferulaceus, glaber, levis, crassius, intus inanis, dilute virens, nonnullis tamen subrubentibus veluti serpentum maculis respersus, supra tres non raro cubitos assurgit. Umbellæ fastigia occupant. Candidi in his sunt flosculi. Semina postea anisi emula, aliquanto candidiora. Radix dodrantalis, quando caulem facit, cava est interius, prius autem solida. Odor est ingratus, fetidus.* Così la descrive il *Morisonio*, citato dallo *Storchio* (a). Ed il nostro *Seguieri*: *Cicuta flores in umbellam disponuntur. Unicuique radio insidet flos quinque petalis cordiformibus inflexis, inequalibus constans. Stamina juxta petala*

(a) Lib. I. pag. I.

apposita sunt, eaque apicibus instruuntur. Pistillum quod styli dispartit seminis receptaculo adhæret, idque deinde crescit in fructum fere globosum ex binis seminibus compositum, hinc gibbis & striatis, illinc vero planis. (a) Due specie di cicuta presso noi son comuni. Una minore cresce spontanea negli orti, confondesi col petroselinolo, ed è senza odore. L'altra maggiore si trova alle rive dei fossi, ed in luoghi umidi e palustri: mena un odore, stropicciandola, più o meno rincrescevole; e si trova per lo più macchiata, talvolta nel fusto, talvolta nelle foglie. Come di questa i fusti ed i gambi delle foglie sono maggiori, e più lunghi, e dentro vuoti, si servono di essi i pastorelli a fare de' zusoli. Quindi è che Virgilio organizzò la zampogna di quel pastore di canne di cicuta:

Est mihi disparibus septem compacta cicutis

Fistula (b);

onde errano i suoi Comentatori, e gli Autori del Vocabolario in dare doppio significato di cicuta, e di canna alla voce cicuta: quando in realtà anche presso Virgilio non ne ha che un solo.

Cresce la cicuta maggiore in molti siti del territorio nostro Veronese, e più frequente e rigogliosa, secondo notò il *Seguieri*, a Ponte Molino: luogo confinante col Ferrarese. Onde errò il *Lanzoni* ove disse in una lettera al *Mangeti*, che essa non trovasi ne' tratti del Ferrarese. (c)

Volgarmente è stimata la cicuta per un'erba venefica e micidiale. Vuolsi che di essa si servissero gli *Ateniesi* per dar morte ai rei, e che abbia una facoltà cotanto refrigerante, che vaglia in pochi istanti ad ammorzare la fiamma vitale. Quantunque non si possa negare in essa una qualche facoltà nemica dell'uomo, io stimo però che non sia tanto nocivo-le quanto comunemente si estima. Tutti si appellano al fatto di *Socrate* narrato da *Platone*, il quale si crede ucciso in prigione col velen di cicuta: per cui sotto gli occhi degli

N n ij

(a) Plant. Veron.

(b) Eclog. 2.

(c) In *Mang. Path. verb. Venenum*.

astanti a poco a poco intorpidito e agghiacciato morì. Altri aggiungono che *Demostene* e *Seneca* parimenti morirono dal velen di cicuta spontaneamente preso e ingollato. Ma *Platone* non disse mai che fosse di cicuta quel veleno di cui *Socrate* morì: nè competono le circostanze di prepararlo, narrate da *Platone*, ad un veleno vegetabile. Egli disse che fu trito e spezzato *τετριμμενον*, come se fosse salino o minerale. Teofrasto scrittor Greco antichissimo, più che dalla cicuta, ritrasse la forza micidiale in quel veleno dall'oppio, dall'aconito, e da altri ingredienti peggiori. (a) Il fine di *Demostene* è descritto da *Plutarco* in questi termini. “ Com' ebbe „ ciò detto, si ritirò nell' interno del tempio: e presa qui „ vi una tabella, quasi fosse per iscrivere, si mise la canna „ alla bocca, e morsicandola siccome solito era di fare quan- „ do appunto scriveva e meditava, la tenne così per qual- „ che tempo; indi tutto ricopertosi piegò la testa. Que' Sa- „ telliti però, che stavansi presso le porte, il deridevano „ come uomo timido, e chiamavano debile e molle. Ma „ *Archia* accostatosi egli lo esortava a pur levarsi, e ripetendo pure gli stessi parlari, prometteagli di bel nuovo che „ accomodata avrebbe ogni cosa con Antipatro. Allora sentendo *Demostene* che il veleno se gli andava insinuando e „ che ei ne veniva già superato, si discoperse, cadde a terra „ e sospirando morì. *Aristotele* racconta che egli succiò il veleno dalla canna, come si è detto „ (b). Non si fa qui menzione di cicuta: nè compete a questo veleno, qualunque sia, lo stare nascosto dentro una penna da scrivere. Del quale veleno in un loco parla Galeno di questa maniera: *si vero cicutæ exiguum quiddam sumatur, mortem homini nequaquam inferet* (c). Il fine di *Seneca* è descritto da *Tacito*: *Seneca interim durante tractu & lentitudine mortis, statim Annaeum diu sibi amicitiae fide & arte Medicinæ probatum, orat protusum pridem venenum, quo damnati publico Atheniensium judicio extinguerentur, promeret: allatumque hausit frustra, frigidis jam artibus, & clauso corpore adversum vim*

(a) *Hist. plant.* lib. 9. cap. 17.

(b) *Vite ecc.* tom. 4. pag. 118.

(c) *Simpl. Facul.* cap. 18.

veneni (a). Qui pur non si nomina velen di cicuta. Fu arbitrio colpevole del *Davanzati* il tradurre: “ *Seneca* stentando a morire, prega *Annes Stazio*, suo fedele amico e Medico, che gli porga certa cicuta, molto prima riposti. „ Ancorchè fosse cicuta, non prova questo fatto che sia forse veleno, perchè *Seneca* non ne morì. Non è credibile che i Magistrati di *Atene* usassero per dar morte ai rei di un veleno, se non innocente del tutto, almeno alquanto infecuro e dubbioso. Mi conferma in questa opinione il leggere in *Ippocrate* usata e lodata la cicuta per medicamento interno (b). Il leggerla entrare in molte composizioni di interni medicamenti ai tempi di *Galeno*: il vederla usata per bocca in polvere ed in estratto in questi ultimi tempi dal *Baule*, dal *Renealmo*, dallo *Storchio*, e da molti dopo di lui. *Galeno* stesso benchè offeso dal comune errore, non potè contenersi dal dire, che non nuoce la cicuta all'uomo, se non usata in grandi dosi: che una donna di *Atene* se la mangiava ghiottamente senza danno: che gli storni s'ingrassano con essa. E *Plinio* più di tutti irritato contro della cicuta, dovè pur confessare che alcuni se la mangiavano impunemente alla mensa: come in questo anno fu impunemente mangiata alla mensa inavvedutamente da un de' nostri, che l'avea nell'orto confusa con il petrofemolo.

Ma come sta che *Giacopo Vepfero* nel secolo passato ha dimostrata la forza venefica e micidiale della cicuta, in un speciale trattato, da tutti letto e riverito? Siamo pervenuti alla più forte e formidabile opposizione. Perchè full'autorità del *Vepfero* negli scrittori, che furon dappoi, si trova vieppìù bestemmata e temuta la cicuta di quanto era prima di lui. Ma io non peno a dire che gli scrittori per inavvedutezza si sono ingannati in credere che in quel libro il *Vepfero* parlasse della cicuta di cui si tratta; quando altra e diversa fu l'erba, della quale favellò il *Vepfero*, e di cui produsse argomenti di una gran forza di nuocere. Il *Rajo*

N n iij

(a) Ann. lib. 15.

(b) *De Nat. Muliebri.*

dice che il *Vepfero* parlò della cicutaria palustre del *Lobellio*, altrimenti detta *fellandrio*: ma il *Rajo* si è ingannato, come appare dal titolo del libro del *Vepfero*, ove dice si *de cicuta aquatica Gesneri*, la quale non al *fellandrio* corrisponde, ma al suo acquatico, *foliis multifidis longis & serratis*, del *Morisonio* (a). La questione adunque su la venefica forza della cicuta si rimane ancora indecisa dopo il libro del *Vepfero*; in cui non di essa, ma di altra pianta parlò. Non si risolverà questa questione, dice il *Seguieri*, perchè non si troverà il pazzo che ne voglia fare in se stesso lo sperimento: *vix tamen quempium esse puto, qui tam suspectum olus experiri velit* (b). Ma quel che è avvenuto dell' elleboro, stimato un tempo terribil veleno: *praeterea nobis veratrum est acre venenum* (c), che si sono trovati chi per diletto di studio hanno in se stessi voluto far prova della sua temuta forza fin da' tempi di *Plinio*, quando era più sospetto: *quondam terribile, postea tam promiscuum, ut plerique studiorum gratia ad pervidenda acrius, quae commentabantur, sepius sumptitaverint* (d): quel che è avvenuto dell' antimonio: “ L'antimonio, dice il Sig. *Azzoguidi*, che due secoli „ sono facea tanto ribrezzo, e di se medesimo così alta paura avea impresso, onde l' autorità suprema in molti Governi si dovette interessare a proibir l' esercizio della Professione a que' Medici, i quali lo avessero prescritto, e in „ Roma si videro uscire leggi severe, che la condanna di „ galera a color intimavano, i quali la polvere del Cornachino avessero praticata, al giorno d' oggi si riconosce per „ un minerale pieno di modestia e d' innocenza (e) „: quel che è avvenuto dell' argento vivo: *paulo tardius*, dice l' *Astruc*, *captum est mercurio uti ad interiora. Obstabat procul dubio antiquorum auctoritas, qui statuerant quasi ex tripode hydrargyrum potum vim pernitiālem habere, & interanea suo pondere perrodere. Sed demum facto periculo, ubi compertum fuit venteres in ea re falsos esse, mos sensim invaluit mercurium in-*

(a) V. *Seguieri*, Plant. Veron. tom. 2. pag. 8.

(b) *Ibi* pag. 6.

(c) *Lucret.*

(d) Nat. hist. lib. 25. cap. 5.

(e) *Specietia domestica* pag. 78.

rus fumendi multiplici forma (a) : lo stesso è avvenuto della cicuta , che *Antonio Storchio* medico in Vienna , per la dissensione degli autori ignorando quale e quanta fosse la forza venefica della cicuta , persuaso col *Redi* che chi vuol trovare la verità non bisogna cercarla a tavolino su i libri , ma bisogna vedere le cose cogli occhi propri ed esaminarle , volle ne' cani prima e poi in se stesso farne lo sperimento , affinchè a lui non fosse imputato quel famoso detto di *Plinio* : *discunt alieno periculo , & experimenta per mortes agunt*. Questo fatto è narrato dallo *Storchio* stesso in questi termini: *La me ipso experimentum feci . Mane & vesperi sumsi granum unum extracti cicutæ , & vasculum unum infusi theæ hausi desuper , tali dosi per octiduum continuavi , nec minimam inde molestiam sensi ... altera septimana auxi dosim , & vesperi duo grana deglutivi , neque inde quid mali aut insoliti in meo corpore ortum est ... Radix recens dum in taleolas scinditur , fundit lac quod gustu amarum & acre est . Hujus lactis unam alteramve guttulam lingue apice delibavi . Mox lingua facta est rigida , intumuit , valde doluit , & ego nec verbum loqui poteram . Radix exiccata , & in pulverem redacta , minus nociva est (b)* . Questi audaci sperimenti dello *Storchio* mettono in chiaro come nella radice della cicuta stia appiattato un liquore temibile e capace di nuocere , nel fusto e nelle foglie non tanto . Si rende quindi ragione di quanto dice *Plinio* che alcuni al suo tempo si cibavano alle mense del fusto della cicuta ; e si spiega come *Gasparo Barbino* , il *Cbirchero* , il *Mattioli* abbiano veduti tristi effetti della radice di cicuta mangiata in luogo di pastinaca . Stantechè i medicamenti , a differenza degli alimenti , perciò appunto sono medicamenti , perchè sono più o meno contrarj alla vita e natura dell' uomo , dovendo essi contrariare alle cagioni de' morbi , era da credere che una medicina accostantesi all' essere di veleno , dovesse avere in qualche bisogno una forza considerabile e maggiore dell' altre . Quindi è passato lo *Storchio* a far prova della cicuta negli uomini ammalati ; e

(a) De morb. ven. lib. 2. cap. 7.

(b) lib. 1. cap. 1.

non senza un dilettevole stupore , l' ha trovata valevole a scomporre e dileguare malattie ad ogni altra cura ostinate e ribelli .

Si è sempre creduto che operi la cicuta dentro del corpo umano con una forza al sommo refrigerante e stupefattiva : *Cicuta quod extreme refrigerantis facultatis , omnes norunt (a)*. *Cicuta , si quis liberalius utatur , non modo condensandi vim obtinet , sed & obtupefaciendi*, dice Galeno (b). Pietro d' Abano , detto il Conciliatore , ed il Cardano furono de' primi a dipartirsi da questa credenza : dichiarando anzi al contrario nella cicuta una facoltà di riscaldare e brugiare . L' opinione degli antichi provenne dal fatto di Socrate che veramente credevano avvelenato con la cicuta ; il quale morì torpido ed agghiacciato . Quindi alcuni antichi Monaci per istudio di castità vennero a far uso della cicuta , credendola capace di ammorzare il fuoco della libidine . Questa opinione però e questa pratica quantunque fondata su d' un falso supposito , non è da ripudiarsi assolutamente : avendo io veduto in due casi qualche specieltà che la conferma . Un Signore attempato avendo dovuto far lungo uso della cicuta per liberarsi di un tumore canceroso che avea da gran tempo lunghesso il naso e dentro le narici penetrante , avendo una volta per prova usato di un estratto di cicuta minore alquanto liquido ed incorporato con la polvere dell' erba seccata , provò ai genitali tale contrazione e così dolorosa , che se avesse continuato nel suo uso , farebbesi in fine perduta del tutto l' azione di quelle parti . Ed un giovane Munco nel tempo che a gran passi andavasi liberando con l' estratto di cicuta maggiore di una idropisia , succedutagli a scrofole e tumori del mesenterio , risentivasi così vive e dolorose contrazioni agl' inguini , in luogo de' genitali , per cui camminava curvo e rattrato . La cicuta d' ordinario non produce veruna sensibile evacuazione : non muove il secesso , non precipita le orine , non eccita il sudore , non promove lo sputo : non fa febbre , nè accresce , o conturba il giro del sangue . *Cicuta*

nec

(a) *Simpl. Fac.* lib. 7.

(b) *Simpl. Fac.* lib. 5. cap. 13.

nec majorem motum, nec in sanguinis circuitu turbam excitat, nec refrigerat, nec calefacit. In plurimis agris nullam excretionem sensibilibiter auget; notollo lo stesso Storchio (a). Per qual virtù adunque, per qual maniera opera essa i magnifici salutari effetti, che talvolta produce? In materia di valutare le ancor dubbie o sconosciute forze de' medicamenti, si corre a grave rischio di errare, chi volesse dedurle dall'odore, dal sapore, dal colore, da esterne marche o segni di essi. Nè tampoco dobbiamo fidarci degli esami da Chimico: sapendosi troppo come il fuoco altera e scambia i principj fondamentali de' vegetabili, sino a far comparire egualmente innocenti, egualmente venefici i più benigni e i più tristi. Qui ex sapore, odore, analogia, ratiocinando vires simplicium determinare ausing, oleum operamque & perdidere & perdent perpetuo. Examen chemicum ad id laudabile admodum est modo attendamus 1. partium vegetabilium naturam operationibus Chemicis saepe ita mutari, invertique, ut id quod tunc referant a Chemia potius quam a natura possidere videantur. 2. Carere Chemiam admiranda, neque ullo modo imitanda, tali Machina, qualis corpus animale, adeoque effectum medicamenti cum hujus, tum alius cujuscumque, analysi chemica vix leviter adumbrari: scrive così il dottissimo e sperimentatissimo Haenio (b). La sola storia fedele de' loro giovanimenti serve a determinare la loro forza. Ma non tutti gli uomini son capaci in quest'opera: bisogna avere occhi e pazienza per questo, e gran cognizione dell'essere e degli andamenti de' morbi, per non essere contento di uno o di due sperimenti, e per saper distinguere quelle molteplici circostanze che s'intromettono a frastornare gli effetti veri e propri de' medicamenti, ad alterarli, e ben anche a farli apparire per nulli. Per questa difficoltà inondano in Medicina le imperfette e false relazioni, ed è divenuta essa un teatro aperto di mille favole. La cicuta, quando è veleno, turba gli spiriti, ubbriaca e fa impazzare, morde e convelle le

Tomo IV.

O o

(a) Suppl. pag. 34. e seg.

(b) Rat. Med. tom. 10. pag. 6.

parti genitali e le affascina . Quando è medicamento, senza offendere lo stomaco e gl'intestini, passa a spezzare i tumori e li dilegua; s' interna a togliere la paralisi, e a diradare la cataratta degli occhi. Queste proprietà fanno conoscere un rimedio di somma agilità, sottigliezza, e penetrabilità: che velocemente passa dallo stomaco al sangue, ai vasi sierosi, e fin dentro i canaletti impercettibili dei nervi. Ma oltre a ciò il risolvere che fa i tumori mostra una doppia forza: distemperante cioè e risolvente degli umori glutinosi e addensati: irritante e solleticante le fibre e i nervi a rimetterli in giro . Con ciò valendo a superare morbi ad ogni altro rimedio resistenti, merita giustamente il titolo del principale fra i rimedj attenuanti e risolventi: *Cicuta extractum vim maximam resolvendi habet, & ibi saepe penetrat, & illuc pertingit, quo fortissima bucusque cognita remedia pervenire non potuerunt*. Così lo Storchio (a). S' inoltra egli a determinare nella cicuta anche una virtù modificativa dell' acrimonia, vedendo che essa vale a curare il cancro aperto, gli ulceri maligni, la tigna, la rogna, il vajuolo, il morbo gallico: *sanguinis acrimoniam emendat & morbos independentes tollit* (b). Ma io non sottoscrivo a questa sua opinione. Perciocchè sembra anzi all' opposto ch' essa operi in virtù di un' acrimonia comune a quasi tutti i veleni, per cui penetrati e disciolti gli umori, smosse e sollecitate le fibre, si tolgano le scirrofe durezza e le callosità, su cui poggia e sussiste il cancro, e le ulceri maligne si sostentano, onde quello e queste si curino. Si fa che gli esperti Chirurghi, dovendo saldare antiche piaghe, hanno per costume di nascondere fra i loro unguenti il piombo, l' arsenico, il mercurio, il rame, ed altri corrolivi e velenosi ingredienti, con cui corrodere la superficie e togliere le callosità impeditive di una salda e lodevole cicatrice. E parlando della tigna e della rogna, forse questi morbi riconoscono un principio organico vivente, che col veleno della cicuta si uccide: come giovano in questi morbi per la stessa ragione i zolforosi, i mer-

(a) Supl. pag. 35.

(b) Supl. pag. 39.

curiali, i brodi di vipera, e di lucertole. In certe particolari disposizioni di corpi produce la cicuta la diarrea, sollecita le urine, promove il sudore, non per altro al certo che per una sua sottile acrimonia speciale. Nel caso di sopra narrato a principio, produsse essa di mezzo inverno un prurito insossribile alla pelle, che si de' attribuire all'acrimonia della cicuta; leggendosi questo effetto di essa riferito da *Joete* e da altri: *Cicuta herba, semen, aut radix comesta, gravissima infert symptomata, vertiginem & oculorum caliginem, insaniam ac furorem, compressionem diaphragmatis, vehementem cutis pruritum, & animi anxietatem* (a). In simile maniera, non correggendo gl' incorreggibili umori venerico o vajuoloso, ma snidandoli dai luoghi ove sono appiattati, alle triste reliquie di questi morbi la cicuta pon fine.

Or donde avvien mai che un rimedio, cotanto attivo e forte, il più delle volte si sperimenti morto ed inoffizioso? Per quanto io ho potuto osservare, e meditando conghietturare, il disordine procede principalmente per colpa dello Speciale che erra nella scelta dell'erba e nel modo di prepararne l'estratto. Qualche volta per colpa del Medico, che non fa usarlo dove e come conviene. Qualche altra per colpa dell' ammalato che non obbedisce alle prescrizioni del Medico. Gli esperimenti spesso sono dubbiosi e non corrispondono, dice *Ippocrate* nel primo degli aforismi, perchè non basta che il Medico faccia il dover suo; ma lo devon fare anche l' ammalato, e gli assistenti; e le circostanze tutte devono unirsi e cooperare alla salute degl'infermi.

Alla cicuta somigliano altre piante, massimamente prima che alzino i loro fusti, con le quali dai meno periti confondesi. Se ne lavora quindi un estratto che non è di cicuta, e non ha le facoltà desiderate. Con essa, dicono gl'intendenti di Botanica, confondonsi la mirride, il dauco, la cicutaria, il cherefillo silvestre, il petrosेमоло. Il *Seguieri* rimprovera i nostri Speciali perchè in luogo della cicuta

O o ij

(a) Opera Medica Tom. 3. Sect. 2.

maggioro adoprano la ortense : stimando egli questa meno efficace di quella . *Apud Pharmacopolas Veronenses hæc nequaquam in usu est, sed species Petrofelino similis, cui Bauhinus in Pinace, minoris cicuta nomen indidit, quam in hortis colunt, cujusque vis minus efficax est (a)*. Ma questo scambio ho io veduto essere di poca o niuna rilevatezza, valendo un estratto di cicuta minore, quando sia poco cotto, ed incorporato con la polvere dell'erba secca, a produrre pauroli sintomi, proprj della cicuta maggioro.

Cresce ne' bassi luoghi palustri del nostro Baldo erbifero monte una pianta simile alla cicuta : la quale ha un fusto incavato grossissimo, grandissime e lunghissime foglie intagliate a guisa di cicuta maggioro, e solo da quelle di questa differenti in aspetto, in quantochè finiscono con la cima ad angolo più acuto e puntivo. Una figura di essa vedesi impressa nel libro del *Mattioli* sotto il nome di fesseli peloponense. Questa pianta cresce nell' orto botanico qui in Verona de' Cappuccini, e mostrasi da essi per la cicuta maggioro voluta dallo *Storchio*. Questa stessa vien portata in città dai botanici villani; e comprasi dagli Speciali per cicuta maggioro, e se ne lavora l'estratto. Non è dessa la cicuta dello *Storchio*, ma la cicutaria: di cui corre una ridicola questione presso i Botanici: se sia essa fetida o no; altri negandolo, altri affermandolo. Avendo io avuto comodo di esaminare questa pianta al confronto della cicuta vera, mi sono incontrato a conoscere in essa una proprietà fino ad ora non osservata, ed ho trovato facile il togliere la questione del suo putire. Non pute essa odorata superficialmente, nè men non fortemente stropicciata alle narici: ma se per traverso si taglia il suo gambo, o ben anche il gambo o nervo delle foglie, ne stilla visibilmente gran quantità di umore sommamente fetido e stomachevole. Questo suo odore ed il sapore insieme affatto rappresentano il sapore e l'odore della gomma sagapeno. Ignorasi ancora nella storia Farmaceutica da qual pianta il sagapeno provenga: *affertur ex Ægypto, & Persia, India orientali &c. ex inciso quodam fruti-*

(a) Plant. Veron. Tom. 2. pag. 6.

ce ferulaceo, nondum tamen Botanicis satis noto, extillare dicitur (a). Forse adunque dalla cicutaria il sagapeno proviene. Li caratteri di sopra addotti contrassegnaano abbastanza qual debba essere la cicuta da eleggersi a cavarne l'estratto desiderato dallo *Storchio*, ad esclusione dell'altre erbe che ad essa somigliano. Dove però è necessario avvertire, che non sono indispensabili i due caratteri voluti dallo *Storchio*: d'essere cioè macchiata, e d'esser fetida: *hinc paucis tantum nunc adnoto: meam cicutam esse cicutam majorem, vulgarem, maculatam, fetidam (b).* Stantechè non mutano questi la specie, trovandosi talvolta da uno stesso seme e da uno stesso ceppo, uscire cicuta macchiata e non macchiata: or in un sito lungheffo il gambo macchiata, or solamente nelle foglie; e così or più or meno fetente.

Non c'è ragione di credere che la cicuta di Vienna sia più forte ed atta della nostrale; che anzi presso di noi debb'essere più vigorosa la pianta, i quali siam posti in un clima meno freddo ed australe. Il nobile effetto ne' casi di sopra narrati fu prodotto dalla cicuta nostrale, cresciuta non lungi dalla città, nelle ville di Ronco e d'Isola della scala.

Il modo di preparare l'estratto di cicuta voluto dallo *Storchio* è: spremuto il succhio della pianta fiorente, cuocerlo a molle densità a fuoco lentissimo. *Cicuta ad extractum faciendum optime colligitur antequam pandantur flores. Radix autem ad extractum non adhibetur: Verum reliqua tota planta. Succus expressus in vase terreo, vitrato, lento igne, & saepius agitando coquitur ad spissi extracti consistentiam. Rogo autem ne Pharmacopaei sint solliciti in depurando hoc succo, amo enim potius, ut sit crassum, fere pulposum extractum (c).* Peccasi dagli *Speziali* ordinariamente in usare dell'erba ancor immatura; quando la sua virtù non è ancora dalla radice salita al gambo ed alle foglie. Peccasi in dar fuoco violento al succhio, onde più presto s'ispessisca e consolidi: così svaporane la parte volatile; e troppo attutite le particelle atti-

O o iij

(a) Cartheuser.

(b) Lib. 2. cap. 1.

(c) Lib. 2. cap. 1.

ve, riman l'estratto abbrustolito ed inutile. Per evitar questo, e per evitare ancora il dover tenere esposto al fuoco per molte ore il succhio, altro spediente non veggo, che dividerlo in molti vasselli d'ampia bocca, perchè seguan più presto la cercata evaporazione della superflua umidità. Questi ed altri cotali disordini per la parte degli Speciali sono avvertiti dallo stesso *Storchio* nel Supplemento a' suoi libri. *Extractum vero non ubique ad meam mentem paratur: sumunt enim succi expressi ingentem copiam: eam in vase cupreo igne satis forti coquunt; fator inde ingens longe lateque spargitur, avolat quod est optimum. Præterea nimis sollicitè succum & extractum purificant. Fit hac ratione massa nigricans, tenax, haud multum fetens. Mea autem methodo dum paratur, debet esse extractum crassum, ex fusco viridescens, & ingratissimum habens fetorem (qualem mures domestici spargunt). Quidam alias herbas cum cicuta miscuerunt. Quidam relinquunt herbam recentè collectam in uno cumulo per plures dies, unde flaccescit, & quedam pars corrumpitur, succus lentescit, fit mucilaginosus. Subinde succum expressum non illico igni admovent, sed per duos ternosque dies expectant, donec tempus ipsis commodum & opportunum videatur: fit tunc in succo alteratio, & virtus minuitur.*

*Miser & infelix Medicus, qui cum debilibus & corruptis naturis corporum curationes tentare debet, dice l'Offmanno, ma più misero ed infelice perchè sempre e dovunque deeli affidare dello Speciale; il quale se non è in colpa per dare agl' infermi rimedj dai prescritti diversi, non scelti ed ottimi, lo è il più delle volte nel modo di prepararli. Quanto avviene della cicuta, il di cui estratto qualche volta si trova avere una forza sorprendente e mirabile, quasi sempre debile ed inefficace si sperimenta, avviene d' altri medicamenti; dove risondesi la colpa al Medico, che non seppe adattarli e dirigerne l' uso. Non si può errare nella conoscenza e nella scelta della scilla marina; e pur toccò a vedere al *Quarino*, che l' estratto acquoso da essa tratto facea mirabile effetto tolto da una bottega, e niuno tolto da un' altra: accidit quandoque ut extractum scille acquosum, uno in pharmacopolio confectum nullam prorsus vim exereret, sed id ab alio pharmacopola petitum, eidem agro copiosam urinam cieret. Is,*

cum denuo ad priorem pharmacopœum rediret, vix quidquam lotii reddidit; ad alium vero denuo reversus, iterum copiosam urinam fudit (a). Lo stesso farà avvenuto all' *Azzoguidi* nell'usare delle sue pillole mercuriali; onde dopo di avere di esse parlato nella sua *Spizieria domestica*, così soggiunge: " Per ora avviso solamente altre due cose: una, si è il consigliare chi vorrà far uso delle pillole mercuriali a lavorarsele e prepararsele in casa da se: il rendere ragione di questo consiglio sarebbe imprudenza: l'avverlo taciuto avrebbe forse disonorato il rimedio, ed avvilito il decoro suo in moltissime circostanze ecc. „.

Quanto appartiene agli errori del Medico, prima di parlarne è da avvertire che sarebbe folle pretesa l'aspettare in ogni caso i nobili effetti che qualche volta la cicuta produce. Trattasi qui di morbi e per natura e per ogni arte di medicamenti insanabili: dove molto ottiensì col liberarne uno fra dieci infermi. E però, come dice *Galeno* ad altro proposito, *si prima experientia te fefellerit, non illico desperaveris*; nè alzar deonfi schiamazzi contro della cicuta. Se supera questa la forza di altri medicamenti, non tenta nè vince l'impossibile. *Actio pharmacorum in ipso corpore vivo nunquam absoluta, sed semper relativa est: & Medicus ea propter maximo semper studio allaborare debet, ut naturas individuorum ante medicaminum exhibitionem probe cognoscat*, dice il *Cartheusero* (b). Questa avvertenza, se è sempre necessaria, lo è massimamente per l'uso della cicuta. *Extractum cicutæ*, dice lo *Storckio*, *sufficienti quantitate pulveris foliorum cicutæ in massam pilularem subigatur: ex qua fiant pilule granorum duorum. A minima dosi semper incæpi, & sub initium mane & vesperi unicam solummodo pilulam exhibui, tertio quartove die dedi ter talem pilulam.* (c) Così si pratica al dì d'oggi ancora comunemente per l'orrore che si ha di un rimedio nuovo ed infame. Questa cautela era da condonarsi e lodarsi al principio: ma al dì d'oggi che per replicate prove di molti accreditati uomini siam fatti sicuri

(a) *Animad. prat.* pag. 134.
(c) *Lib. I. cap. I.*

(b) *Mat. med. sect. I. cap. I.*

dell'innocenza del rimedio prudentemente usato, il cominciare con sì scarsa dose è perder tempo inutilmente, con noia e fastidio degli ammalati. Io ho per costume cominciare la cura con grani dieci al giorno di simil rimedio, per accrescerlo di tratto in tratto secondo che viene dagli infermi tollerato. Dove sono meabili i canali, sottili e scorrevoli gli umori, suscettibili ed irritabili le fibre ed i nervi, fervidi i temperamenti, estiva la stagione, tenera la età, minori dosi vengono a bastare. Dove all'incontro prevalgono e sono antiche le ostruzioni, sono viscosi gli umori, torpide le fibre, insensibili i nervi, milensi i temperamenti, fredda la stagione, avanzata la età, una dose piccola è sempre inutile: si perde in essa il tempo, e si dà tempo al morbo di figgerli sempre più. Il tempo per cui è da continuare il rimedio non può fissarsi in tutte le persone, nè in tutt'i morbi eguale. Generalmente parlando, dove i tumori sono scirrofi, freddi, chiusi, follicolosi, o attaccati a sottile peduncolo, vi vogliono dei mesi prima che penetri in essi il rimedio, e lo risentano. Dove poggiano con largo piede, dove sono aperti in ulcere, e però atti a sentire immediatamente la forza della cicuta anche all'esterno applicata, in brevi settimane se ne compie la cura.

Non approvo io che le pillole siano formate di due soli grani di cicuta per cadauna. Importa moltissimo evitare che la cicuta non ispieghi la sua forza al ventricolo, dove potrebbe gravissimi mali eccitare. Divisa essa in piccolissime porzioni se ne moltiplica la superficie ed è più atta a spiegar la sua forza dentro lo stomaco. Per questa ragione stessa dappprincipio non voglio io che siano composte le pillole con la polvere di cicuta: riserbandomi a così fare quando desidero in essa un'attività maggiore e più forte del consueto; ma le compongo con la polvere di liquerizia.

Un altro errore commettefi comunemente, che molto ritarda ed impedisce l'azion libera del rimedio. Questo è il volere che sempre ed in gran quantità si beva il latte od il siero dopo prese le pillole di cicuta. Così si toglie od inferma la loro attività, involvendoli le punte acri della cicuta, e coprendosi le fibre dal troppo necessario risentire i suoi stimoli. Che importa cercar correttivi dove si desidera
un ri-

un rimedio fortissimo, e dove ogni danno si vuol evitare coll' adattarne la dose e scemarla, se ne risentano offesa gl' infermi? Lo stesso *Storchio*, benchè timido a principio della forza venefica della cicuta, ricorda dopo il suo uso non già il latte, ma una decozione di tè, o un brodo di vitello: *qualibet vice dum assumuntur pilula datur unum, alterumve vasculum infusi theæ, vel jusculi vitulini.* (a) Un' altra ragione di fuggire al più che si possa i latticinosi è quella che all' azion libera della cicuta ed alla sua penetrazione ne' minimi vassellini più interni osta che il corpo dell' infermo sia ben nutrito e grasso, a che porta l' uso del latte. Certo che nel nostro infermo giovò prestamente la cicuta, il quale era al sommo estenuato e magro: ond' è forse che ne' casi più estremi e disperati si è veduto aver giovato più spesso la cicuta: la quale quindi giustamente può dirsi rimedio dalla Provvidenza riserbato ai più bisognosi e miserabili infermi. Questa regola però non è universale: che in certe nature intollerabili di ogni minima dose di rimedio per troppa sensibilità di fibra, riman necessario accompagnarlo con i latticinosi, perchè si possa senza danno tollerare.

Di qui si elice un' altra mancanza del Medico, per cui vien impedita o frastornata l' azion della cicuta. Questa è di non preparare all' uso della medesima gl' infermi che sono ancora nutriti e pingui. Convien debilitarli ed estenuarli con spesse missioni di sangue, con replicati purgativi, con tenerli fissi in una dieta rigorosissima, privi affatto delle carni, e di ogni sostanziale vivanda, affinchè sian scorrevoli gli umori, ed aperti e meabili i canali alla libera azion della cicuta.

Dovendo la cicuta agire non come topico, ma come rimedio mosso dal giro comune degli umori, e dovendo per questo anche per la guarigione de' tumori esterni essere introdotta nelle vene, farà impedimento ai suoi effetti il trovare le prime strade imbarazzate di crasse materie indigeste, ed intonacata la interna superficie dello stomaco e degl' in-

Tomo IV.

P p .

(a) Lib. 1. cap. 1.

testini di tarde vischiosità ritardanti l'ingresso suo ne' vasi lattei. Saranno quindi anche per questa ragione necessarj i purgativi, premessi e frammessi all'uso della cicuta.

Che se per qualche scirrosità fosse il piloro ristretto ed ostrutto, dovressi allora molto cautamente procedere con la cicuta: la quale troppo fermandosi in su lo stomaco per non poter penetrare agl' intestini può in esso nuocere ed incancherire quel scirro che per essa si vuol togliere. Il Sig. *Gaspari* ed io poco fa fummo chiamati alla cura di un Cavaliere che aveva un' angustia al piloro, sospettata da noi dalla inappetenza, e dal rigurgito degli alimenti. Ordinammo l'uso dell' estratto di cicuta, che fu continuato per alcuni giorni. Crebbero i mali dello stomaco, s' accese la febbre, rigettò materie nere e morì. Apertone il cadavere trovammo una porzione del ventricolo verso il piloro ostrutta e scirrofa, e dentro corrosa ed incancherita. In questi casi non so per qual ragione in questi ultimi anni frequentissimi, crederei che fosse più cauto l' introdurre la cicuta per crestiero, affinchè entrata per di là nelle vene potesse agire per via di circolo, non come topico, contro dello scirro dello stomaco. Non ostante però anche dalla cicuta internamente presa in pillole di pochissimo volume, si sono qui veduti in queste ostruzioni di piloro, se non delle perfette, sussistenti guarigioni, de' miglioramenti almeno, bastanti a sostenere la vita.

Impedimento all' ingresso della cicuta farà per anche la presenza della diarrea per qual si voglia cagione nata: perchè questa sottrae il rimedio dall' entrar nelle vene, anzi tempo portandolo fuori dal secesso.

Adoprasi la cicuta, e vien raccomandata dallo *Storchio* massimamente per lo scirro e cancro delle mammelle delle donne; morbo ribelle e frequentissimo ad accadere. Qualche volta riesce la cura: quasi sempre si prova del tutto inutile se non dannosa. Una ragione fortissima di questa varietà di successo in un medesimo male, non osservata dagli Autori, emmi riuscito di conoscere in pratica. Ho trovato che il più delle volte i tumori delle mammelle diuturni o scirrofi sono figliuoli del tumore e dello scirro dell' utero; da cui come figli da' padri derivano, e per cui si sostentano. Ra-

gion di ciò troverassi in quel massimo consentimento per via di nervi, che passa fra l'utero, e le mammelle, onde una parte risente le affezioni dell'altra. Qui in vano adoprafi la cicuta contro dello scirro delle mammelle, di cui vien sostenuta la fermezza dalla sua perenne sussistente causa dentro dell'utero. Si opporrà che la cicuta in un tempo stesso che opera la guarigione delle mammelle, opera ancora la risoluzione del tumore dell'utero; mentre essa, come si è detto, agisce ed opera per la via del circolo comun degli umori. L'opposizione varrebbe in altre circostanze di tumori: non vale al proposito nostro. L'utero scirroso quasi sempre è scirroso per essere abbassato e strozzato nella vagina. Non vale a risolverne il tumore qualunque forza medicamentosa finchè non sia esso alzato e messo e ritenuto in libertà al suo naturale sito. Si fa qui dunque un circolo vizioso di male da non toglierfi mai, se non estirpatane la radice. E sarà sempre vana ogni cura diretta al tumor delle mammelle, se con l'opera chirurgica, e con opportuni sostentacoli e fasciature non sia riposto l'utero e fermato al suo loco.

Noi vediamo in un male antico e disperato, ed all'estremo ridotto, per virtù della cicuta compita la guarigione nel fitto inverno, e nel breve tempo di un mese, con dosi di rimedio ancora scarse e non inoltrate. Questo è un misterio che fa trasecolare, essendo noto che *tempus frigidum ineptum est ad perfectas solutiones morborum*. Bisogna attendere con reiterate osservazioni pratiche, se per ventura le malattie, che con questo rimedio si curano, ricerchino più tosto il verno che la state per essere curate. Chi fa che in tempo di state essendo troppo aperti e meabili i minimi canali sanguigni, e più aperta e facile la via al sudore, non venga dispersa la virtù del rimedio, e fuori trasportata; quando nell'inverno è più interna e raccolta l'azion sua e ritenuta nel corpo?

E' riuscita a noi felicemente e prestamente la cura per l'uso semplicemente interno della cicuta. Sembra che ajutata dall'esterna applicazione dell'erba bollita e cotta farebbe riuscita ancor meglio e più presto. Veggasi bene se qui pure, dove ad ogni ragione appare un ajuto alla forza interna del rimedio, in fatto poi stia anzi un impedimento al

suo operare. In questa estrinseca applicazione di rimedio due cose occorrono da considerarsi: l'umidità naturale dell'acqua, ed il calore attuale che acquista col fuoco. Può ostare la umidità, rilasciando troppo e fiaccando le fibre, che col rimedio si vogliono eccitate ed irritate al moto contro degli umori stagnanti. Può ostare il calore, figgendo sempre più e addensando l'umore ostrutto inzeppato. Usandosi qui dalle nostre donne applicare alle mammelle dopo il parto affidui caldi fomenti per sciogliere le concrezioni del latte, quante volte ho veduto io tutto all'opposito seguirne da tal uso pessimi incagliamenti dello stesso latte, da doverli levare con moleste operazioni chirurgicali!

Quanto agl'infermi, molti esser possono per difetto e colpa di essi gli ostacoli all'uso, ed al buono riuscimento della cicuta. Questi dallo *Storchio* son compresi generalmente sotto il nome di idiosincrasia. *Sunt qui ex assumptis lapidibus cancrorum, qui certo remedium sunt innocentissimum, anguntur, vomunt, febre corripiuntur, incidunt in animi deliquia; cur non & esse possent, qui ex latente causa, a cicuta male haberent? Novimus enim quam miræ & diversæ sint hominum idiosyncrasie; hinc possent quidem esse qui remedium minus ferrent (a).* Significa questo vocabolo le particolari segrete costituzioni e temperature degli individui. Questa idiosincrasia secondo *Galeno* è ineffabile, e appena può acquistarsene la cognizione con lungo ed intensissimo studio: *ipsam vero, ut iidem vocant, idiosyncrasiam, idest corporum proprietatem, in qua singula eorum pollere sunt visa, nec dignoscere nec meminisse possunt (b).* Il contentarsi di addurre l'idiosincrasia per ragione che la cicuta or giovi, or sia inutile, or noccia, è un metter argine alle utili e necessarie ricerche delle cagioni vere e reali di questi differenti risultati; per cui forse una volta si verrà, conosciutele, a togliere ogni impedimento al buono e felice uso del rimedio. L'idiosincrasia è un fantasma e un puro nome, che non ha essenza nè potere veruno: bisogna discendere a rintracciare le cagio-

(a) Suppl. p. 59.

(b) Meth. med. cit. 3. cap. 2.

ni vere e reali delle cose , per norma del nostro operare . *Nihil est minus philosophi , quam admirari , & consensescere in admiratione* , disse un Filosofo . E Cicerone : *causam investigato in re nova & admirabili si potes ; si nullam reperies , illud pro certo habeto , nihil fieri potuisse sine causa* . Per cagion di esempio farà da esaminarli se possa fare ostacolo all' azion della cicuta una costituzione naturale di fibra lassa e fievole , che non si risente nè si rialza contro degli stimoli del medicamento . Al contrario può nuocere una costituzion di fibra tesa e forte , che si raggrinza ad ogni lieve stimolo e chiude le vie al medicamento di penetrare ne' vasellini minuti . Poco però per quanto io penso si dee attribuire a queste cause , che non sono difetti di natura , ma diversità di temperamenti : ed ognuno si trova sano e bene sotto il suo proprio temperamento ; nè si possono senza pericolo cangiare i temperamenti , se pur l' arte questo valesse a fare stabilmente . Più tosto per la medesima teoria sarà meglio il dire , che un nervo addolorato , infiammato , offeso , per passioni di animo massimamente , come più spesso accade nelle femmine , divenga mobile , più sensitivo , intollerante degli stimoli della cicuta . O al contrario che un nervo torpido e paralitico per ostruzioni o pressioni ne' tronchi maggiori o nella sua origine , poco o nulla sia atto a rialzarsi contro degli stimoli della cicuta . Parlando degli umori , una scialiva troppo acida , i sughi digestivi troppo stessamente acetosi , possono troppo attemperare , o struggere la forza della cicuta , se è vero che essa operi con particelle putride e alcaliche . Un sangue pigro e pieno di vischiose ed olioze parti stessamente involve e ritiene , qualunque sieno le particelle attive della cicuta . Un sangue troppo denso non riceve in se facilmente esse particelle , nè le distribuisce ne' vaselli minori . Un sangue acrimonioso e dis temperato può rendere troppo viva l' azione della cicuta , e facile la emoragia . Questi generi di vizj e d' impedimenti che d' ordinario si trovano a frastornare e diversificare in varj tempi ed in varj soggetti le virtù degli altri medicamenti , si possono in qualche maniera togliere od emendare , con far precedere purgativi e salassi all' uso della cicuta in una spessezza e tardanza di umori , con accompagnarla con assorbenti dove pecca l' acidi-

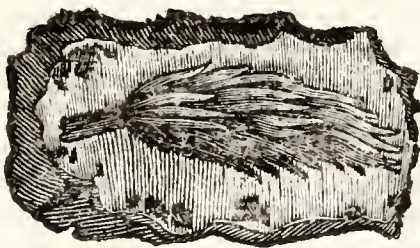
tà, con latticinosi dov'è spiegata e nota la loro acrimonia alcalina: con sedare gli spasmi con blandi oppiati: che alle paralisi e torpore di nervi essa cicuta vale, accresciutane la dose, o la sua forza con la giunta della polvere dell'erba seccata.

Altri ostacoli sono non per colpa di natura, ma per pura colpa degl'infermi intolleranti e sciocchi. Per l'azion libera della cicuta ricercansi sottili gli umori, e facilmente meabili i canali. Quindi è necessaria nel tempo che si mette in pratica una rigorosissima dieta di tenue e scarso alimento. A questa come nota *Ippocrate* rade volte si attengono lungamente gl'infermi: *agroti morbo quidem gravati, cibus vero vacui, & que morbo grata sunt potius eligunt, quam que ad sanitatem conferunt; mori quidem non amantes, sed tolerare non potentes* (a). Altri degl'infermi per riverenza di un Medico o accreditato o amico che non vogliono contristare, dicono di prendere il rimedio prescritto, che in verità poi gettano via, o per delicatezza soverchia di stomaco, o per le genti vicine che susurrano contro di quello. Altri insensati questo fanno per farsi beffe del Medico, che poco stimano, non pensando che non a lui, ma a se stessi recano il danno. Altri plebei stimano che il Medico a piccole dosi di rimedio si attenga per prolungare il morbo e trarne maggior guadagno; onde senza sua saputa raddoppiano le dosi col consiglio dello Spiziale, con loro periglio ignorando che in Medicina non vale la regola del tre, come dice il *Redi*, mentre se due giovano, quattro possono nuocere. Per questi ed altri disordini che par vergogna numerare, eppure sono frequentissimi, resta frustraneo e ben anche dannoso l'uso della cicuta. Dove senza sua colpa perde questa il suo credito anche appresso del Medico che la prescrive: e contro il vero crescono nella Medicina pratica le storie dell'infelice suo riuscimento.

Del resto, come è avvenuto del mercurio, e della china-china, non ci vorrà meno di un secolo prima che a forza di osservazioni e di opposizioni si venga a metter in chiaro

(a) *De Arte*.

il miglior metodo di usare di questo rimedio nei bisogni particolari e molteplici degl' infermi, e di conoscere gl' impedimenti tutti che si frappongono al suo operare. Resta ancora a fare de' tentativi sull' uso che si può fare della polvere della cicuta, e della sua radice, o del succhio di recente espresso, per averne un rimedio ancor più efficace dell' estratto sino ad ora usato. Resta a vedere qual forza abbiano i semi, e l' olio da essi' estratto, o la emulsione: i quali forse potranno essere tollerati dalle persone più sensitive e delicate. Resta a vedere se applicata la cicuta alla pelle, o dentro introdotta per crestiere agiovar venga del pari, quando non è cauto e permello introdurla per bocca. Resta infine a vedere se giovi unire ad essa il mercurio, o l' oppio o altro ingrediente per ajutare, o scemare la sua forza, e farsi incontro con altri ajuti agli speciali bisogni delle varie infermità. Ma per la storia che sino al dì d' oggi dopo venti anni abbiamo de' giovamenti o danni prodotti per essa, merita certamente che siano fatte prove ulteriori del suo valore: che è quanto appunto per conchiuisione della sua opera desidera lo *Storchio: ex his patet dignum esse, ut cum cicuta fiant experimenta.*



DELLA SUPPOSTA EGUAGLIANZA

*di contraria elettricità nelle due opposte facce del vetro,
o di uno strato resistente per ispiegare la scarica,
o scossa della boccia di Leyden.*

(Franklin. Opp. Vol. I. Lett. 4.)

Del P. CARLO BARLETTI Professore di Fisica Generale
Sperimentale nella Università di Pavia.

Questo cardinale principio della Frankliniana ipotesi adottato senza verun fondamento ha la singolarità di sembrare immediatamente contrario al bel primo aspetto di una boccia, o d' un quadro, che comincia a caricarsi; poichè le opposte facce al primo afflusso di elettricità presentano subito ambedue insieme omologa elettricità, cioè della sola specie, che s' induce per far la carica. Ha di più l' altra singolarità di sembrar contrario anche all' ultimo aspetto della carica elettrica, che è lo scoppio; poichè, come acutamente osservò il celebre Cigna (*Miscellan. Taurinens. Tom. 5.*) se fosse come si pretende perfetta l' eguaglianza delle due elettricità, resterebbero perciò queste fra di loro in perfetto equilibrio; nè vi farebbe più modo, nè ragione, onde far partire la scarica. Sarebbero nella loro contrarietà nelle stesse condizioni, che dominano nel supposto universale equilibrio. E se qualunque porzione d' una specie di elettricità partisse da una faccia, mentre l' altra deve già essere, e non può far di meno in vigor della supposta legge di non essere eguale, questa non avrebbe giammai adito nell' opposta faccia, e così non avrebbe più luogo il supposto circolo di restituzione.

Quantunque però sembri questo Frankliniano principio direttamente opposto al primo fino all' ultimo termine del fenomeno, che si vuole spiegare, qualora con qualche attenzione, e distinzione si consideri; ciò non ostante come fu da prin-

da principio imbevuto confusamente, e involto nelle maraviglie della novità di quel sorprendente fenomeno, così continua tuttavia a ripeterli, e si ripeterà ancora per molti anni e come rigorosamente vero, e come idoneo a renderne adeguata ragione. Tanta è la forza dell' uso negli uomini, e tanta la perversità de' giudizj di prevenzione.

Può ciascuno convincersi della palpabile falsità di quel principio cimentandone l' effetto sopra un grosso strato resistente per esempio di zolfo, alto uno, o due pollici. Vedrà sulla faccia superiore imprimersi o collo strofinamento, o con afflusso notabile elettricità scintillante, e scuotente, senza che mai l' eguale, e talvolta neppure la menoma parte di contraria si manifesti nell' opposta faccia.

Chi tratta di elettriche materie con qualche uso di attenzione non può a meno di non aver avuto sottocchio nella notissima macchina a disco una perpetua, e costante prova della elettricità omologa tanto di una, come dell' altra specie, che si eccita, e si raccoglie nello stesso tempo dalle due opposte facce d' uno stesso cristallo.

Era necessaria conseguenza del *Frankliniano* principio, che una boccia, o un quadro armato sottoposto ad un altro simile nell' atto, che si carica, dovesse contrarre forza di carica elettrica eguale a quel primo. Indi *Franklin* propose una specie di elettrica batteria con una serie di quadri, che si caricassero nell'atto stesso, con cui si caricherebbe un solo (*Franklin Vol. I. Lette. 4. n. 10. e 18.*). Idea arbitrariamente ricavata piuttosto da quell' ipotetico principio, che dai tentativi, che ne fece imperfettissimi, in realtà però non mai praticata, nè praticabile. Mentre in siffatta serie di quadri, o di bocce, siccome io ho trovato per esperimento, si riconosce manifestamente in ciascuno inferiore la successiva diminuzione di carica; e ad altro non serve simile batteria, che a rendere evidentissima l' illusione, dalla quale essa prese nascimento.

Dai residui della elettricità dopo la scarica di grandi quadri, i quali residui sono sempre della specie stessa di elettricità, onde il quadro fu caricato, dedusse il celebre *Epino* (*Æpini Tentam. Theor. electr. & magnet.*) la falsità di quel principio; e conchiuse evidentemente, che l' eccesso di elet-

306 DELLA SUPPOSTA EGUAGLIANZA
tricità è sempre in quella faccia, e di quella specie stessa; onde s' induce la carica.

Chiamai io questo eccesso *elettricità dominante*, e ne feci qualche utile applicazione ne' miei *Dubbj*, e *penfieri sulla Teoria degli elettrici fenomeni*. Sono ora in grado di provare direttamente con esperimentale induzione con quanta verità s'introduca quel nome di *elettricità dominante*, e con quanta sicurezza sia applicato ai fenomeni, che da questa derivano. Nelle serie di sperienze sulle punte elettriche, le quali mi hanno fatto passar per mano più migliaja di cariche, e scoppij elettrici di ogni specie, e forza, mi era dolce il contemplar di passaggio la costanza di que' movimenti elegantissimi, che io sulle tracce del celebre *Richmann* dichiarai nella precipitata mia opera.

Ma fui più dolcemente sorpreso, quando distinsi in que' modi nuovi fenomeni, che nè *Richmann*, nè io avevamo giammai notati. Restando adunque nel quadro elettrico verticale, che sia carico, e isolato da ambe le facce, vibrati, e tesi que' pendolini annessi alle stesse armature, l'angolo della loro divergenza col piano del quadro non è mai in ambedue eguale, ma è sempre invariabilmente maggiore in quel pendolino, che appartiene alla faccia del quadro, che fu caricata. Che se tanto a *Richmann*, come a me sfuggì questa particolarità, non è per difetto di esattezza nell' osservare, ma piuttosto perchè adoperando semplici fili senza quel globetto, che li rende meno mobili, e meno insieme atti a disperdere l' elettricità, onde sono vibrati, non vi è realmente, che pochissima, o niuna differenza nella divergenza loro (*a*). Tanto è vero, che la soverchia mobilità,

(*a*) Dimostrai nella mia seconda Lettera dei *Dubbj*, e *penfieri* ecc., che l'angolo di ripulsione è proporzionale alla quantità di elettricità omologa nel corno ripulso. Ora quel filo senza il globetto in fondo si carica continuamente nell'aria di quella maggior porzione, che spinge in esso la faccia caricata, e perciò non fa maggior angolo dell'altro vibrato da minore elettricità, la quale non è simil-

mente scaricata nell'aria. Onde benchè ineguali sieno le elettricità vibranti, restano però eguali quelle dei fili vibrati, e quindi eguali sono gli angoli di ripulsione. All'opposto coi globetti aggiunti ciascun pendolino ritiene l'intera elettricità, che riceve dalla vicina armatura, e dimostra ingenuamente colla sua maggior divergenza quella elettricità, che è maggiore.

o sensibilità, se così piace chiamarla, degli stromenti, quando non è contemperata colle forze, che si vogliono esplorare, turba talvolta, e perfino trasforma l'ingenuità de' fenomeni.

Ora questa inalterabile costanza di maggior vibrazione nel filo annesso alla faccia del quadro caricata non meno di vitrea, che di resinosa elettricità in tutti i gradi della carica elettrica, è la più solenne testimonianza della elettricità dominante, che ho proposto di stabilire.

Per vie più convincermi, che quella prima apparenza di eguale divergenza ne' fili all'uso di *Richmann* nasce veramente dalla più pronta, e facile dispersione della elettricità, che è in se stessa maggiore, ripetei quella parte dell'esperimento, in cui stando que' fili egualmente vibrati, si tocca col dito una delle armature, e si vede in tal atto pendere senza alcuna vibrazione il filo, che corrisponde all'armatura toccata, e l'altro all'opposto si vibra in quel momento ad angolo doppio di prima. Succede è vero nell'istante questa maggior vibrazione. Ma se persistete col dito a toccar l'armatura, ben tosto ricade quel filo a minor divergenza, come prima. Segno evidente, che quella maggiore elettricità, da cui sull'istante fu spinto, non si mantiene; che anzi si disperde assai prontamente. Il che non succede quando all'uso mio sta in fondo dei fili quel globetto, che nella precedente preparazione descrissi (a).

E qui pure inaspettati fenomeni trovai, che più efficacemente attestano la dominante elettricità della faccia, in cui s'induce la carica. Ritirando il dito dal premesso contatto d'una armatura, ricade vie più l'opposto filo, e comincia questo, che pendeva inerte, a rialzarsi, come esige l'esperimento di *Richmann*. Ora esperimentando all'uso mio coi globetti in fondo di que' fili mi occorsero delle notabili dif-

Q q ij

(a) Concordano con queste riflessioni que' fenomeni di ripulsione, che descrissi nella sopraccitata lettera, nella quale colla sola unione d'una punterella metallica disperdente al globet-

to del pendolo, si riducono quelle ripulsioni a termini incredibilmente più corti, che non quando era il globetto solo senza quella punterella disperdente.

ferenze da *Richmann* non osservate; e non mi fermai finchè non ne ebbi rintracciate le vere leggi.

Consistono le differenze I. nel toccare piuttosto l'armatura, per cui fu caricato il quadro, che l'opposta. II. e similmente nel ritirare il dito da quella piuttosto, che da questa armatura toccata.

Nè altre sono le vere leggi, che a queste differenze corrispondono, se non le seguenti.

LEGGE PRIMA.

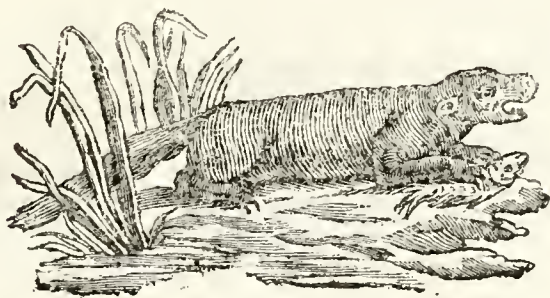
Se si tocca l'armatura, per cui fu impressa la carica, il filo teso dell'opposta armatura diverge bensì di più, che non prima di quell'atto; ma questa divergenza non è mai tanta, quanta lo è assai di più nell'armatura prima, in cui fu impressa la carica, quando invece di toccar questa si tocca piuttosto col dito l'opposta armatura. Onde si può certamente riconoscere quale sia stata l'armatura, per cui nel quadro fu impressa la carica, dal maggior angolo della divergenza accresciuta nell'opposta armatura, mentre l'una e l'altra si tocca alternamente col dito. Ed è questo un nuovo criterio, che rende vie più perfetta l'elettrica teoria.

LEGGE SECONDA.

Similmente ritirato il dito nel primo caso, quando si toccò l'armatura per cui fu impressa la carica, il pendolino dell'opposta armatura ricade quasi verticale lungo la stessa, nè più comincia a rialzarsi, finchè quello dell'armatura toccata non è risalito prima, e notabilmente di più. All'opposto ritirato il dito nel secondo caso, quando si toccò l'armatura opposta a quella, per cui fu impressa la carica, rimane il pendolino annesso affatto inerte; e frattanto quello dell'armatura, per cui fu impressa la carica, non ricade mai in tal atto interamente; ed è inoltre il primo, che comincia a rialzarsi, e divergere di più innanzi, che l'altro faccia verun acquisto nella divergenza, che fa poi lentamente, e sempre minore del primo. E con questa legge si estende vie più, e si conferma quel nuovo criterio, che nella prima fu stabilito.

E siccome queste differenze, e queste leggi sussistono invariabilmente le stesse in ogni specie di elettricità resinosa, e vitrea, colla quale si carica il quadro; e sono costantissime finchè nel quadro vi è sufficienza di elettricità per vibrare que' fili, che pendono dalle due armature, perciò tutte cospirano a stabilire fuori d'ogni dubbio l'elettricità dominante della faccia, che si carica.

Onde ciò, che *Epino* dedusse dai soli effetti succedenti allo scoppio, e soltanto con grandi, e non ordinarie preparazioni; ciò che nei tentativi, che ne fece, non osservò *Franklin*, nè credette *Epino* potersi altrimenti osservare, io lo dimostro con facile, e comodo apparato passando per tutti i gradi della più alta forza di carica fino all'ultimo decadimento delle opposte elettricità, che fanno l'elettrico scoppio.



L E T T E R A

Del Sig. LEOPOLDO MARC-ANTONIO CALDANI

AL DOTTO E CELEBRE SIGNORE

Il Sig. Dott. LIONARDO TARGA.

Tutto ciò, che serve ad amplificare ed illustrare la storia delle sedi e cagioni delle malattie, fu mai sempre tenuto in sommo pregio dai veri e dotti Medici. Quindi è, che non essendomi ignoto com' ella serbi di simili cose il più esatto registro, ho creduto di farle cosa grata, comunicandole un caso singolare, da me già tempo osservato di quella orribile malattia, nella quale vomitandosi pressochè tutto ciò che trovasi nel tubo degli alimenti, con accompagnamento il più delle volte di feroci dolori di addome, e in seguito con pertinace stitichezza di ventre, viene chiamata col nome d' *ileo* o di *passione iliaca*; e volgarmente diceasi il male del *miserere*.

Ella ben sa da quante cagioni fra loro diverse questa malattia tragga la funesta sua origine. Analizzando però la maggior parte di queste cagioni, pare che la maniera loro di operare si riduca a far sì, che il tubo degl'intestini spesso in qualche sua parte venga strozzato, o compresso, o chiuso da materia aliena, o s'interrompa e perverta in qualunque modo il naturale suo movimento. Quindi poi ne succeda il più sovente, che non potendo nè gli alimenti, nè l'aria, nè que' fuggi e materiali, che debbono scorrere per gl'intestini, superare l'insolita resistenza che loro si oppone, si arrestino al di sopra della strozzatura, o degli ostacoli che lo comprimono, o l'otturano, o del luogo di sua immobilità, si guastino; e stimolando soverchiamente le tonache del canale medesimo, questo si contragga con violen-

za, e respinga i fughi e materiali indicati verso la parte che meno resiste, vale a dire superiormente.

Questo è ciò che avviene nell' *ileo* per forte strozzatura, che non permette il libero movimento delle materie per la cavità intestinale. Del resto non mancano esempj di *affezioni iliache*, sotto le quali, almeno ne' primi giorni, con apparato di dolori tormentosi, sovente fissati alla regione del bellico e dell' ipogastrio, di vomito, di singhiozzo ecc. anzi qualche volta anche senza dolori, escono i flati e le feccie più e meno liberamente. E ciò accade quando l' intestino è fornito di qualche appendice o naturale o morbosa, che resti imprigionata; ovvero allora quando è strozzata qualche picciola porzione delle tonache dell' intestino, sì che la sua cavità poco o niente si restringa. La strittura, o l' infiammazione sono in tali casi le cagioni dell' *ileo*, perchè l' una e l' altra per insolita guisa irritano l' intestino: e a questo male poi, quando è inoltrato, succede l' insuperabile stitichezza di ventre.

Tale sembra generalmente il modo di operare della maggior parte delle cagioni, dalle quali l' *affezione iliaca* procede; perchè ve n' ha una specie, in cui pare che in tutto il canale degli alimenti altro non siavi che una tale irritazione, per la quale il moto antiperistaltico prevalga al peristaltico del canale medesimo.

Io non so bene se quest' ultima specie d' *ileo* potesse chiamarsi *ileo di spasmodia*, di cui ne ho veduto un solo esempio. Mi somministrò questa osservazione un uomo d' anni 42, che faceva il tessitore da seta, di abito di corpo carnosissimo, e robustissimo. Venne egli allo Spedale di S. Maria della morte, di Bologna, nell' aprile del 1749. Da due giorni addietro senz' altra cagione a lui nota, oltre quella di essersi esposto a un colpo d' aria fredda nella notte antecedente alla malattia, cominciò egli a vomitare quanto inghiottiva o di cibo o di medicamento, e quanto aveva negl' intestini. Assicurava e protestava egli stesso ne' modi più forti, e con somma agitazione di spirito, di avere restituito per bocca il pretto sterco figurato. Non era ernioso, nè aveva febbre: il ventre era teso, intieramente inofficioso, e sotto l' esplorazione poco dolente: pochissimo orinava, e le orine erano si-

mili alle naturali: soffriva di quando in quando qualche insulto di singhiozzo, che lo molestava assaiissimo. Si prescrissero de' cristei: ma tale era la costrizione dello sfintere, che con grandissimo stento potè riceverne uno che trattenne, nè volle assoggettarli ad un secondo. Una presa d'olio con quattr'onze di mercurio fu da lui subitamente rigettata. Si fece uso de' somenti all'addome, ma inutilmente, perchè fu attaccato in quella notte, terzo giorno di sua malattia, da universali convulsioni, e con tal forza, che nell'accesso uscì di sentimento. Replicò l'accesso la mattina dopo prima del mezzogiorno, e con tanta violenza che ne restò per così dire strangolato.

Nell'apertura del suo cadavere non mi fu possibile trovare la cagione materiale di questo volvolo, almeno nel tubo degli alimenti, il quale, se si eccettua una soverchia gonfiatura per copia d'aria che conteneva, sembrava in ogni sua parte simile allo stato di natura. Io dissi *almeno nel tubo degli alimenti*, perchè incontrai cosa nel rene destro, che mi par degna di esserle comunicata. In poche parole tutta la pelvi di questo rene, e cinque de' tubi che concorrono a formarla, erano ostrutti da un calcolo, il quale stendevasi in giù fino al principio dell'uretere. Estratto questo calcolo, vidi le cinque sue radici superiori pertugiate ed aperte in una cavità maggiore, che occupava il centro del calcolo della pelvi. Non mi è ignoto come altri calcoli fistolosi, per così dire, sianli trovati alle volte ne' cadaveri: questo però parvemmi singolare, perchè una pietra forse qualunque non si potrebbe trapanare con tanta regolarità, con quanta era trapanato questo curioso calcolo, il quale per conseguenza lasciava libero il corso alle orine, che da quel rene si separavano. Questi canali pietrosi erano guerniti internamente di un denso muco, a guisa di membrana. Il resto di questo viscere, con mia sorpresa non picciola, non presentò nemmeno vestigio di arena, o vizio d'altra sorta, siccome neppure la vescica.

Cercai de' parenti di questo infelice per aver qualche lume intorno alla storia di sua malattia, siccome intorno a questa singolarità in uno de' suoi reni incontrata: ma e la madre sua e la moglie ancora, da me interrogata protestarono

rono di non essersi mai avvedute ch' egli rendesse orine arenose, e mi accertarono ch' egli sicuramente, vivendo, non erasi giammai lagnato di alcun incomodo nell' orinare. Quanto alla cagione del volvolo non potei sapere più di quello che l' infermo avevami egli stesso raccontato. Mi fu d' uopo cedere ad ogni modo questo calcolo al fu Sig. Dott. Vincenzo Menghini, che allora faceva alcune sperienze su di queste produzioni morbose del corpo umano: e mi duole adesso di non averne fatto trarre almeno il disegno, che in questa occasione le manderei. Negli altri ventri non si trovò alcun vizio sensibile.

Lascio ch' ella giudichi se questo calcolo, nato, cresciuto, e portato naturalmente parlando per tanto tempo, senza disagio o incomodo alcuno, possa dirsi la cagione materiale del volvolo, che io ho detto potersi forse chiamare *Ileo spasmodico*; che intanto passo ad intrattenerla, siccome mi sono proposto, colla relazione di quell' altra specie d' *Ileo* da me osservato parimente in Bologna mia patria: *ileo* cotanto, a mio giudizio, singolare, che mi obbligò a stenderne insin da quel tempo non solamente la storia, ma sibbene anche la sezione anatomica, non disgiunta da una tavola o disegno che rappresentasse la stravagante cagione di quella malattia. Il disegno fu eseguito dal fu Sig. *Ercole Lelli* mio grandissimo amico, ch' ella avrà facilmente conosciuto di persona ancora; e la cui abilità nella cognizione della fabbrica del corpo umano, nel disegno, nella scoltura, e quasi in ogni genere di delicato e diligente meccanismo, gli acquistò giustamente quella riputazione, che vivrà mai sempre nella memoria degli uomini; anche per ciò che sussistono alcune opere di sua mano, sempre ammirate da' forestieri intelligenti, nella camera anatomica dell' Istituto di Bologna. La storia della malattia e della sezione, che io ho determinato di comunicare a lei, sulla lusinga che non sia per dispiacerle, è quella ch' io qui trascrivo.

Il dì 7 dicembre dell' anno 1750 fu condotta allo spedale suddetto una vecchia d' anni 80 compiuti, picciola, curva, e scarnata; la quale si lagnava altamente di un dolore costante nel bassoventre, che spesso innasprivasi all' intorno del bellico, ed anche in fondo al ventre, siccom' essa dice-

va; e che riducevala pressochè a un forte deliquio, il quale non cedeva che ad un vomito insolente e fetido; restando in appresso spossata; con sete e pertinace stitichezza di ventre. La lingua era arida e sporca, pessimo l'alito ed il sapore della bocca; sensibile il calore di sua pelle asciutta; l'addome teso e dolente; i polsi trovaronsi piccioli, celeri, contratti; le orine erano scarissime; esalava ruti puzzolentissimi, spesso seguiti o preceduti da singhiozzo. Vomito due volte in tempo ch'io la visitava, e la materia sgorgata con impeto era non molta, ma di colore pressochè atro, e di un odore insoffribile. Presentandomi tosto l'idea di una *passione iliaca*, mi feci a chiederle se fosse erniosa; nè contento di sua negativa esplorai io stesso il bassoventre, e i luoghi all'intorno di esso, ove sogliono formarsi dell'ernie; e la feci anche visitare dal primario Chirurgo dell'ospedale: ma non si trovò ombra di ernia in luogo veruno. Fu in mezzo a questa esplorazione, che lamentandosi ella che per noi le si era innasprito il dolore del ventre, si svenne per la seconda volta, e non si riebbe che vomitando.

La interrogai intorno alle cagioni di questa sua crudele malattia; ed ecco appunto ciò che a stento, e dopo molte interrogazioni potei raccogliere da una di lei sorella, che era presente quando la visitai, non meno che dall'inferma medesima.

Da sei anni addietro, essa mi disse, nel maggior freddo dell'inverno, fui mai sempre attaccata da un po' di diarrea; unica e sola malattia che ho sofferto nel corso di mia lunga vita. Questa diarrea duravami in ciascun anno per lo spazio di dieci o dodici giorni al più; indi cessava spontaneamente. Era però discreta, dacchè i dolori, che talvolta l'accompagnavano, erano assai miti; nè m'impedì giammai l'esercizio di mie domestiche faccende. Verso la fine dello scorso mese si unì al freddo, che però non era grande, una forte passione di animo per la morte di mio fratello, da cui riceveva il quotidiano sostentamento; e fui assalita dalla solita diarrea, accompagnata però da dolori un poco più frequenti del passato. Ciononostante a certe ore usciva di casa, e mi portava a visitare le mie amiche, presso una delle quali, dopo otto giorni di questa diarrea, mi fermai anche a pranzo, dove mangiai con buon appetito, e bevei dell'ot-

timo vino. Parendo a me, e più all'amica mia, che questo vino mi ristorasse e mi rinvigorisse, me ne fece dono di un fiaschetto, che mi portai a casa, e tracannai a cena in compagnia delle mie due sorelle. Ciò avvenne la sera dei due del corrente dicembre; quando prima di passare al letto i doloretto di pancia mi si rendettero acerbi, specialmente all'ombelico; mi si gonfiò e indurì tutto il ventre; e fui assalita dopo alcune ore da un freddo, per cui io tremava tutta; sotto il quale vomitai non solo quanto aveva mangiato a cena, che veramente fu pochissimo, ma sì bene anche il pranzo, e tutto il vino bevuto, che però non fu molto, non essendo uscita di sentimenti. Mi riscaldai appresso più del dovere; fui tormentata da molta sete; non potei dormire; e mi restai senza alcun ajuto medico pel tratto di tre giorni, sperando che il male cedesse di per se, siccome in questa occasione aveva fatto la diarrea. Le mie speranze andarono però fallite, perchè i soliti dolori, gli sfinimenti, il vomito di materie disgustosissime e fetenti, non solo sussisterono, ma sul principiare del quarto giorno inferocirono di modo, che una delle mie sorelle andò in traccia di un Chirurgo, che mi cavò sangue dal piede, e per essere quattro giorni che non aveva avuto beneficio di ventre, voleva mettermi un sottrattivo ch'io non volli permettere ad alcun patto. Crescendo però maggiormente i dolori e gli altri incomodi, e sentendomi priva di forze, mi sono fatta trasportare all'ospedale.

Ella s'immaginerà facilmente che non solo da me, ma dal bravo ed eccellente clinico Sig. Dott. *Giuseppe Azzoguidi*, allora Medico ordinario di quell'ospedale, si posero in opra ordinatamente tutti gli ajuti dell'arte, che in caso simile erano praticabili. Avvegnachè si conoscesse manifestamente che la malattia, specialmente tanto inoltrata, non era superabile dalla forza de' medicamenti. Non volemmo però far uso del mercurio crudo a gran dose per bocca (tuttochè, attesa la sanità costantemente goduta in passato dall'inferma, e l'assenza di ernia, potesse più sospettarsi d'invaginamento o violenta costrizione di qualche pezzo d'intestino, che di altra cagione; e d'invaginamento o costrizione nata probabilmente da infiammazione, attesa la febbre che

si manifestò prima dell' *ileo*) perchè e in quella sera ch' io la visitai per la prima volta, e la mattina seguente, sussistendo di quando in quando il vomito sempre più fetido, avvegnachè scarso e spumoso, i polsi eranfi fatti più deboli, il dolore era scemato notabilmente, le forze erano quasi intieramente perdute, fredde le estremità: sintomi tutti, com' ella ben vede, che pare dimostrassero essere già nata la cangrena degl' intestini. Di fatti, ventiquattre dopo il suo trasporto allo spedale, cominciò la respirazione a farsi difficile; i polsi mancarono insieme co' sentimenti; e passò al numero de' più la mattina dell' altro giorno; vale a dire dopo essere stata nell' ospedale pel solo intervallo di 40 ore all' incirca.

Feci trasportare il cadavere nella camera anatomica per farne (a) la sezione: nella quale io mi era preparato a ve-

(a) Vivono ancora moltissime persone e in Bologna, e in altri luoghi, le quali possono attestare come io non abbia giammai omissso di aprire prefocchè ogni cadavere nel detto spedale, sì per informarmi alla meglio della fabbrica sovraneamente maravigliosa del corpo umano, per quanto permettere lo potevano i miei sensi, che non ammisero per vero se non quello che ad essi compariva in maniera evidente, o al più ajutati qualche volta con vetri di non molta attività, che spesso inganna; come per conoscere le sedi e le cagioni delle malattie. E ciò fu da me fatto non solo per tutto quel tratto di tempo ch' io abitava nell' ospedale suddetto in qualità di medico assistente, ma prima e dopo ancora; e parimente qualche volta in altri spedali, e per molti anni nelle camere delle pubbliche scuole di essa città, non che in casa propria. Molti pure ne ho aperti e ne apro qui in Padova, dacchè occupo pel corso omai d' anni dieciseffe anche la cattedra anatomica di questa Università. Non ho giammai tenuto conto del numero di essi, perchè non ho mai creduto, siccome non credo nemmeno adesso, che ciò possa contribuire ad acquistarsi

fama e riputazione. Pure non mi è ignoto che ciò fu fatto da uomini sommi; ed a questi pare che si debba perdonare questa picciolissima vanità, la quale niente può oscurare il vero merito loro; laddove da altri imitata moverebbe le risa ai leggitori; o ad una brigata di uomini anche non facili a ridere. Ora appunto era in mia casa che il celebre letterato ed amico mio amatissimo Sig. Co. *Francesco Algarotti*, terminata da me la giornaliera dimostrazione anatomica ai giovani studiosi, voleva che a lui pure dimostrassi e descrivessi quant' era preparato, e quanto bramava egli che preparassi, onde soddisfare alla dotta sua curiosità. Vide egli in tale occasione tutta la miologia e la splanchnologia, siccome pure i tronchi e rami principali de' vasi e de' nervi. Ciò accadde nell' inverno degli anni 1756 e 1759, (se la memoria non m' inganna) e non certamente negli anni primi di sua gioventù. Essendo egli stato uno degli uditori di un mio illustre Prozio, *Eustachio Manfredi*, quando questi morì (del 1739) io appena contava gli anni tredici. Ho voluto aggiugnere questa nota onde sia corretto un anacronismo commesso dall'

dere o una forte costrizione, o non picciolo invaginamento d' intestino, che costituisce secondo alcuni ciò che propriamente chiamasi *volvolo*. L' addome era assai tumido, teso, e segnato di alcune striscie, rubiconde insieme e scurette. Aperto che fu, sparso un tetro nauseoso fetore per tutta quella gran camera. Il colon trasverso era molto dilatato per copia di aria, ma scevero da infiammazione: lo stomaco piccolo e contratto con pareti resistenti e dure: gl' intestini tenui si videro gonfi, infiammati per la massima parte, e contratti qua e là in guisa, da presentare alla vista una qualche specie di celle o concamerazioni, quasi come il colon: quelli che occupavano la pelvi, e vi stavano un poco al di sopra, erano anche cangrenati. Cominciai a svolgere d' alto in basso questi intestini, alquanto più in su del luogo cangrenoso, e proseguendo a svolgerli fino a questo luogo vidi una gran parte di essi insieme col loro mesenterio strozzati violentemente dentro la pelvi: quindi cercando con un dito la cagione di questo strangolamento m' incontrai in una cordicella molto dura e resistente. Lasciando tutto a suo luogo, e comprimendo soltanto gl' intestini ai lati della strozzatura in guisa, da rispignere alle parti opposte l' aria contenuta, e così vedere l' origine ed il fine di questo legamento singolare, che veniva coperto dagl' intestini turgidi ed infiammati; non fu piccola la mia sorpresa allo scorgere che un' estremità di questa briglia micidiale partiva dalla tuba falloppiana destra, poco prima della sua simbria, e di là scendendo attaccavasi fortemente al fondo dell' utero; il quale era sollevato in punta, facendo ancor esso una parte dello stesso legamento.

La singolarità del caso fece tosto sospendere ogni ulteriore perquisizione, e mandai in traccia del lodato Sig. *Lelli*, perchè volesse farmi il piacere di trarne il disegno sul cada-

R. r. iij

autore della vita del suddetto Cavaliere: anacronismo che veggio ripetuto da altri, i quali, conoscendomi di persona, siccome conoscevami l' autore della vita, se avessero fatto un

po di riflessione e quindi mi avessero guardato in faccia, non farebbero certamente nello stesso errore incampati.

vere medesimo. Venne egli a me prontamente, e fece ch'io portassi via colla sega le due ossa del pube, indi separassi la vescica dell' orina, affinchè tutto l' utero, e parte anche della vagina restasse scoperta: ma perchè la tumidezza degl' intestini all'intorno della strozzatura non permetteva che si vedesse il detto legamento, quindi feci passare a forza di compressione una parte dell' aria, che contenevano, negli altri intestini più lontani, legando in appresso sopra e sotto quella porzione di questo tubo, in cui erasi lasciato tanto di aria che bastasse a mantenere in essi le tracce della loro sezione, senza coprire la briglia che li teneva validamente strangolati; e separando tutto il restante degl' intestini, che allo scopo nostro erano inutili.

La figura *I* della tavola, aggiunta a questo scritto, colle lettere *DEKKKL* rappresenta l' intestino ileo col mesenterio *I* strozzato (*a*) della briglia *C*, che aveva alzato l' utero *A* insolitamente rotondo nella prominenza *B*. Le lettere *D E* indicano forse il fine dell' intestino digiuno. Il collo dell' utero ch'era un po tumido, e un tantino rossiccio, siccome lo era il restante dell' utero stesso, è segnato colla lettera *F*. Le lettere *H H* notano parti del peritoneo. La vagina aperta è rappresentata dalla lettera *G*, sotto la quale si veggiono le pieghe o rughe, e fra queste una colonna rugosa singolare, e prominente, *g*, nel parete posteriore della vagina medesima. Finalmente *L* è quella parte dell' intestino ileo, che, dopo la strozzatura, facendo varie circonvoluzioni, andava poi ad aprirsi secondo il solito nel colon.

Eseguito questo primo disegno si sprigionarono gl' intestini strangolati, e si trasse l' utero dalla pelvi. Lo sprigionamento riuscì facilissimo, perchè stirandoli senza molta forza si stracciarono, tanto erano maltrattati. Comparve allora

(*a*) Convieni ricordarsi, come si è detto pocanzi, che questa briglia non si vedeva per essere coperta dalla gonfiezza degl' intestini: e che per vederla, e disegnarla, fu d'uopo rispignere l'aria negli altri intestini lontani; e impedire colla legatura che non viri-

tornasse. Lo stesso dicasi del corpo dell' utero, coperto esso pure dalle budella; e si avverta che in questa figura prima non si sono espresse nemmeno le traccie de' legamenti dell' utero, perchè meglio comparisse la singolarità della strozzatura.

l'utero (*Fig. II.*) colle sue tube *NN* separate quasi del tutto dagli attacchi de' legamenti larghi dell' utero, e si vide l'anello *H* (fatto dalla tuba rivoltata in alto, ed anche un poco dall' utero) per cui passata era non piccola porzione dell' ileo col mesenterio, e forse parte ancora del digiuno, giacchè l'intestino, al luogo *E* della figura prima, era internamente guernito di valvole più frequenti di quanto osservasi comunemente nell' ileo: quindi è che nella stessa figura prima ho pensato di poter indicare col *D* il digiuno intestino. Delle ovaie *OO* la destra era come divisa in due porzioni differenti di volume. Poco o nulla importa avvisare che le altre lettere rispondono a parti indicate nella prima figura, e che con *MM* si notano i legamenti rotondi dell' utero: non dee però tacerli che questo viscere con tutta la detta stiratura, in questa donna che mostrò d' essere per ogni titolo intatta, non presentò alterazione alcuna nella propria sostanza, e nella cavità sua: era soltanto un piccolino inclinato e trasportato al destro lato della pelvi (*Fig. I.*) e la tuba destra era totalmente ostrutta: anzi in tutto il suo tratto cangiata in un pretto e duro legamento.

Eccole, Padrone ed Amico veneratissimo, la storia e la sezione anatomica di una donna, morta di *passione iliaca*, nata da un vizio che nessuno certamente avrebbe potuto indovinare. Egli è vero che non iamo senza esempi di simile affezione prodotta da qualche briglia o legamento morbofo, che strangolava gl'intestini: e si possono leggerne alcuni nella Memoria del chiarissimo Sig. *Hevin*, inserita nel volume iv. della Reale accademia di chirurgia di Parigi: ma di una siffatta briglia, qual è quella da me osservata, io non mi ricordo che siavi stato esempio. Un Nosologista darebbe a questa specie d' *ileo* un nome nuovo e risonante. Forse, volendo indicare l'anello strangolatore, fatto dalla tuba insieme e dall' utero, lo chiamerebbe *Ileus Daetyliosalphysteros*, che sarebbe finalmente voce greca, e non barbara, siccome sono non poche di quelle che furono inventate da alcuni Nosologisti: è parimente a quella *passione iliaca*, nella quale si vomita il pretto sterco, darebbe il nome di *Copremetia*, da *I. H. Levater* cento sedici anni sono ado-

perato (a), ovvero di *Copriemesia* che si legge nell' opera del *Bonet* (b).

Ma io non voglio nemmeno provarmi di diventare Nosologista: conoscendo che il denominare appropriatamente, e il ben classificare le malattie, è cosa sommamente difficile; e che l' accignerli a fabbricare un vero sistema nosologico in tanta copia di sintomi, e di cagioni comuni a moltissimi morbi, rade volte semplici, spessissimo complicati ed oscuri, e in tanta scarchezza di segni patognomonici, sia pressochè lo stesso che il pretendere di assegnare i limiti della divisibilità della materia. Da questa difficoltà nasce che i Nosologisti poco assai convengono fra di loro; e che uno stesso autore, ristampando la sua Nosologia, trasporta in ogni edizione alcune malattie da un luogo all' altro, collocandole sotto classi diverse da quelle, ove le avea poste da prima. Quindi è che i giovani medici, i quali leggono le Nosologie, non fanno chi fra gli autori di esse debba presciegliersi: imperocchè la malattia, di cui qui si tratta, secondo il Sig. *Vogel* entra nella classe delle febbri, quasi non si desse *passione iliaca* senza febbre che l' accompagni sin da principio, o si susciti in progresso: il Sig. *Cullen* la vuole in quella de' spasmi: il Sig. *Sauvages*, e quindi il Sig. *Sagar*, in quella de' flussi (fra i quali non dubitò di collocare anche la *nausea*) scrivendo dell' *ileo*, che *gastrodynia*, *obstipatio*, *anxietas*, & *vomitibus demum feculentæ materiæ*, *determinant hunc morbum*. Ma nè il vomito di materia fecale è compagno indivisibile di questa malattia; nè sempre il dolor forte di ventre o di stomaco, come importa il valore della voce *gastrodynia*, è congiunto alla stessa. Potrei qui citare non poche storie di questa affezione senza l' accompagnamento di dolore, o di dolor notabile, s' io non sapessi che a lei non possono essere ignote.

E poichè mi è venuto fatto di nominare i Nosologisti, io
le

(a) *De intestinor. compressione.*
Dilert. Basil. 1673.

(b) *Sepulc. Anat.*

le confesso di non intendere come si voglia da qualcuno di essi, che la *passione iliaca* sia una cosa stessa colla *colica*; se per *colica* dee propriamente intendersi, siccome pare, un dolore che ha sua sede nell'intestino *colon*. Può il dolore qualunque di ventre chiamarsi, come fecero molti antichi, col nome generale di *colica*: può, quale che siasi l'intestino adolorato, vale a dire la specie di *colica*, succedere a questa la *passione iliaca*; ma se questa attacca talvolta senza dolore perchè dovrà dirsi che l'*ileo*, o l'*affezione iliaca*, altro non è che un grado maggiore della *colica*? Si confonde dunque mal a proposito il dolor colico colla *passione iliaca*; siccome si confonde il dolore che alle volte ha sua sede nell'intestino ileo colla malattia di questo nome. Anche l'*epilessia*, per servirmi di un qualche esempio, passa alcune fiate all'*apoplessia*: ma questo male non è lo stesso che quello, almeno per consenso comune.

Non vi è dunque altra differenza (ed ella pure più d'una volta meco parlando me lo ha significato e confermato) fra la *colica* ed il dolor iliaco, oltre quella che spetta alla sede quando questa possa determinarsi: cosa che sembra potersi fare, secondo alcuni, quando il dolore stringe a guisa di cingolo la parte superiore dell'addome, ed occupa le regioni epicoliche, ovvero quando è fissato alla regione del bellico e dell'*ipogastrio*. Che se si vuole che sia più pericoloso il dolore degl'intestini tenui che de' crassi, perchè quelli si credono più sensitivi di questi, allora si dica pure che il dolore iliaco non differisce che per maggioranza di forza dal dolor colico, ossia dalla *colica*; ma non si decida che la *colica* e il dolor iliaco siano essenzialmente lo stesso che la *passione iliaca*; il cui carattere si è la pertinace stitichezza del ventre, unitamente al vomito frequente di materie più o meno fetide, e qualche volta ancora di pretto sterco: specie sola di vomito che sembra richiedere che la malattia si chiami col nome di *volvolo*; il qual nome da certuni, non so con quanto buona ragione, viene attribuito all'invasamento di qualche porzione d'intestino.

Ed a proposito di fissatto vomito, potrà egli dunque dirsi col celebre Sig. *Cullen*, siccome ce ne avvisa il chiarissimo

Sig. *Bousquillon* (a) che questo vomito mostra che la *colica* non è una malattia diversa dall' *ileo* che per solo grado di forza? “ La douleur, egli scrive, de l'abdomen, ou la colique, que accompagnée du vomissement de matières stercorales, peut exister sans inflammation, en consequence M. *Cullen* len croit que l'ileus ne differe de la colique, que par le degré. „ Non è da porsi in dubbio che la *colica* e l' *ileo* non possano aver luogo senza la compagnia dell' infiammazione: ma nella suddetta espressione, s' io non erro grandemente, si confonde il dolore, chiamato col nome generale di *colica*, coll' *affezione iliaca*. Accordo pure che alla *colica* possa associarsi alcuna volta il vomito delle feccie, ma siccome tal cosa non è frequente, e quando accade, allora il male precisamente si è la *passione iliaca* della specie più grave; e si è già detto non esser nuovo che questa malattia attacchi alcuna volta senza dolori, o dolori assai forti; così non è possibile, senza apportare una manifesta confusione nella nomenclatura delle malattie, il sostenere ragionevolmente che l' *ileo* non è altro che un più forte grado della *colica*.

Oltre a ciò non si deduce forse tacitamente dal suddetto tratto del Sig. *Bousquillon*, che il carattere dell' *ileo* vero si crede il vomito delle feccie? Eppure il Sig. *Cullen* non può certamente ignorare che si dà l' *ileo* non solo qualche volta senza dolore, ma sì bene anche senza il vomito dello sterco: imperocchè, a cagion d'esempio, se un intestino de' tenui è strozzato, o compresso, o chiuso per invaginamento, o per violenta contrazione, e ne succeda l' *ileo*, e quindi il vomito delle materie contenute negl' intestini stessi sopra il luogo strozzato o contratto, come mai il pretto sterco, che solo si forma negl' intestini crassi, potrà uscire col vomito? Dunque, io qui ripeto, o si crede che l' *affezione iliaca* sia sempre congiunta a dolore; e mi pare che la cosa non cammini bene: o si confonde la *colica* e con il dolor iliaco, e con l' *ileo*, che debbono certamente fra di loro distinguerfi.

Ha forse sentita la necessità di questa distinzione il loda-

(a) Ne' commenti agli “ *Elémens de médecine pratique de M. Cullen. Chap. x. de la colique* „ .

to Sig. *Bousquillon*: imperocchè, poco prima del luogo citato, dopo di aver detto che nella colica pituitosa „ la dou-
 „ leur est fixe et ressemble à celle qu'occasionneroit un pieu
 „ que l'on enfonceroit dans la partie; le ventre est disten-
 „ du de vents, l'hypochondre gauche est particulièrement
 „ affecté ecc. „ si fa tosto a descrivere l'ileo pituitoso in
 cui „ le malade a toujours froid, il n'y a point de fièvre,
 „ les douleurs sont très-vives, il survient d'abord des vo-
 „ missemens de bile et de glaires, et ensuite de matières fé-
 „ culentes. „ Ma se l'ileo e la colica sono una cosa stessa,
 nè differiscono che per solo grado, perchè chiamò *ileo* que-
 sta specie di colica pituitosa? Se sono queste due malattie
 una cosa stessa, perchè mai dopo di avere scritto che nella
 colica spasmodica „ les malades vomissent leurs excréments,
 „ ou les matières que l'on a injectées dans l'anús „ ag-
 giunse poi subito „ ainsi dans l'ileus spasmodique on a vu
 „ les malades rendre, non seulement les lavemens, mais mêm-
 „ me les suppositoires? „ Se, ripeto anche una volta, que-
 ste due malattie sono in essenza una cosa medesima, perchè
 ci avvisa che „ l'inflammation est réunie à la colique, 1.^o
 „ dans l'ileus inflammatoire; 2.^o dans la colique inflamma-
 „ toire? „ Questa curiosa espressione d'infiammazione con-
 giunta all' *ileo inflammatoire*, e alla *colica inflammatoria*, non
 dimostra forse ancor essa bastantemente che questo Scrittore
 mette differenza essenziale fra una malattia e l'altra? A me
 sembra certamente che lo dimostri; perchè altrimenti basta-
 va indicare l'infiammazione della colica; e chiamare *colico*
 ciò ch'egli ha distinto col nome d' *ileo*. Si vede adunque
 anche da ciò che i sistemi nosologici sono molto imperfet-
 ti (a) e che non possono apportare quell'utilità che, secon-
 do il parere di alcuni, se ne doveva attendere.

Ma, da questa forse troppo lunga digressione ritornando
 in cammino, io protesto che se alcuno mi chiedesse s'io pensi

S f ij

(a) Meritano d'esser lette a que-
 sto proposito le *Inst. Med. Pract.* del fu
 amatil mio amico Sig. *Bonieri*, e spe-
 zialmente la Prefazione al Tom. III.

siccome pure la Prefazione del chiariss.
 Sig. *Frank* alla 4. edizione della No-
 sologia del Sig. *Cullen*.

che quell' attacco della tuba al fondo dell' utero fosse un vizio originario di coesione , ovvero se sia nato in appresso : se, posto che fosse originario, io creda che la cagione della diarrea, da cui era malmenata la donna nel sommo freddo da sei anni addietro, sollecitando il moto peristaltico, ed alterandolo, abbia fatto passare a poco a poco gl'intestini dentro di quell' anello , e che ne andassero , come suol dirsi, dentro e fuori più e meno secondo la direzione e forza de' varj movimenti del tubo ; sì che finalmente nell' ultima diarrea tanta parte dell' intestino digiuno ed ileo col suo mesenterio ne sia passata da far nascere la strozzatura mortale ; io risponderei che di mia natura non sono molto portato a congetturare senza tali fondamenti , che diano speranza di far passare col tempo le congetture a dimostrazioni. La sola risposta ch' io farei a queste ricerche , e ad altre , che forse mi si potrebbero fare, sarebbe questa : cioè , che le tube falloppiane , avvegnachè nuotanti colla loro estremità simbriata nel cavo della pelvi, non sono però nel resto di loro lunghezza cotanto libere da potere , in caso di erezione, avanzarsi colla detta estremità sino sopra il fondo dell' utero (a). E se questa mia risposta viene valutata, egli è manifesto che il vizio di coesione, di cui si tratta, sarebbe stato originario. Del resto ei sembra che la durezza e robustezza dell' indicata briglia , e la distrazione del fondo dell' utero nella suddetta donna, non fossero opera degli ultimi giorni della sua vita . Almeno non abbiamo esempj, per quanto io sappia , di legamenti morbosi recenti , i quali acquistino la solidità de' legamenti propriamente detti.

La ricerca però più a proposito, almeno a mio giudizio , che mi si potrebbe fare, sarebbe, se in quel caso convenisse o no tentare la *Gastrotomia*, ossia l'apertura dell' addome , onde liberare gl'intestini dallo strangolamento . Questa ope-

(a) Nella Fig. II. sembrar potrebbe ad alcuno , che la tuba sinistra possa benissimo rivolgerli sopra il fondo dell' utero : ma si consideri (e si è già avvisato) che questa tuba si rappresenta pressochè del tutto separata dal legamento largo dell' utero :

e si sappia ancora che nel disegnare queste parti non si pensò di conservare una giusta proporzione nell' impicciolirle ; quindi è che le tube sono più larghe e più lunghe di quanto converrebbe alla mole dell' utero rappresentato .

razione; che secondo alcuni è stata praticata da *Prassagora*, e forse anche da altri prima di lui, quanto alla sua convenienza o disconvenienza, fu chiamata a sindacato dal Sig. *Hevin* nella sua dotta Memoria su di questo argomento. In essa si esamina se realmente *Prassagora*, ed altri sul di lui esempio abbiano infatti eseguita una simile operazione; in quale specie d'ileo potesse convenire; in qual tempo; e con quale fortuna. La conclusione si è, che la non si dee giammai tentare per ciò, che, potendo al più convenire in caso d'invaginamento, o di briglia morbosa strangolatrice, non essendovi segni caratteristici dell'una o dell'altra di queste morbose costituzioni d'intestini, non si dee por mano ad una operazione, la quale, oltre il poter facilmente riuscire inutile, non si può non riconoscerla pericolosa.

E in vero sembrami che alcuno mi dica, se l'invaginamento o la briglia non si presentassero a prima vista, cioè fatto appena il taglio dell'addome e svolta piccola porzione d'intestini, chi vorrebbe senza timore di accelerare la morte dell'infermo, svolgere gran parte del tubo intestinale, onde giugnere finalmente a sciorre l'invaginamento, o tagliare la strozzante briglia? Qual Medico o Chirurgo potrebbe comprometterli che gl'intestini non fossero infiammati o cangrenosi? A queste quistioni aggiugnerebbero pur anche l'autorità del lodato Sig. *Hevin*, il quale termina la sua Memoria con queste riflessibili parole. „ Comment remédier à „ des tumeurs, à des brides, à des étranglemens intérieurs, „ dont on ne connoît que les effets, communs avec toutes „ les autres espèces de passion iliaque, quelque différente „ qu'en soit la cause? Ces cas sont très-formidables en ce „ qui ne présentent aucun signe positif, qui marque la nature de la cause, & le lieu qu'elle occupe; ce qui les „ met absolument hors du domaine de la Chirurgie opératoire. „

Io accordo benissimo che, molte esser potendo le cagioni dell' *affezione iliaca*, forse il più delle volte non vi siano quei segni positivi, dei quali parla il Sig. *Hevin*: e pur troppo l'infiammazione di questi visceri non si manifesta alle volte sì chiaramente, che non resti luogo a dubbio alcuno! Certe lente infiammazioni, ed alcune subite cangrene di que-

sto canale, ammazzano tal volta repentinamente senza la precedenza di alcun sintomo, che potesse far sospettare della malattia. Io ne ho veduto di questi esempi più d'uno; e l'ultimo fu in un robusto giovinotto, il quale dopo aver servito da sano il suo Padrone sino alle ore sei della notte (ciò avvenne qui nel mese d'agosto dell'anno 1785) passando appresso a dormire a casa sua, fu trovato la mattina morto nel proprio letto, coricato in guisa che pareva dormisse placidamente, appoggiato colla testa su di una delle sue mani, siccome si fa da non pochi: nè s'incontrò nel di lui cadavere altro di morbofo, fuori che una cangrena nell'intestino ileo pel tratto soltanto di mezzo piede, poco più.

Non mancano però sempre, siccom'ella fa, i segni d'intestini infiammati: e per verità se l'infiammazione sia la malattia primaria, e ad essa succeda l'ileo, credo sia inutile allora qualunque operazione. Ma perchè non dovrebbe tentarsi, fuori di questo caso, la *Gastrotomia* in tempo opportuno; vale a dire ove le forze del male e dell'infermo lo richiedessero e permettersero rispettivamente? Il dolore che suole fissarsi o essere più acerbo in qualche luogo determinato del basso ventre; il qual luogo, per servirmi delle parole di *Cornelio Enrico Velfe* (a) *interdum innotescit ex eo quod homines afflicti quaecunque ingesta deorsum ferri per intestina ad aliquam eorum plagam usque, sed inde tumultuose regurgitare, ipsi sat distincte persentiunt*, non potrebbe forse indicare la sede precisa dell'intestino o compresso, o strozzato da qualche briglia, o invaginato con adesione delle reciproche pareti (dacchè senza una qualche adesione si sa che il semplice invaginamento non produce l'ileo) sì che fatta l'apertura dell'addome non si avesse a svolgere grandissima parte del tubo intestinale; cosa che da non pochi si ha per molto pericolosa? Dee forse temersi del taglio dell'addome? Io non lo credo, sapendoli che l'ernie incarcerate si riponevano una volta (b) felicemente, principiando il taglio dal basso ventre, e producendolo in basso, onde spaccare l'anello che strozzava l'intestino: che si fa un ampio taglio alla

(a) *De mutuo intestinorum ingressu*
S. XLVII. Leid. 1742.

(b) *Freind hist. med.* pag. 46. ediz.

Ven. dove cita il *Rousser*, il quale riferisce tre casi di addome aperto, onde riporre l'intestino strangolato.

regione ipogastrica, ed all' utero nell' *Hysterotomia*, di cui si hanno alcuni casi favorevoli: e che si guariscono grandi ferite penetranti nell'addome. Di fatti egli è noto che *Paolo Barbette* (a) scrivendo di questa malattia domandò *an non etiam prestaret, facta dissectione musculorum & peritonei, digitis susceptum intestinum extrahere, quam certe morti egrotantem committere*: il *Freind* (b) facendo menzione di *Paolo*, quarto ed ultimo degli scrittori greci, de' quali egli asunse di parlare, mostra di convenire con *Barbette* da lui citato, *praesertim cum*, scrive egli, e forse con soverchio coraggio, *in epigastrio nihil magis periculi, quam in processibus peritonei incidendis appareat*. Oltre di che pare che non si possa rinvocare in dubbio che questa operazione non sia stata eseguita con felicità in una dama da un giovine Chirurgo (c) di armata, che le aprì il ventre, ne trasse fuori parte degl'intestini, e svolse l'invaginamento, cagione dell'ileo da cui era oppressa, facendo in seguito l'opportuna cucitura, e ridonandole per così dire la vita ch'era sul punto di perdere. Io so bene che il Sig. *Hevin*, ed altri autori da lui citati son di parere, che l'operazione sia stata quella dell'ernia incarcerata, specialmente perchè il caso è riferito da un Parroco, e non già da un Medico o da un Chirurgo; pure, perchè si fa menzione d'intestini tirati fuori del ventre, e di svolgimento di nodi, il sospetto del Sig. *Hevin* non sembra appoggiato a fondamenti bastantemente solidi; poichè siffatte maniere di dire non pajono convenienti all'operazione dell'ernia.

V' ha chi pretende che una simile operazione sia stata eseguita anche dal suddetto *Cornelio Enrico Velse* (d), o che racconti questo autore come fosse praticata da qualcuno: ma egli è certo ch'ei non l'ha eseguita, e che non fa menzione che di quella riferita dal *Bonet*, e di un'altra consigliata dal *Nuck*, descritta anche dal Sig. *Hevin* e indicata da altri, la quale ebbe un successo fortunato: quindi la dissertazione del *Velse* non contiene intorno a questo argomento se non quanto ci avvisò il Sig. di *Haller* (e); vale a dire

(a) Anat. praët. lib. 4. cap. 2. *Usus Chirurgicus* num. 3. pag. 357.

(b) Luog. cit.

(c) *Bonet Sepulcr. anat.* Tom. II.

lib. 3. Sect. xiv. Schol. 3. Obs. xx.

(d) Luog. cit.

(e) *Bibl. Chir.* §. DCLXXV. Tom. II. pag. 243.

un semplice *consilium abdominis aperiendi ad explicandum volum.* Che se alcuno finalmente mi dicesse che potrebbesi qualche volta trovare l'intestino cangrenato; nel qual caso renderebbesi inutile la *Gastrotomia*; io gli risponderei che forse nemmeno per questo si dovrebbe omettere il tentativo; imperocchè non ci mancano storie d'intestini cangrenosi separati, ed artificiosamente innestati con esito felice, come ne sono stati separati ed innestati alcuni, che nell'operazione dell'ernia incarcerata si videro intieramente chiusi per incallimento delle loro tonache (b).

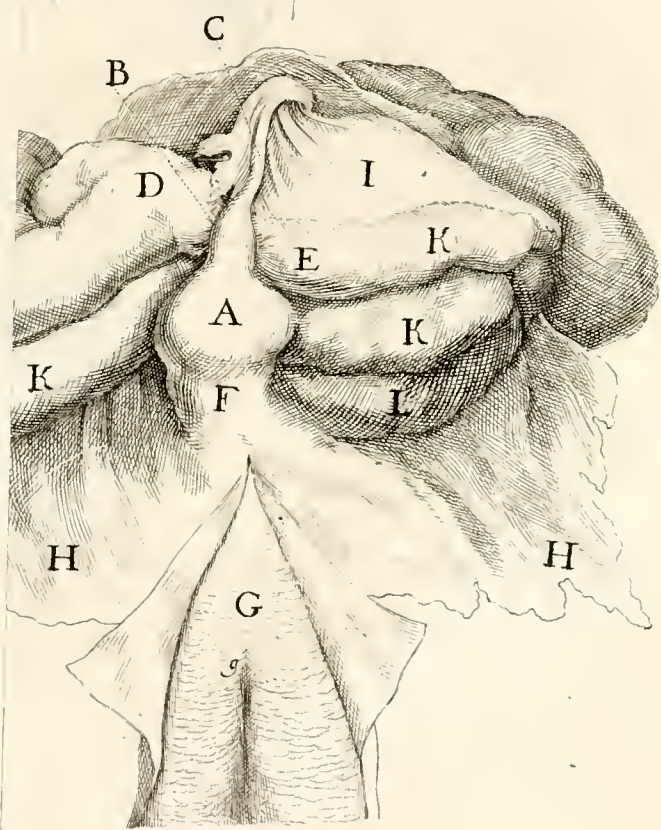
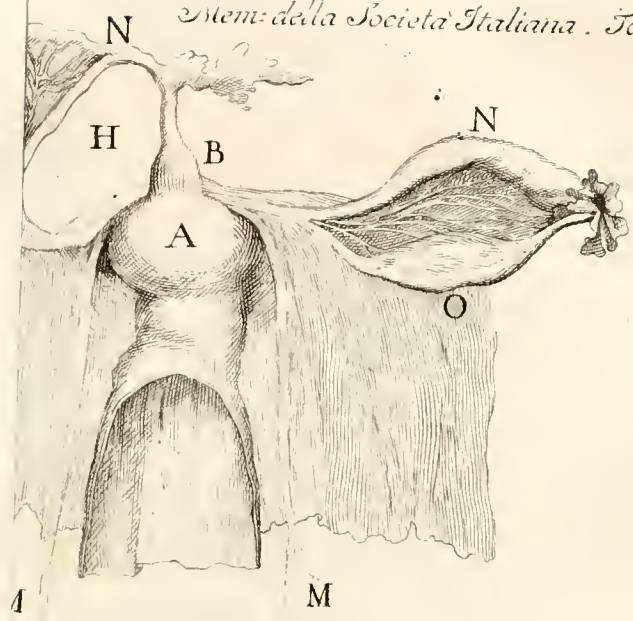
Queste ragioni, quali ch'esse sieno, queste autorità, questi esempi, ed altri che noti sono di operazioni più ardite, le quali riuscirono e riescono tal volta felicemente, sono esse bastanti ad ispirare coraggio ne' Chirurghi non meno che negl' infermi? Io non oso di affermarlo; che nè voglio nè posso sostenere il carattere di giudice tra due differenti opinioni. Nè vi sia perciò chi si meravigli, se nella storia dell'*ileo* stravagante, che somministrò l'argomento di questa Lettera, niun cenno siasi fatto di questa operazione. Oltre che si trattava di una vecchia ottuagenaria, e priva di forze, il male aveva fatto rapidi progressi, e vi era accompagnamento di febbre acuta. Quindi sono di parere che in tale circostanza l'idea dell'operazione non potesse presentarsi alla mente di chicchessia.

Ma si ponga fine a questa soverchiamente lunga Lettera. Mi perdoni ella se tanto l'ho trattenuta su di una materia, che per il modo con cui fu trattata forse non meritava di toglierla nè men per poco alle dotte ed utili occupazioni sue. Questo perdono io non dispero di ottenerlo se non per altro, almeno per l'oggetto che ho avuto in vista nello scriverle; il quale non solo si fu quello che accennai sul principio di questa mia, ma sì bene anche l'altro di darle un pubblico attestato qualunque di quella sincera e cordialissima stima, con cui mi confermo immutabilmente

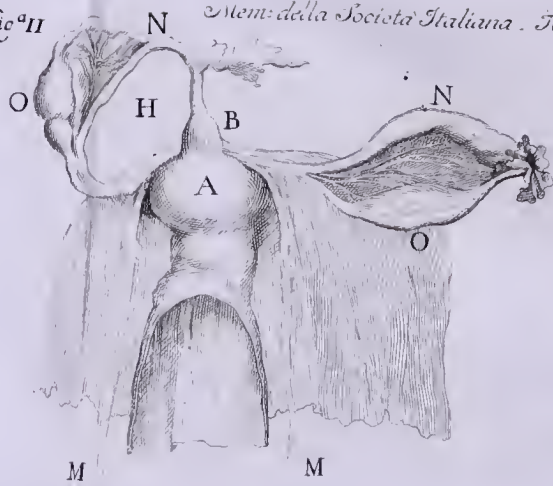
STATICA

(a) Heist. Chir. Tom. 3. de *Hernia incarcer.* dove riferisce la storia di certo *Ramdobrio*, che separò ed innestò

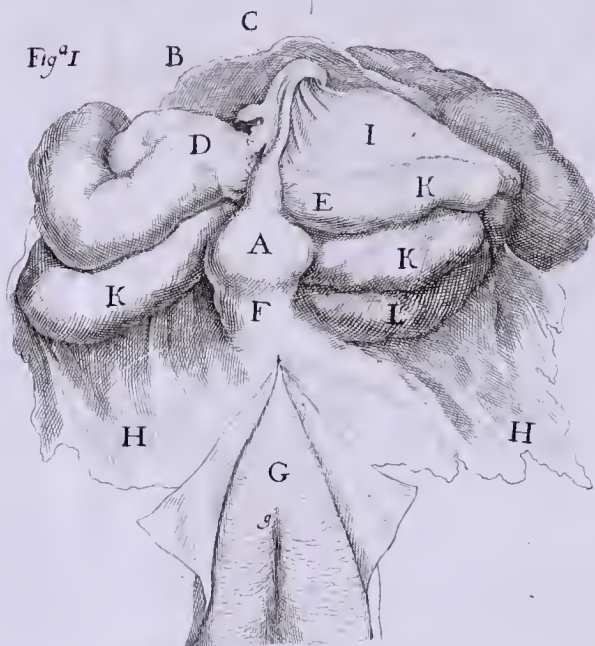
un intestino; e cita una dissertazione del *Moebio*, pubblicata ad *Helmstad* del 1730, la quale io non conosco.



Fig^o II



Fig^o I



STATICA E MECCANICA

D E' S E M I F L U I D I

Del Sig. PAOLO DELANGES

Professore di Matematica nel Collegio Militare di Verona.

I N T R O D U Z I O N E.

TRa semifluidi io intendo d'annoverare la sabbia, l'arena, le migliarole di piombo, il miglio o altre materie consimili. Sogliono al giorno d'oggi i Fisici usare indistintamente, parlando dell'acqua o liquori, tanto la voce di fluido che di liquido; io però ho creduto conveniente di apporre alle materie sopraindicate il nome di semifluido, per essere composte di parti elementari visibilmente separate e distinte fra sè non solo, ma eziandio quante e divisibili, condizioni, che certo non possono allegnarsi agli elementi de' liquidi, e nemmeno a' propriamente detti fluidi, come farebbe l'aria, il fuoco ecc. Non ho trovato che di tale specie di fluidi sia stata fatta menzione da altri autori, se non che da *Galileo* e da *Lambert*. Il primo così alla sfuggita osservando che, a differenza de' liquidi (a) “accumu-
 „ lati insieme si sostengono ammucchiati; e scavati fino a
 „ certo segno, resta la cavità, senza che le parti d'intorno
 „ scorrano a riempirla; agitati e commossi subito si ferma-
 „ no, tantosto che il motore esterno gli abbandona, trova
 „ egli motivo “ di poter molto ragionevolmente arguire, i
 „ minimi dell'acqua, nei quali ella pur sembra esser risol-
 „ ta (poichè ha minor consistenza di qualsivoglia sottilissima

Tomo IV.

T t

(a) Opere di *Galileo Galilei*. Tom. III. pag. 25.

„ polvere , anzi non ha consistenza nessuna) esser differen-
 „ tissimi dai minimi quanti e divisibili „ e segue “ nè saprei
 „ ritrovarvi altra differenza che l'essere indivisibili „ ecc.
Lambert (a) poi imprendendo a stabilire la teoria delle pa-
 lasitte e della solidità o fermezza del fondamento delle ope-
 re d'architettura , e rilevando che le immersioni di solidi
 parallelepipedi leggermente poggiati sulla superficie della sab-
 bia rinchiusa in un vase , sono in ragione diretta de' pesi e
 reciproca delle bati loro , ed osservando in oltre che un pa-
 rallelepipedo del peso di 18 mezz'onze immergevasi 6 linee
 cadendo dalla superficie , e rimaneva in equilibrio posto tre
 linee sotto la superficie della sabbia , conchiuse da ciò esser-
 vi perfetta rassomiglianza tra la fluidità della sabbia e quel-
 la de' liquidi . “ Car , com'egli dice , encore dans les liqui-
 „ des un parallelepipede specifiquement plus léger sera en
 „ equilibre lorsque la profondeur a la quelle il y est enfoncé
 „ est en raison directe de son poids et en raison reciproque
 „ de sa base et de la gravité spécifique du liquide . „ E' sta-
 to mio scopo pertanto nell' istituire le sperienze che sono
 per esporre intorno a' semifluidi non solo di rilevare per di-
 verse vie il loro grado di analogia in ciò che riguarda le
 leggi idrodinamiche seguire da' liquidi , ma eziandio che riu-
 scissero di qualche immediata utilità ne' bisogni umani , e
 singolarmente in que' casi ne' quali rendesi del pari necessario
 conoscere i modi di agire de' liquidi che de' semifluidi . La-
 scio giudicare a' dotti se meriti essere coltivato ed aver luo-
 go nella Fisica tale argomento .

(a) “ Nouveaux Mémoires de l'Acad. MDCCLXXII.
 Roy. des Sciences ecc. „ Berlin. An.

ARTICOLO I.

Della linea di livello de' semifluidi.

ESPERIENZA I.

§. 1. Rattenuto un vafe cilindrico conico o di qualsivoglia altra figura, in maniera che fia verticale l' asse di effo diretto al centro d'un foro fatto nel suo fondo, a qualche distanza dalla superficie di una tavola orizzontale, ed essendo detto vafe riempito di un semifluido, questo sortendo dal foro del fondo componesi in figura conica esattamente. Adoperando la stessa maniera di semifluido e generandosi nel modo esposto più e più coni di diversa altezza, osservasi che il loro lato è ugualmente inclinato sul piano soggetto, inclinazione che d' ora innanzi chiameremo *linea di livello*. Similmente togliendo una parete ad un vafe di qualunque figura prismatica od altro, contenente il semifluido a diverse altezze, componesi effo da quella parte che forte in piano inclinato, e sotto una costante linea di livello. E così finalmente scomponendosi o incavandosi una massa semifluida in qualsivoglia modo, apparisce sempre costante la linea di livello in effa da quelle parti nelle quali il semifluido ha avuto libertà di comporsi da se stesso. Eseguite queste sperienze in tre diverse sorta di semifluido, cioè nella sabbia minutissima di fiume, nel miglio, e nelle migliarole di piombo, ho trovato, che la linea di livello della sabbia formava col piano soggetto l' angolo di - - - - - 33.°
 quella del miglio - - - - - 23.°
 e quella delle migliarole di piombo - - - - - 22.° 30'
 e per ultimo quella di pallini di un diametro triplo delle migliarole - - - - - 25.°
 Cotali angoli d'inclinazione furono da me misurati esattamente, mediante un istrumento composto d' un quadrante annesso ad una squadra, come può comprenderli colla sola ispezione della figura I.

Considerazioni .

§. II. Oltre alla proprietà di mantenere i semifluidi costante la loro linea di livello nella propria specie, come abbiamo rilevato nella descritta esperienza, restano ancora da farsi intorno a' risultati di essa delle considerazioni non meno degne della curiosità di un Filosofo. Osservando pertanto gli angoli d'inclinazione delle linee di livello, ne' diversi semifluidi posti a cimento, si vede in primo luogo, che la sabbia tuttochè composta di minutissime ed impalpabili particelle sdrucchiola, o per così dire, tende meno a distendersi ed accostarsi al livello orizzontale proprio de' liquidi, di quello faccia il miglio, le migliarole ed i pallini di piombo di maggior diametro; il che potrebbe attribuirsi alla irregolare figura delle particelle che la compongono, mercè della quale provando maggiore resistenza d'attrito nel raggirarsi e svolgersi le une su le altre, sostengasi in conseguenza la massa loro più elevata come accade. Si rileva poi in secondo luogo, che la linea di livello del miglio è presso a poco quella delle migliarole di piombo, quantunque le particelle di queste sieno più sferiche e più pesanti, la lisciatezza e pulitezza però ne' granelli del miglio sembra che compensi le altre due qualità, che ad esso mancano. E finalmente si rileva in terzo luogo, che la linea di livello delle migliarole di piombo è più inclinata all'orizzonte che quella de' pallini della stessa materia, ma di diametro maggiore. Considerando ora tutti questi fenomeni insieme, ne consegue legittimamente, che tanto più la linea di livello di un semifluido s'accosterà ad essere orizzontale, quanto più le particelle che lo compongono tenderanno con perfezione ad essere di figura sferica, lisce e minute. Essendo orizzontale la linea di livello, ne' liquidi, possono adunque, anzi debbono concepirsi gli elementi loro essere indivisibili e di figura perfettamente sferica.

§. III. Occorrendo nelle sperienze, che seguono, confrontare fra se volumi di vasi cilindrici, conici ed anche prismatici, e di conoscere i pesi assoluti de' semifluidi in essi volumi contenuti, così crediamo opportuno di preparare in

questo luogo i materiali necessarj, onde agevolare tali calcoli all' uopo.

I.° Essendo l' angolo formato dalla linea di livello coll' orizzonte, per la sabbia 33° , per il miglio 23° , e per le migliarole di piombo 22° , $30'$ (§. 1.), avremo dalla Trigonometria la ragione del seno al coseno dell' angolo d' inclinazione appartenente alla sabbia, espressa da' numeri - $9 : 14$ per l' angolo d' inclinazione del miglio - - - $39 : 92$ e per l' angolo d' inclinazione delle migliarole di piombo - - - $38 : 92$

Laonde con tali ragioni in pronto facilmente può determinarsi o l' altezza o il raggio della base di un cono da qualsivoglia degli accennati semifluidi generato, qualora sianq l' una o l' altro dati.

II.° Procedendo con rigore ho trovato il peso del pollice cubo di sabbia - - - - - Dramme $7, 3$
 pollice cubo di miglio - - - - - $4, 2$
 pollice cubo di migliarole di piombo - - - - $39, 3$

III.° Chiamando A l' altezza d' un prisma rettangolare, L la lunghezza della base e D la sua larghezza, ed intendendosi date le dimentioni in pollici, avremo generalmente
 Volume del prisma rettangolare - - Pol. cub. ADL
 e per il peso d' un egual volume

di sabbia - - - - - Dram. $\frac{73 ADL}{10}$

di miglio - - - - - Dram. $\frac{42 ADL}{10}$

di migliarole di piombo - - - - - Dram. $\frac{393 ADL}{10}$

IV.° Chiamando A l' altezza di un cilindro, e di un cono, amendue con l' asse perpendicolare al piano della base, e D il diametro della medesima, farà generalmente

Volume del cilindro - - - - - Pol. cub. $\frac{11 AD^2}{14}$

e per il peso d' un egual volume

T t iij

$$\text{di sabbia} \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad \text{Dram.} \quad \frac{803 \, AD^2}{140}$$

$$\text{di miglio} \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad \text{Dram.} \quad \frac{33 \, AD^2}{10}$$

$$\text{di migliarole di piombo} \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad \text{Dram.} \quad \frac{4323 \, AD^2}{140}$$

$$\text{V.° Volume del cono} \quad - \quad - \quad - \quad - \quad \text{Pol. cub.} \quad \frac{11 \, AD^2}{42}$$

e per il peso d'un egual volume

$$\text{di sabbia} \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad \text{Dram.} \quad \frac{803 \, AD^2}{420}$$

$$\text{di miglio} \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad \text{Dram.} \quad \frac{11 \, AD^2}{10}$$

$$\text{di migliarole di piombo} \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad \text{Dram.} \quad \frac{1441 \, AD^2}{140}$$

VI.° Essendo D il diametro della base maggiore del cono tronco, e d il diametro della minore, A la sua altezza, è noto che farà generalmente

$$\text{Volume del cono tronco} \quad - \quad \text{Pol. cub.} \quad \frac{11 \, A(D^2 + Dd + d^2)}{42}$$

e però il peso d'un egual volume

$$\text{di sabbia} \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad \text{Dram.} \quad \frac{803 \, A(D^2 + Dd + d^2)}{420}$$

$$\text{di miglio} \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad \text{Dram.} \quad \frac{11 \, A(D^2 + Dd + d^2)}{10}$$

$$\text{di migliarole di piombo} \quad - \quad - \quad \text{Dram.} \quad \frac{1441 \, A(D^2 + Dd + d^2)}{140}$$

ARTICOLO II.

Della pressione verticale de' semifluidi .

§. 4. Ho architettato la macchina rappresentata di prospetto dalla figura II. per misurare con esattezza le pressioni verticali de' semifluidi. Nel mezzo d'una tavoletta di legno *AB* abbracciante due colonne verticali *PR QS*, alle quali può rattenerli a maggior o minor altezza, secondo il bisogno, dal piano d'una tavola orizzontale, che sostiene l'intero apparecchio, sono incavati più fori circolari, onde ricevere vasi di diversa grandezza, e di figura cilindrica o conica. In mezzo poi al traverso *RS*, che lega le sommità delle due colonne sopradette, è affissa la girella *E*, intorno a cui rivolgesi un filo, che sostiene da una parte la lance *C*, e dall'altra, passando per l'asse del vase accomodato nel foro competente sulla tavoletta *AB*, il fondo posticcio *D* del medesimo vase. E' chiaro pertanto, che determinandosi l'equilibrio meccanico fra la lance *C* ed il fondo *D*, si determinerà eziandio con precisione il peso equivalente alla pressione, che soffre il detto fondo *D* per la quantità del semifluido contenuta nel vase, a cui deve rattenerli congiunto.

ESPERIENZA II.

§. 5. Versando a diverse altezze delle tre maniere di semifluido, sabbia, miglio, e migliarole di piombo in due vasi cilindrici di latta, amendue alti poll. 6, e di base l'uno di poll. 2 di diametro, e l'altro di poll. 3., ho trovato facendo uso della descritta macchina i risultati che seguono

TAVOLA I.

Vase cilindrico alto poll. 6 col fondo di poll. 2 di diametro			
Altezze de' femifluidi	Pesi equivalenti alle pressioni sul fondo del vase		
	Sabbia	Miglio	Migliarole di piombo
Pollici	dram. gr.	dram. gr.	dram. gr.
2	21 : 15	18 : 0	177 : 0
4	28 : 0	26 : 30	220 : 0
6	35 : 0	33 : 45	-----

TAVOLA II.

Vase cilindrico alto poll. 6 col fondo di poll. 3 di diametro		
Altezze de' femifluidi	Pesi equivalenti alla pressione sul fondo del vase	
	Sabbia	Miglio
Pollici	dram. gr.	dram. gr.
2	76 : 30	49 : 0
6	139 : 0	88 : 0

Considerazioni.

§. 6. Col soccorso delle formole esposte (§. 3. n. iv.) agevolmente ricavasi dagli sperimenti sopra descritti, che le principali

cipali proprietà riguardo alle pressioni verticali de' semifluidi contenuti in vasi cilindrici, sono 1.^o che la pressione contro il fondo è minore del peso assoluto della colonna semifluida ad esso soprastante, essendo nella sabbia il terzo, e nel miglio e migliarole di piombo la metà circa di detto peso assoluto: 11.^o che siffatte pressioni verticali procedono da vicino in ragione delle radici delle altezze nello stesso vase cilindrico: 111.^o e che per ultimo in differenti vasi cilindrici sotto la medesima altezza s'accostano le pressioni contro i fondi, nella sabbia, più alla ragione de' cubi, che de' quadrati de' diametri loro, e per converso nel miglio più alla ragione de' quadrati che a quella de' cubi. Debbo confessare che mi trovava sì lontano dal prevedere le proprietà dichiarate, che a stento mi sono accinto all'esecuzione di tali esperienze, persuaso già, come avrebbe sembrato ad ogn'uno ragionevole, che le pressioni verticali de' semifluidi su fondi di vasi cilindrici dovessero pareggiare il peso assoluto delle colonne semifluide soprastanti, seguire nello stesso vase cilindrico la ragione delle altezze, ed essendo costante l'altezza in differenti vasi cilindrici, seguire la ragione de' quadrati de' diametri loro. Sembra a me pertanto non poter derivare che la pressione effettiva sul fondo posticcio *AB* (*Fig. III.*) del vase cilindrico *AHLB* sostenuto verticale, come abbiamo indicato nell'antecedente paragrafo, sia minore del peso assoluto della colonna semifluida *ADEB*, o *AFGB* se non che dal sostentamento proveniente dall'attrito che incontrano le particelle semifluide aderenti alle pareti dello stesso vase; e di fatti trovando le particelle del miglio e delle migliarole di piombo, attesa la figura e lisciatura loro, meno ostacoli e ritegno nelle pareti del vase, osserviamo che in tali semifluidi vie più s'accostano le pressioni effettive alle assolute. Siccome poi in tutte e tre le maniere di semifluido adoperate negli esperimenti generali sul fondo posticcio *AB* lo stesso cono *ACB* si trovando il semifluido inalzato nel vase all'altezza *AD* di 2 poll., che alla *AF* di 4, o 6 (§. 5. n. 1.); ne segue che la pressione effettiva sofferta dal fondo *AB* ha maggior ragione al peso assoluto della colonna semifluida della prima altezza *AD*, che la pressione effettiva al peso assoluto della colonna semi-

fluida della seconda altezza AF , e quindi la pressione effettiva nell'altezza AD alla pressione effettiva nell'altezza AF avrà maggior ragione che l'altezza AD alla AF , e perciò la pressione effettiva del semifluido nell'altezza maggiore sarà minore della pressione effettiva nell'altezza minore di quello converrebbe alla ragione delle altezze dello stesso semifluido; il che è conforme pure a ciò che abbiám raccolto dall'esperienza. Seguendo queste idee potrebbe tentarsi ancora qualche spiegazione della terza sopraccennata proprietà riguardo alle pressioni verticali de' semifluidi contenuti in vasi prismatici. Ma siccome non possono considerarsi questi ragionamenti in fine che sole conghietture; così non giudico di perdere intorno a ciò tempo maggiore inutilmente.

ESPERIENZA III.

§. 7. Nell'apparecchio indicato (§. 4.), ho accomodato de' vasi conici di latta, ed infondendo in essi a differenti altezze de' semifluidi, ho cercato in ogni caso la pressione, che soffrivano i fondi sottoposti alle basi inferiori de' detti coni. Due sono stati i coni, che ho messo in opera, tutti e due colla base inferiore di pollici due, ma il lato di uno, essendo l'asse verticale, era inclinato all'angolo di $53.^{\circ}$ sul piano soggetto, e nell'altro formava l'angolo di $23.^{\circ}$. Ed ecco i risultati degli esperimenti eseguiti col primo degli enunciati vasi.

Vase conico alto poll. 6 colla base inferiore di poll. 2 di diametro, e col lato inclinato a 53°

Altezze de' Semifluidi.	Pesi equivalenti alle pressioni sul fondo sottoposto alla base inferiore del vase.		
	Sabbia	Miglio	Migliarole di piombo.
Pollici	Dram. gr.	Dram. gr.	Dram. gr.
2	19 : 20	5 : 0	86 : 0
$3 \frac{1}{4}$	21 : 15	7 : 25	- - - -
4	21 : 45	8 : 10	134 : 30
6	23 : 30	9 : 25	- - - -

Essendosi ad un vase conico alto poll. 4, e nel rimanente conforme al sopradetto, faldato un coperchio di latta alla maggior base superiore, lasciando in centro di detto coperchio un foro circolare di 2 poll. di diametro, di maniera che sostenuto coll' asse verticale dalla solita macchina (9.4) e colla base maggiore in giù, il foro preparato in essa uguagliava la minor base superiore pure di poll. 2 di diametro, si è trovato, che in tal vase, riempito di sabbia, cioè essendo in esso la sabbia alta poll. 4, la pressione verticale contro il fondo sottoposto al foro equivaleva a - Dram. 24:30 ed essendo riempito di miglio, a - - - - - Dram. 11:0 Adoperando poi il secondo vase conico superiormente accennato ch'era alto poll. $3 \frac{1}{4}$, col lato inclinato a 23° , e colla base inferiore di poll. 2 di diametro, essendo riempito di sabbia, cioè essendo in esso la sabbia alta poll. $3 \frac{1}{4}$, si è tro-

vato, che la pressione verticale contro il fondo sottoposto al foro equivaleva a - - - - - Dram. 19 : 0
ed essendo riempuito di miglio, a - - - - - Dram. 6 : 20

Considerazioni.

§. 8. Ne' vasi conici pertanto, come si è veduto de' cilindrici (§. 6.), le pressioni effettive contro i fondi sono minori de' pesi assoluti delle colonne semifluide ad essi soprastanti, seguendo prossimamente la ragione delle radici delle altezze del semifluido infuso nel vase; intorno alle quali cose possono farsi le riflessioni, che sonoli fatte nel sopraccitato luogo. Paragonando poscia i risultati del vase conico rovesciato che avea il foro fatto nella base maggiore, e del vase conico col lato inclinato $23.^{\circ}$ sull' orizzonte, coi corrispondenti del primo vase conico compresi nella tavola; si rileva, che nel vase conico rovesciato la pressione effettiva è bensì minore dell' assoluta, ma maggiore di quella che dà il vase conico uguale e diritto, e che la pressione effettiva nel vase conico col lato inclinato all'angolo di $23.^{\circ}$ è qualche cosa minore di quella, che provasi nell' altro vase conico col lato inclinato all'angolo di $53.^{\circ}$; di maniera che sembra che nel primo caso il semifluido circonfuso alla colonna di quello che sovrasta al foro, aumenti la pressione effettiva sul fondo, e che nel secondo, per essere meno inclinato il lato del vase conico, cioè per esservi meno quantità di semifluido circonfuso alla colonna semifluida soprastante al foro, s' aumenti la pressione effettiva sul fondo; il che però dee procedere fino ad un certo limite, osservandosi col confrontare da sè i risultati esposti nella tavola di questa esperienza III. con quelli compresi nella tavola I. dell' Esperienza II., che le pressioni effettive su i fondi de' vasi cilindrici sono maggiori delle pressioni effettive su i fondi de' vasi conici in parità di circostanze. Io certo avrei giudicato che essendo riempuito il vase conico *AHLB* sostenuto con l' asse verticale di semifluido, il fondo *AB* dovesse portare maggior pressione di quella, che soffrirebbe da una colonna semifluida *ADEB* rinchiusa in vase cilindrico, a cagione del

semifluido circonfuso *AHD ELB*, sembrando in certa maniera, che dovette questo caricarfi contro la fteffa colonna *ADEB* ed aumentare in conseguenza la preffione ful fondo *AB*; ma ciò non accadendo è duopo adunque conghietturare che all'oppofito la colonna semifluida *ADEB* che ha per bafe il fondo *AB* non agifca contro di effo nemmeno con quella libertà che agirebbe fe fi trovalfe rinchiufa in un vafe cilindrico; ficchè più impedimenti foffra per parte del semifluido ad effa circonfuso nel vafe conico che dalle pareti del detto vafe cilindrico a cagione dell' attrito, come abbiamo confiderato al §. 6.

§. 9. Dai tentativi che feci per conofcere fe i semifluidi abbiano tendenza a premere ancora verticalmente dal baffo all' alto, non m'è riuſcito di rilevar intorno a ciò effetto alcuno fenſibile, mancando in effi probabilmente queſta proprietà in confronto de' liquori per avere la loro linea di livello inclinata all' orizzonte come fi è dimoſtrato (§. 1.). Riguardo pertanto alle preffioni verticali di tali semifluidi, ciò che può ammetterſi con certezza in conseguenza delle eſpoſte eſperienze, fi è, che rinchiuſi in vafi cilindrici e conici rattenuti ſoſpeſi con l' aſſe verticale, *le preffioni verticali dall' alto al baffo ſono minori del peſo aſſoluto delle colonne semifluide ſopraſtanti al fondo de' fori, ſeguendo la ragione proſſimamente ſudduplicata delle altezze con quelle altre particolarità, che a ſuo luogo ſonoſi indicate; tra le quali una ſingolarmente merita di eſſer notata, cioè che le preffioni effettive ne' vafi cilindrici ſieno maggiori delle preffioni effettive ne' vafi conici ſotto altezze uguali. Proprietà tutte, che intanto paleſemente dimoſtrano agire i semifluidi, quanto al premere per linea verticale, con leggi benſì loro proprie, ma che partecipano di quelle de' ſolidi e de' liquidi in un tempo ſteſſo: imperocchè l' eſſere le preffioni effettive minori del peſo aſſoluto delle colonne semifluide ſopraſtanti a' fori, e maggiori ne' vafi cilindrici, che ne' conici, non può attribuirſi che a quel limitato grado di libertà, che hanno le particelle che li compongono, eſſendo certo, che ſe foſſero legate inſieme costituendo un ſolido ſolo, la preffione effettiva nel vafe cilindrico ſarebbe uguale all' aſſoluta, e nel vafe conico ſvanirebbe interamente portandofi*

tutto il peso assoluto dai lati dello stesso vase : e se fossero dette particelle al sommo libere e scorrevoli le une sulle altre a guisa di quelle de' liquidi , farebbero , qualunque fosse la figura del vase , le pressioni effettive uguali alle assolute , cioè al peso delle colonne semifluide soprastanti a' fori , e seguirebbero tali pressioni la ragione delle altezze , e non la ragione minore , cioè la sudduplicata delle medesime altezze , come s' è raccolto dagli esperimenti .

ARTICOLO III.

Della pressione orizzontale o laterale de' semifluidi .

§. 10. Il vase , di cui mi sono servito per misurare la pressione orizzontale o laterale de' semifluidi , era di figura prismatica , lungo poll. 16 , largo ed alto poll. 6 , con le due pareti lunghe stabili sul fondo , e delle altre due , una si movea sulla base , mediante un perno orizzontale , e l'altra poteva fermarsi a più o meno di distanza inserendola in canaletti verticali scavati nelle lunghe pareti stabili , ed in corrispondenti canaletti orizzontali fatti nel fondo del vase medesimo , onde ridurlo di maggiore o minor capacità secondo il bisogno . La parete mobile suddetta mettevasi in equilibrio col sospendere due lance alle due estremità di un cordoncino di seta (raccomandato nella metà dell'orlo superiore di essa , e che portavasi orizzontalmente all'altezza di poll. 7. lin. 7 sopra il fondo del vase passando sopra due girelle congegnate alle estremità opposte di esso) , e coll'aggravare del peso necessario quella , ch'era sospesa dalla parte , verso cui detta parete mobile dovea disporli al movimento . L'altra lance poi serviva a rattenere i pesi occorrenti all'equilibrio della parete mobile venendo premuta dal semifluido insuso nel vase .

ESPERIENZA IV.

§. 11. Due sono stati gli elementi , che ho avuto in vista nel rintracciare le leggi delle pressioni laterali de' semifluidi rinchiusi in un vase parallelepipedo rettangolo , l' uno la maggior o minor altezza , e l'altro la maggior o minor

estensione di essi in lunghezza in detto vase, rimanendo costante la larghezza del medesimo. La macchina sopra descritta fu costruita adattata a cotali esperimenti, da' quali, mettendo a cimento i nostri tre soliti generi di semifluido, cioè sabbia, miglio e migliarole di piombo, ho ricavati i risultati esposti nella seguente tavola.

Altezze del semi- fluido nel vase	Estensio- ni in lun- ghezza del semi- fluido nel vase	Pesi equivalenti alle pressioni laterali del semifluido, esercitanti la loro azione alla distanza di poll. 7 lin. 7 dal centro del moto della parete mobile.		
		Sabbia	Miglio	Migliarole di piombo
Pollici	Pollici	Dram. gr.	Dram. gr.	Dram. gr.
2	4	- - - - -	- - - - -	14 : 0
2	6	2 : 22	2 : 45	- - - - -
4	6	- - - - -	- - - - -	69 : 30
4	10	9 : 30	14 : 30	- - - - -
6	2	23 : 0	27 : 7	206 : 0
6	4	- - - - -	- - - - -	206 : 0
6	6	24 : 45	27 : 22	- - - - -
6	8	24 : 52	31 : 30	206 : 0
6	16	24 : 45	32 : 0	- - - - -

Considerazioni .

§. 12. E poichè rappresentando *ABCD* (*Fig. V.*) la sezione per lunghezza del vase parallelepipedo, che abbiamo

adoperato nell'esposta speriienza, ed AB la parete mobile intorno al perno B , e BH la linea di livello, in cui comporrebbe la massa semifluida $ABCD$ infusa nel vase, la parte di semifluido contenuta nello spazio ABH sarebbe quella, che si porrebbe in movimento, se venisse tolta di mezzo la detta parete mobile AB , rimanendosi l'altra contenuta nello spazio $BHDC$ immobile e stagnante nel vase; così è sembrato, singolarmente a quelli che trattarono sulla pressione de' terreni, che la pressione esercitata dall'intera massa semifluida $ABCD$ dipender debba dalla quantità contenuta nello spazio ABH ; di maniera che la massima pressione nel nostro caso per la sabbia sarebbe, posta l'estensione AH della massa semifluida nel vase poll. 9, lin. 4. (§. 3. n. 1.), nel miglio poll. 14, lin. 2, e nelle migliarole di piombo poll. 14, lin. 6, trovandosi costantemente alto il semifluido poll. 6. L'esperiienza però è ben lontana dal secondare simile ipotesi, avvegnachè ella ci fa conoscere, che la maggiore o minore estensione della massa semifluida nel vase sotto la medesima altezza di poll. 6 non porta alterazione computabile nella pressione sofferta dalla parete mobile passando perfino dalle massime estensioni sopraindicate a quella di soli poll. 2, oltre il qual limite non abbiamo creduto ragionevole di procedere, onde poter concludere già colle restrizioni proprie alla fisica de' corpi, che *le pressioni laterali de' semifluidi sono costanti sotto la medesima altezza, influendo poco o nulla la maggior loro estensione in lunghezza*, come si è veduto. Il che potrebbe spiegarsi in qualche modo riflettendo, che in qualunque situazione inclinata BA' si trasferisca la parete verticale BA , il semifluido infuso nel vase prontamente comporrebbe nella linea GE parallela alla sua linea di livello BH , e ciò dovendo succedere anche nella situazione inclinata vicinissima alla BA , e consistendo nella forza producente tale movimento infinitesimo impresso nella parete il valore della pressione laterale del semifluido contro di essa; dipenda perciò detta pressione soltanto dalla disposizione al moto di una quantità di semifluido assai piccola, diventando, per esprimersi in qualche maniera, indifferente alla parete mobile AB l'averne, rinchiuso in lunghezza dietro di se con maggiore o minore estensione. L'altra proprietà poi
che

che ricavasi dai risultati della medesima esperienza IV. si è, che, posta costante la distanza dal centro del moto, a cui deve agire la potenza necessaria ad equilibrare le pressioni laterali de' semifluidi, distanza che nel nostro esperimento era di poll. 7 lin. 7, si è, dico, che le pressioni laterali di tali semifluidi seguono, nella sabbia, più da vicino la ragione de' quadrati delle altezze, che la composta di detti quadrati, e delle radici delle medesime altezze, e nel miglio, e molto più nelle migliarole di piombo più da vicino la seconda che la prima delle enunciate ragioni: ovvero riducendo la distanza della potenza dal centro del moto uguale all' altezza del semifluido infuso nel vase, si ha per la ragione delle pressioni laterali della sabbia quella delle altezze, e per il miglio, e con più esattezza per le pressioni laterali delle migliarole di piombo la ragione composta delle ragioni delle altezze, e delle radici loro.

Non possiamo qui dispensarci di far vedere appunto come l'enunciata ragione seguita dalle pressioni laterali de' semifluidi, si lega e combina con la ragione delle radici delle altezze che seguono nelle pressioni verticali. E di fatto sia *ABCD* (*Fig. VI.*) la sezione per lunghezza di un vase parallelepipedo con la parete mobile *AB* sul perno *B* esposta alla pressione del semifluido che lo riempie. Ammettendo pertanto che la pressione orizzontale del semifluido in qualsivoglia punto della parete mobile *AB* sia proporzionale alla radice dell' altezza del semifluido che sovrasta, è chiaro che il piano *ABE* conterminato dalla parabola *AE*, di cui l' asse sia *AB*, ed abbia l' unità per parametro, indicherà la somma delle pressioni che soffre la parete mobile *AB*; sicchè chiamando *A* l'altezza *AB* di essa, detta somma sarà espressa

dalla quantità $\frac{2}{3} A\sqrt{A}$; e posto che sia *G* il centro di gravità del piano *ABE*, onde condotta l' orizzontale *GH* sia *BH* uguale $\frac{2}{5}A$, avremo per i comuni principj di Sta-

tica espresso sotto la forma $\frac{2 \cdot 2}{3 \cdot 5} \cdot A^2\sqrt{A}$ il momento di tutta la pressione laterale contro la parete *AB* disposta a gi-

rarfi sul perno B e rattenuta in equilibrio da una potenza equivalente P , che agisca colla distanza AB , cioè A , dal

centro di moto B : per il che farà $P \cdot A$ in ragione di $\frac{2 \cdot 2}{3 \cdot 5} A^2 \sqrt{A}$,

o sia P in ragione di $A \cdot \sqrt{A}$, vale a dire, che la potenza P occorrente a rattenere in equilibrio la parete mobile AB , soggetta alla pressione laterale del semifluido rinchiuso nel vase $ABCD$, è in ragione composta dell' altezza della parete, o del semifluido, e della radice della medesima altezza. L' esperienza ha corrisposto quanto basta per poter concludere, che le pressioni laterali de' semifluidi seguono l' indicata ragione, combinandosi in essa e irregolarità di figura ed un impedimento vicendevole nelle particelle di essi al loro pronto scioglimento, dalle quali e simili accidentalità si fa astrazione nell' esposto ragionamento matematico, ed è perciò appunto che le magliarole di piombo, componendo un semifluido più uniforme e regolare, s' avvicinano con maggior precisione all' enunciata legge. Nelle pratiche nullameno può usarsi nel calcolare la pressione laterale de' terreni la semplice ragione delle altezze per non abbondare di soverchio.

§. 13. Non sarà ora spregevole il far osservare, come i fenomeni risguardanti le pressioni laterali de' semifluidi s' uniformano, o per meglio dire s' accostano a quelli delle pressioni laterali de' liquidi attretti ad agire sotto condizioni uguali. E primieramente è noto per le leggi idrostatiche, che la parete AB soffrirebbe sempre la stessa pressione dal liquido infuso nel vase $ABCD$ qualunque sia l' estensione di esso liquido in lunghezza, purchè fosse innalzato costantemente all' altezza AB , su di che, da quanto si è veduto, i nostri semifluidi procedono del pari con tanta approssimazione, che per questo riguardo non potrebbe dubitarsi essere analogo il modo di agire de' primi a quello de' secondi. In secondo luogo poi, siccome è dimostrato pure dall' Idrostatica, che essendo il vase $ABCD$ riempito di liquido, il piano del triangolo ABF col lato orizzontale BF uguale al verticale BA , rappresenterebbe la somma delle pressioni orizzontali sofferte dalla parete AB , somma che può esprimersi dal-

la quantità $\frac{1}{2} A^2$ nominando A l'altezza AB ; così ne segue per i principj statici, che $\frac{1}{2} A^2$ indicherà la somma de' momenti di dette pressioni contro la parete mobile AB sul suo perno B ; e che la potenza P necessaria a rattenere in equilibrio detta parete sarebbe proporzionale al quadrato dell'altezza AB del liquido, che sta nel vase. Se i semifluidi pertanto non danno la potenza P che soltanto proporzionale all'altezza AB , come accade nella sabbia, o prossimamente in ragione composta di detta altezza, e della di lei radice, come nel miglio e più nelle migliarole di piombo; nulladimeno non può ad essi negarsi un modo di premere contro la parete AB analogo a quello de' liquidi: analogia, che si fa sempre più manifesta quanto che il semifluido è composto di particelle atte a sciogliersi e facilmente svolgersi le une sulle altre.

§. 14. Quantunque poi abbiassi veduto nell' articolo antecedente, che le pressioni verticali de' semifluidi sono minori del peso assoluto delle colonne soprastanti a' fondi, benchè di vasi cilindrici o prismatici, ciò però non toglie, che il fondo BC del vase prismatico $ABCD$, come pure se fosse di qualsivoglia altra figura, mentre poggia sul piano soggetto, non soffra l' intero peso della colonna semifluida $ABCD$ o di tutto il semifluido in esso vase rinchiuso, avvegnachè ognun ben vede, che per l'aderenza che in questo caso hanno le sponde ed il fondo a vicenda, gli sforzi laterali delle particelle semifluidе verso le sponde sono dalle medesime contrabbilanciati, e quindi rimanendo esse particelle immobili, deggiono, come se costituissero un solo tutto, aggravarsi contro il fondo del vase o contro il piano soggetto su cui è appoggiato. Non è difficile lo spiegare in oltre co' soli principj della Statica de' corpi la doppia azione esercitata dal semifluido rinchiuso dentro il vase $ABCD$, cioè di premere con tutto il suo peso contro il fondo CB e nello stesso istante contro le sponde laterali dello stesso vase. Si concepiscano perciò, per intendere questo fenomeno con chiarezza, tre corpi uguali M , P , N disposti regolarmente dentro il vase $ABCD$ come si vede nella figura VII. E' certo intanto che se i due laterali M N fossero congiunti e legati insieme con quello di mezzo P , il fondo BC porterebbe l'in-

tero peso de' corpi $M P N$ costituenti una massa sola, e le sponde $AB CD$ andrebbero esenti da qualsivoglia pressione de' corpi laterali $M N$, essendo nelle fatte supposizioni indifferente all' equilibrio di tutti e tre i corpi insieme il trovarsi o non trovarsi annesse dette sponde al fondo BC del vase. Ma siano i corpi laterali M, N sciolti, com'è proprio delle particelle semifluide, da quello di mezzo P , e congiunti i centri di gravità di essi corpi colle rette $MP NP$, presentino le verticali $ME PR NF$ i loro pesi assoluti, ed intorno alle verticali $ME NF$ siano costruiti i parallelogrammi $PH PG$ co' lati $MH NG$ perpendicolari alle sponde $AB CD$; faranno dunque in tal caso $MH NG$ gli sforzi o le pressioni esercitate da' corpi laterali $M N$ contro dette sponde $AB CD$, ed $MP NP$ que' ch' esercitano nello stesso istante contro il corpo di mezzo P . Ma siccome la forza composta PS che risulta dalle due $PL PI$ uguali e per diritto alle $MP NP$ uguaglia i due pesi assoluti $ME NF$ de' due corpi laterali $M N$, così si fa chiaro, che mentre le sponde $AB CD$ del vase soffrono le pressioni rappresentate dalle rette $MH NG$, il fondo BC è aggravato dall' intero peso assoluto de' tre corpi insieme $M P N$ in esso vase rinchiusi. Procedendo con simile scomposizione e composizione di forze, ciò che s'è provato di soli tre, può egualmente provarsi per qualsivoglia moltitudine di corpi, ch' esistessero aderenti sì, ma slegati l' uno dall' altro dentro il vase $ABCD$. Quindi apparisce, che il premere de' semifluidi lateralmente è un effetto derivante dalla stessa gravità delle particelle loro, e che hanno questa proprietà di più a differenza de' solidi per essere dette particelle l' una dall' altra slegate e libere.

ARTICOLO IV.

Della direzione, che tengono le particelle de' semifluidi per sortire dai fori orizzontali ne' vasi di figura cilindrica e conica.

ESPERIENZA V.

§. 15. Mediante l' apparecchio rappresentato dalla figura 11. si ratteneva un vase di figura cilindrica o conica fos-

peso con l'asse vetticale, e col suo fondo orizzontale. In tale posizione pertanto si dovranno sempre intendere rattenuti i vasi co' quali furono eseguiti li seguenti sperimenti; avvertendo però, che i vasi conici si rivolgevano colla base maggiore all'insù, e che per foro in detti vasi dovrà intendersi la loro base minore rivolta all'ingìù, e costituita in un piano orizzontale.

Semifluido sabbia.

N. I. Vase cilindrico alto poll. 6, di poll. 2 di diametro, e col foro di lin. 4 di diametro nel suo fondo orizzontale. Innalzato il semifluido in questo vase all'altezza di poll. 2, e di poll. 4, e lasciando in ogni caso libero l'efflusso pel foro del fondo, la superficie superiore del semifluido disposta in un piano orizzontale, s'incavò con qualche irregolarità di figura in centro di detta superficie dal primo istante, ed abbassandosi il semifluido per qualche linea verticalmente le particelle semifluide di mano in mano dall'orlo di detto incavo alla superficie interna del vase s'incamminarono tutte per l'asse del medesimo, costituendo in figura conica col vertice in giù la superficie del semifluido. Formato ch'ebbe in tal guisa il semifluido, e perfezionato il suo imbuto, continuò esso a scaricarsi alimentando sempre il foro di particelle semifluide discese dall'alto di detto imbuto, restando, finita la scarica, stagnante dentro il vase una certa quantità di semifluido disposto nella propria linea di livello dalla superficie interna del vase all'orlo del foro esistente nel suo fondo.

Innalzando nello stesso vase il semifluido all'altezza di poll. 6, cioè empiendolo interamente, e dandogli libertà di escire dal foro suddetto, s'abbassa per tre o quattro linee circa d'altezza, mantenendoli orizzontale in superficie senza scomponersi le particelle in essa costituite; succedono quindi l'incavo e l'imbuto e si compie la scarica come nel caso antecedente.

Adattando al medesimo vase un fondo col foro di 6 lin. di diametro si osservano effetti presso poco uguali a' descritti.

N. II. Vase cilindrico alto poll. 6, di poll. 3 di diame-

tro. Eseguendo con questo vase gli esperimenti eseguiti col sopraindicato nel n. 1. si osservano accadere gli stessi fenomeni, se non che apparisce in superficie minore la discesa verticale effettuandosi prestamente l'incavo e l'imbuto.

N. III. Vase conico alto poll. 6, e col lato inclinato sull'orizzonte all'angolo di 53° .

Essendo fornito questo vase tanto del foro di lin. 4, che di lin. 6 di diametro, il semifluido, che lo riempiva dal primo istante che cominciò a fluire dal foro, formò in superficie una specie d'imbuto intorno l'asse del cono, che andò di mano in mano dilatandosi, finchè pervenne alla superficie interna del vase. Le particelle in superficie del semifluido circonfuse all'imbuto nascente si veggono discendere verticalmente, abbassandosi il semifluido nel vase, e ad imbuto compiuto discendono per la superficie conica di esso, fluendo per tale via dal foro del vase medesimo, il quale resta in fine interamente voto.

N. IV. Il getto del semifluido sabbia usato in questi esperimenti nell'uscire da' fori de' fondi orizzontali di vasi cilindrici e conici descritti a' NN. 1. II. III., dal foro in giù per poll. 12, ed anche 15 prosegue raccolto, restringendosi sotto un diametro presso a poco la metà di quello del foro, prendendo la figura di un cono tronco; vicino al foro però dimostra rivolgersi con qualche convessità verso l'asse del medesimo getto: indi le particelle semifluide si veggono spargersi e allontanarsi dalla intrapresa via, e sempre più si osserva maggiore lo spargimento, e l'allontanamento di esse quanto più lungo si fa il getto, talmentechè v'è ragione a credere, che seguendo senza impedimenti per considerabile altezza si convertirebbe egli in una specie di pioggia.

Semifluidi miglio e migliarole di piombo.

N. V. Applicato al vase N. 1. il fondo col foro di lin. 4 di diametro, si è posto in esso il semifluido all'altezza di poll. 6. Scaricandosi il semifluido pel detto foro mantenne la sua superficie orizzontale così disposta da bel principio per la discesa di poll. 3 lin. 6; quindi cominciò a farsi più e più concava intorno l'asse del vase, finchè pervenuta a poll.

4 lin. 8 , si costituì in superficie conica , che è quanto a dire , che il semifluido formò a detta distanza soltanto , presa dietro la superficie interna del vase , e perfezionò il suo imbuto . Le particelle semifluide comprese nella superficie discesero senza scomporsi in direzione verticale ; ma cominciando a divenire più e più concava , le più vicine all'asse successivamente s' incamminavano per l'asse medesimo al foro , continuando a discendere verticalmente le particelle rimanenti ad esse circonfuse , per modo tale che soltanto perfezionato l'imbuto si vedevano partire le più lontane aderenti alla superficie interna del vase per portarsi intorno l'asse del medesimo , e mettervi per tale via in pronto , onde fortire dal foro fatto nel suo fondo , cessando ogni movimento verticale . Terminato l'efflusso rimase immobile certa quantità di semifluido disposto nella propria linea di livello dall'orlo del foro alla superficie cilindrica del vase .

Nello stesso vase , essendo empito di semifluido , ed avendo nel suo fondo il foro di lin. 6 di diametro , cominciò ad incavarli o farsi concava la superficie orizzontale del semifluido , discesa dall'altezza di poll. 4 , ed essendo il foro di lin. 11 di diametro , dall'altezza di poll. 4 lin. 10 . Nel restante le particelle del semifluido proseguirono come sopra .

N. VI. Vase cilindrico descritto al N. 11.

Empiando questo vase di semifluido , ed eseguendo con esso i medesimi esperimenti , si osservò , che essendo fornito il suo fondo del foro di lin. 4 di diametro , la superficie orizzontale del semifluido principiava a diventare concava discesa dall'altezza di poll. 1 , lin. 10 , e l'imbuto si stabilì all'altezza verticale di poll. 3 , lin. 11 , tolta nella superficie cilindrica del vase ; e che avendo il foro lin. 6 di diametro , il concavo appariva , essendo discesa la superficie del semifluido per poll. 2 , lin. 1 ; e sotto il foro di lin. 11 di diametro , per poll. 2 , lin. 9 . Quanto al movimento delle particelle semifluide tutto accadde come s'è dichiarato nel N. v. antecedente .

N. VII. Vase conico alto poll. 6 , e col lato inclinato sull'orizzonte all'angolo di 53°

Trovandosi fornito questo vase del foro di lin. 4 , o di lin. 6 di diametro , ed essendo riempito di semifluido , la

superficie orizzontale di questo comincia dal primo istante, che lasciassi libero l'efflusso, a farsi concava dalla superficie conica interna del vase intorno all'asse del medesimo con uniformità e regolarmente: e va divenendo vie più concava proseguendo la scarica del semifluido. Le particelle poi situate in superficie si veggono fornite di due moti nello stesso tempo, cioè del verticale discendendo, minorandosi la massa semifluida nel vase, e dell'obliquo per incamminarsi verso l'asse del medesimo, compiendosi in tal guisa la scarica totale.

N. VIII. Vase conico alto poll. $3\frac{1}{2}$ col lato inclinato sull'orizzonte all'angolo di 23° .

Preparato questo vase col foro di lin. 4, o di lin. 6 di diametro e caricato interamente di semifluido, tutto accade come nel vase antecedente N. VII, salvo che la concavità in superficie più presto acquista profondità notabile sembrando anzi che poco dopo cominciato l'efflusso si costituisca sotto una certa linea di livello costante fino a scarica compiuta.

N. IX. I getti verticali di questi semifluidi miglio e migliarole di piombo nel sortire da' fori orizzontali de' vasi indicati a' NN. v. vi. vii. viii. si conformano nella figura di cono tronco, la di cui base minore è il foro del vase. Le particelle semifluidi fortite dal foro veggonvi vie più discostarsi le une dalle altre quanto più sono discese al basso, mantenendosi però tutte insieme dentro il volume dell'accennato cono tronco. Le particelle componenti il getto formato dalle migliarole di piombo si tengono più raccolte che quelle del miglio, e conformano sotto al foro il getto con qualche convessità verso il suo asse, nell'uno e nell'altro getto si osservano inoltre tratto tratto in diverse loro sezioni orizzontali arrestarsi e sospenderli le particelle in esse comprese, dimostrando quasi in quell'istante di equilibrarsi nell'aria dentro cui nuotano e muovonli.

Considerazioni.

§. 16. Dagli esperimenti pertanto esposti nell'antecedente esperienza, ma singolarmente da quelli che si son fatti col miglio e le migliarole di piombo, si raccoglie, che quanto
a' vasi

a' vasi cilindrici v' ha una certa altezza determinata, a cui innalzati i semifluidi suddetti cominciano a disporre dal primo momento dell' efflusso la superficie loro in imbuto, facendosi vie e vie più concava, oltre la quale rialzandoli la mantengono parallela all'orizzonte, finchè ad essa pervengono; altezza poi che va crescendo, aumentandosi il diametro del vase e diminuendosi il diametro del foro orizzontale, ch' è in centro del di lui fondo; dal che apparisce il sistema dell' efflusso in tali vasi dipendere dalla combinazione o concorrenza di tre elementi nello stesso tempo, cioè dall' altezza del semifluido nel vase, dal suo diametro, e da quello del foro costituito nel suo fondo. E quanto a' vasi conici dee concludersi derivare il sistema del loro efflusso sopra tutto dall' altezza del semifluido in essi infuso, e dalla minor o maggior inclinazione all' orizzonte de' lati loro, non essendosi potuto scorgere differenze di effetti per la diversa grandezza de' fori da lin. 4 a lin. 6 di diametro. Ma non v' ha dubbio però che in fine non debba riguardarsi il sistema di efflusso ne' vasi cilindrici come un caso di quello de' conici e viceversa, avvegnachè ne' primi lo stesso semifluido, che li riempie, costituisce intorno al loro fondo colla quantità, che osservasi stagnante, terminato l' efflusso, una base conica come se tale fosse per quel tratto la figura di detti vasi cilindrici. Benchè poi da questi esperimenti non siasi rilevato che la direzione del moto delle particelle costituite in superficie; nulladimeno sembra intanto, che dal moverli queste per linee verticali fino a certa distanza dal foro, non possa ciò avvenire, se non che col concorrere al foro medesimo non solo le particelle ad esso soprastanti, ma le laterali ancora, e dover continuare ciò anche cominciata la concavità della superficie continuando a vedersi dette particelle fornite ancora del moto verticale, congiunto però coll' inclinato verso l' asse della concavità medesima. Diminuendosi l' attività in detto moto verticale, mentre s' aumenta l' ampiezza e la profondità dell' imbuto, egli è evidente contrassegno avere in tale situazione le particelle soprastanti al foro preso tale vantaggio a sortire da esso sopra le laterali, che finalmente nemmen una ne può sortire perfezionato l' imbuto, nel qual caso l' efflusso al foro viene alimentato dalle

sole particelle costituite nell' alto dell' imbuto medesimo . E tutto ciò scorgeasi pure accadere similmente ne' vasi cilindrici non meno che ne' conici, soltanto colla differenza in questi, che sembrano le particelle soprastanti al foro avere anche sotto le maggiori altezze più attività a farsi strada che le laterali, comparando qualche concavità in superficie dall' istante che comincia l' effluo . Questo è quello, che può dirsi per ora all' indigrosso intorno alla direzione che tengono le particelle de' semifluidi dentro i vasi da' quali effluiscono, esaminando il movimento della loro superficie costituita da bel principio in un piano orizzontale .

§. 17. Esaminando poi l' andamento e la figura del getto verticale formato da' semifluidi nel loro effluo , siccome nel semifluido sabbia viene esso per la maggior parte alimentato dalle particelle che successivamente vanno discendendo dall' alto dell' imbuto, che generasi in superficie col cominciare dell' effluo medesimo, dirigendosi elleno in conseguenza per tale via al foro; così sembra che la figura conoidale assunta del getto verticale di tale semifluido debba indicare, che le particelle, che mantengono l' effluo seguono la prima direzione loro inclinata verso il centro del foro anche sortite dal medesimo . La convessità pure, che ha il getto rivolta verso il di lui asse vicino al foro, dimostra che procedono le particelle semifluide intorno l' asse del getto di moto composto, dell' inclinato cioè secondo il quale sortono, e del verticale generato dalla gravità loro . Lo spargersi poi le particelle semifluide componenti il getto dopo avere unitamente trascorso il notevole spazio verticale di 12 in 15 pollici, dee attribuirsi certamente all' azione , che prende l' aria sottoposta contro di esse, debilitandosi di mano in mano nelle particelle circonfuse al getto la forza obliqua, che tende a tenerle raccolte a quelle che scorrono in direzione dell' asse del medesimo . Ma come ragioneremo intorno al getto del miglio e delle migliarole di piombo , conformandosi pure esso anche in questi semifluidi bensì sotto la figura di un cono tronco, ma tutto all' opposto di quello che accade nella sabbia, cioè colla base minore al foro orizzontale del vase? Che ciò accader debba, non già perchè in cotali semifluidi non sieno dirette eziandio le particelle al cen-

tro del foro, benchè le particelle in superficie si veggano discendere per linee verticali, ma perchè a cagione della grandezza figura e disposizione loro dieno all'aria libero passaggio, onde riacquistare per la via più breve il posto primiero da cui viene cacciata, e che in conseguenza sia essa che le segrega e disunisca fino da principio del loro effluo, non ci potrebbe accertare a mio credere che un'esperienza nel vacuo Boyleano; tutto che veggasi che nelle migliarole di piombo per essere le particelle semifluide pesanti si tengono esse più raccolte che quelle del miglio leggiere e facili a lasciarsi condurre dall'aria in moto. Egli è vero che all'aria pure si attribuisce comunemente lo spargimento di una massa di pallini cacciata fuori da un archibugio, il che diventa un caso moltissimo confimile a' nostri getti, ne' quali la forza impellente nelle particelle, che si presentano al foro, è la velocità che possono aver acquistata dentro il vase; ma non può nulla ostante concepirsi il fenomeno con chiarezza. Ciò però ch'è presumibile si è, che al foro soltanto in siffatti semifluidi le particelle ad esso tratto tratto concorse s'accostano vicendevolmente in quell'istante quanto loro è possibile contrastando le une alle altre la libera fortita dal medesimo foro; il che accadendo come di fatto accade, attentamente osservando, non può non sospettarsi concorrere al foro le particelle semifluide con direzioni inclinate verso il di lui centro. Cerchiamo però mediante l'esperienza di acquistare più precise nozioni su questo soggetto.

ESPERIENZA VI.

§. 18. (a) Tinta a nero della sabbia consuetamente impiegata in questi sperimenti, e del miglio a color rosso, si è osservato, che 1. componendosi in un vase cilindrico uno strato di sabbia nera alto poll. 2, con altro strato egual-

Y y ij

(a) Questo pensiero, che a me è venuto in mente senza averne avuta da altri notizia o traccia alcuna, applicato, ed esteso, ad altre materie analoghe potrebbe servire a molto utili e curiose scoperte.

mente alto di sabbia comune, e poscia lasciandosi libero l'effluo dal foro preparato in centro del di lui fondo, forte sul bel principio un po' di sabbia componente lo strato inferiore, indi comparisce mescolata, e ben tosto effluisce tutta quella dello strato superiore, compiendo la scarica la rimanente dello strato inferiore eccetto quella parte che componesi sul fondo nella propria linea di livello dall' orlo del foro alla parete del vase.

II. Empiendo un vase conico di sabbia a due colori distinti in due strati, vedesi cominciare l'effluo il color inferiore, e proseguire mescolato a due colori fino a scarica compiuta.

III. In un vase cilindrico alto poll. 6 infuso del miglio colorito a rosso all'altezza di poll. 4, e del miglio naturale all'altezza dei due pollici rimanenti, si osserva effluire dal foro fatto in centro del fondo di detto vase il miglio inferiore rosso, poscia comparire frammischiato con quello dello strato superiore, compendosi la scarica col medesimo. Sul fondo però del vase rimane stagnante parte del miglio inferiore rosso costituito come altre volte s'è detto.

IV. Nello stesso vase componendosi due strati uguali alti poll. 2 uno di miglio rosso, e l'altro di naturale, esce il miglio dello strato inferiore, finchè la superficie dello strato superiore disposta orizzontale discende, senza scomporsi, per piani paralleli a sè stessa; ed esce frammischiato con quello dello strato superiore dacchè principia la superficie a farsi concava, sortendo finalmente schietto il miglio rimanente dello strato superiore, e compendosi così la scarica totale col solito avanzo in fondo del vase di quella qualità di miglio con cui si compone lo strato inferiore.

V. Caricato il vase conico alto poll. 6, e col lato inclinato a $53.^{\circ}$ sull'orizzonte di miglio rosso all'altezza di 3 poll. e di miglio naturale all'altezza degli altri 3 poll. rimanenti, comincia l'effluo col miglio rosso dello strato inferiore, poscia disponendosi la superficie del semifluido in imbuto continua col miglio a due colori in confusione, confusione che diventa meno e meno osservabile, compiendo la scarica totale del vase il miglio naturale componente lo strato superiore.

Considerazioni.

§. 19. Confrontandosi pertanto i risultati di questa sperienza gli uni cogli altri, raccogliamo con certezza, che nell'effluire i semifluidi da' fori orizzontali fatti intorno il centro de' fondi di vasi rattenuti con l'asse verticale, dirigonfi al foro le particelle inferiori, e di mano in mano le più prossime al medesimo, sino a che la superficie di tali semifluidi costituita orizzontalmente così si mantiene discendendo soltanto per piani paralleli senza scomporsi; ma poichè comincia essa a divenire vie e vie più concava, essere questo indizio certo che concorrono al foro non solo le inferiori, ma eziandio le superiori insieme, e con maggior concorso le seconde quanto che s'accosta a stabilirsi in imbuto, ed arrestarsi interamente il concorso delle inferiori a imbuto perfezionato. Che se così accade ne' vasi che vanno vuotandosi, è chiaro che possiamo tener per certo, che se in un vase fosse talmente costituita l'altezza del semifluido, che la di lui superficie potesse rimanere orizzontale per qualche spazio di discesa a efflusso corrente, e venisse infusa quantità di semifluido uguale a quella che forte dal foro, onde si conservasse costantemente alla stessa altezza, in tale combinazione di cose l'efflusso verrebbe alimentato regolarmente dalle particelle semifluide più vicine al foro, e così di mano in mano dalle successive poste in necessità di occupare il luogo dalle prime abbandonato. Nullameno i seguenti esperimenti dilucideranno ciò con maggior certezza.

E S P E R I E N Z A VII.

§. 20. La figura VIII. rappresenta la sezione verticale del vase di vetro, che abbiamo in questa sperienza adoperato, di cui l'altezza AC è poll. 4, lin. 10, il diametro AB poll. 2, lin. 2. Applicato a tal vase il fondo CD di latta col foro E in centro di lin. 4, la superficie AB costituita in un piano orizzontale del semifluido miglio, che lo riempie, e che si lascia effluire dal detto foro E , si conserva orizzontale per la discesa AM di poll. 1, lin. 2, pervenu-

Y y iij

ta in MN comincia a farsi concava, e di mano in mano sempre più concava, sicchè perfeziona e stabilisce il di lei imbuto alla profondità AH di poll. 3, lin. 8, restando stagnante dentro il vase dal suo fondo CD all' altezza CF o DG di lin. 8 la quantità di semifluido FCE GED intorno al foro E composta nella di lui conveniente linea di livello FE o GE . Questi sono gli accidenti, che accadono nella superficie del semifluido che riempie il vase $ACDB$ nel corso del suo vuotamento. Passando poi ad osservare il moto delle particelle semifluidi aderenti alla parete del vase si è notato

I. Che col cominciare l'efflusso mettonsi in moto tutte le particelle semifluidi comprese nell' altezza AF o BG restando immobili le disposte nella rimanente altezza del vase FC o GD , movimento, che gradatamente dal basso all' alto va diventando insensibile, quanto più va scemando il semifluido in altezza, di modo che quand' è ridotto all' altezza CH con le particelle comprese in CF se ne veggono altre ancora da F in H egualmente immobili, attendendo per così dire il momento di portarsi al foro per la superficie dell' imbuto, già in tal luogo, come s' è avvertito, compiuto e perfezionato dal semifluido.

II. Presa diligentemente la rispettiva distanza di due particelle r , s sovrapposte l'una all'altra in linea verticale, e vicino alla superficie AB del semifluido, che riempie il vase, e così pure quella di due altre z , x poco sotto il punto N , donde la detta superficie comincia a farsi concava, si è osservato, che ridotto mediante l'efflusso il semifluido in MN , cioè all' altezza CM , sì le prime che le seconde particelle sonosi mantenute discendendo nella loro linea verticale; ma le prime r , s passate sotto il punto N s' accostarono l'una all'altra più sensibilmente che le z , x di altrettanto discesse verso il punto L , delle quali però l' inferiore x dimostrò di essersi qualche poco discostata dalla parete.

III. Facendo attenzione al movimento di una sola particella r costituita in sommità del vase, ed infondendo in esso di continuo nuovo semifluido, onde mantenerlo alla primitiva altezza CA , si è osservato che essa discendeva bensì per linea verticale, ma che nello stesso tempo veniva vie-

più stimolata ad internarsi dentro il vase essendosi perduta interamente di vista pervenuta intorno al luogo *G*.

IV. Sottomettendo allo stesso vase di vetro *ACDB* (*Fig. IX.*) il fondo *CED* di figura conica, il cui lato *CE* o *DE* era inclinato sul piano soggetto *FG* all'angolo *CEF* o *DEG* di 23° conveniente alla linea di livello del semifluido meglio scelto per questi esperimenti (§. I.), sonoii confermati tutti gli accidenti descritti ne' NN. I. II. III. nel movimento delle particelle semifluide aderenti alla parete del vase *ACDB*, scorgendosi in fine che niente importava avere sottoposto al vase il fondo *CD* (*Fig. VII.*) orizzontale, poichè lo stesso semifluido infuso in esso si stabilì da per sè il fondo *FEG* di figura conica uguale precisamente a quella del fondo artificiale *CED* immediatamente applicato al vase medesimo, come ora abbiamo dichiarato.

Considerazioni.

§. 21. Benchè pertanto nella sopra esposta sperienza VII. non abbiassi potuto rilevare se non che la direzione del moto delle particelle semifluide aderenti alla parete del vase di vetro che le conteneva, non potrà non accordarsi però che le osservazioni fatte su tali particelle contribuiscono moltissimo, onde conghietturare sulla direzione del moto delle interne tolte alla vista dall'opacità propria de' semifluidi: mentre egli è certo, che fino a che la superficie *AB* conservasi orizzontale o parallela a sè stessa, tutte le particelle costituite all'altezza *Dr* oppure *Ds* deggiono muoversi del pari che le *r*, *s* aderenti alla superficie del vase. Possiamo pertanto ormai, combinando e considerando insieme i fatti presentatici dalle tre sperienze riferite nel presente articolo, conchiudere con certezza, che qualora l'altezza del semifluido infuso in un vase cilindrico fosse tanta che potesse mantenerli orizzontale la superficie del semifluido, che deve esfluire dal foro fatto in centro del fondo di detto vase, e che il semifluido nel vase fosse ridotto a stato permanente, sicchè tanto ne venisse continuamente sovrapposto quanto ne andasse uscendo dal foro, possiamo, dico, in tale sistema di effluo conchiudere con certezza essere tutte in moto le par-

ticelle semifluide dentro il vase, ed avere tutte oltre al moto verticale una chianata o tendenza al foro, la cui attività va crescendo dalle particelle superiori alle inferiori diventando massima in quelle, che trovansi immediatamente sul fondo di figura conica, che il semifluido da per sè si forma e stabilisce; e che mercè di tal chianata al foro succeda, che il moto verticale delle particelle semifluide sia più veloce di mano in mano nelle superiori che nelle inferiori, di maniera che combinasì col maggior movimento di chianata al foro un minore movimento di discesa per linea verticale verso il fondo, e viceversa. Quindi non senza fondamento si può ammettere, che stante la combinazione di detti due movimenti le particelle semifluide circonfuse a quelle della colonna soprastante al foro discendano dall' alto, e s'incamminino verso il fondo del vase percorrendo linee curve, le di cui convessità rivolte verso le sponde del vase divengano vie più rimarchevoli quanto più sono vicine alle sponde e s'appressano al foro (*Fig. X.*), presentandosi ad esso perciò le particelle laterali, che concorrono all' efflusso con una velocità derivante da fissatto moto composto; ma in quanto spetta il grado di velocità delle particelle nel momento di effluire cercheremo di accertarcene con esperimenti particolari, bastando per ora di esserci assicurati della direzione, che tengono le particelle de' semifluidi nel sortire da fori orizzontali in vasi cilindrici, potendosi conghietturare similmente quella, che debbono seguire effluendo da vasi conici.

§. 22. Passando ora ad esaminare l' analogia che osservano i nostri semifluidi co' liquidi quanto sia alla direzione che tengono sì le particelle degli uni che degli altri, onde sortire da fori orizzontali fatti ne' fondi di vasi cilindrici o conici, si rileva intanto che il semifluido sabbia, tuttochè di particelle minutissime, è comparso nelle nostre sperienze meno atto a mantenere la superficie orizzontale in confronto del miglio e delle migliarole di piombo; il che fa vedere, che anche per questo conto tanto più procedono in via analoga i semifluidi co' liquidi, quanto le particelle loro sono disposte per la figura e liscezza a sciogliersi e raggirarsi le une sulle altre. Di maniera che parrebbe, che un liquido, le

do, le di cui particelle debbono concepirsi al sommo grado perfettamente sferiche e lisce, dovette nello scaricarsi dal foro orizzontale fatto nel fondo di un vase mantenere costantemente la superficie orizzontale sino a scarica compiuta, senza che accada in essa coll' accostarsi al fondo, come accade ne' nostri semifluidi, indizio d'imbuto alcuno. Eppure l'esperienze istituite dagl' Idrodinamici, onde stabilire questo fatto, sono tuttora contraddicenti le une alle altre: pretendono alcuni la generazione dell' enunciato imbuto a più o meno distanza dal fondo del vase secondo la di lui figura o la grandezza del foro per cui esce il liquido che va da esso vuotandosi; e pretendono altri non darsi ne' liquidi generazione d'imbuto alcuno, ma vuotarsi eglino interamente mantenendo la superficie orizzontale sino a efflusso compiuto. Non è ora mio propolito d'internarmi su tale questione, e mi sia soltanto lecito il dire difficilissimo essere a tal uopo istituire un' esperienza decisiva e libera da illusioni e da equivoci, e ciò non asserisco senza ragione, mentre essendomi per mera curiosità accinto sul momento ad eseguire qualche sperimento, scegliendo un vase di figura conica come più atta a dover produrre l'imbuto, ed accadendomi di vedere la generazione di questo succedere ora a maggiore ed ora a minor distanza dal foro, mi venne il sospetto, che non si lasciasse il tempo sufficiente all' acqua infusa nel vase di equilibrarsi, e consumare il moto vorticoso, che non può a meno d'introdursi nella di lei massa colla successiva infusione dall' alto; e di fatti usata tale avvertenza non m' è riuscito durante il vuotamento del vase scorgere segno alcuno in superficie d'imbuto e nemmeno di concavità. Ma comunque sia la cosa, egli è certo, che nasca o non nasca l'imbuto presso il fondo ne' liquidi, ciò nonostante mostrano essi di procedere similmente a' semifluidi nell' effluire da' fori orizzontali de' vasi, che li contengono, bastando a stabilire tale conghiettura la proprietà comune di mantenere la superficie orizzontale, quantunque pe' secondi soltanto dovette occorrere certa determinata altezza: quindi è che si possa ragionevolmente presumere, che ne' liquidi pure a somiglianza de' semifluidi, anzi ne' primi con maggiore perfezione ed attività che ne' secondi, effluenti dal foro orizzontale di un

vase, in cui vengano mantenuti a costante altezza, sieno in primo luogo in movimento ad un tempo tutte le particelle della massa liquida che trovasi dentro il vase, e che in conseguenza non possa aver luogo in natura nè la *cateratta Newtoniana*, e nemmeno l'*infundibulo del Zendrini*; e che in secondo luogo sieno dotate dette particelle di un moto per linea inclinata verso il foro, che cresce di energia dall'alto al basso, e di un moto verticale da questo dipendente, che s'aumenta all'opposto dal basso all'alto, sicchè s'accostino al foro discendendo per linea curva, la di cui convessità rivolta verso le sponde del vase divenga rimarchevole nelle vicinanze del fondo, il che è conforme a quanto fu osservato da *Daniello Bernoulli* (a) e con maggior esattezza dal diligentissimo *Abate Bossut* (b), dico con maggior esattezza, perchè il primo autore stabilisce, che le particelle liquide discendano per linee rette verticali fino a certa distanza dal foro, da cui sortono poscia dirigendosi ad esso pure per linea retta, mentre il secondo osserva, che dall'istante in cui dirigonfi al foro procedono per linea curva.

A R T I C O L O V.

Del movimento de' semifluidi, che effluiscono da fori orizzontali nel fondo di vasi cilindrici.

E S P E R I E N Z A VII.

§. 23. **M**Antenendo in un vase cilindrico di poll. 2. di diametro il semifluido sabbia all'altezza di poll. 6, ed essendo l'orificio nel fondo orizzontale di lin. 5 di diametro, ne fortirono in un minuto poll. cub. 47
 Fornito poi lo stesso vase del foro di lin. 3. di diametro ne effluirono in un minuto - - - - - 17
 Poste le medesime cose e facendo uso del semifluido miglio, dal foro di lin. 5 di diametro ne fortirono - 29 $\frac{1}{2}$

(a) Idrodinamica . Parag. 3. Sezione. 4.

(b) Hydrodynamique . Tom. II. Part. II. Chap. III. pag. 3. ecc.

e dal foro di lin. 7 di diametro - - - - - 48
 Da un vase di poll. 3 di diametro, in cui si man-
 tenne pure il detto semifluido miglio all' altezza co-
 stante di poll. 6, avendo l' orificio lin. 5 di diame-
 tro se ne raccolsero in un minuto - - - - - 31
 e sotto l' orificio del diametro di lin. 7 - - - - - $54\frac{1}{2}$

Considerazioni.

§. 24. Se pertanto i nostri semifluidi effluissero da' fori o-
 rizzontali colla velocità, che un grave acquisterebbe dall' al-
 tezza, a cui essi vengono costantemente dentro i vasi man-
 tenuti, dovrebbe verificarsi l' equazione (A) (a)

$$(A) \dots Q = \frac{2tK\sqrt{ab}}{\phi}$$

in cui Q è la quantità del semifluido, che forte dall' orificio
 orizzontale del vase, t il tempo dell' efflusso, b l' altezza co-
 stante del semifluido, K l' area dell' orificio, ϕ un minuto
 secondo, e nelle nostre misure a l' altezza di piedi $14\frac{1}{2}$ che
 un grave percorrerebbe nel detto minuto secondo. Ma ap-
 plicando all' esposta equazione i dati descritti nella furrise-
 rita Esperienza VII, si trova, che quanto al semifluido fab-
 bia dall' orificio di lin. 5 di diametro ne dovrebbero esser
 fortiti poll. cub. 523 in vece di 47, da quello di lin. 3 di
 diametro poll. cub. 189 in luogo dei 17: e quanto poi al
 semifluido miglio pure dal primo enunciato orificio avreb-
 bero dovuto raccogliersi poll. cub. 523, e non solo $29\frac{1}{7}$, o
 31; e dall' orificio di lin. 7 di diametro poll. cub. 1026,
 mentre non se ne raccolsero che 48, ed al più $54\frac{1}{2}$. Dal
 qual confronto chiaramente apparisce, che le particelle di
 cotali semifluidi s' accostano ed effluiscono da' fori oriz-
 zontali con un grado di velocità, ch' è molto minore di quel-
 lo che competerebbe all' altezza costante, a cui sono man-
 tenuti dentro i vasi, essendo nella sabbia le quantità fortite

Z z ij

l'undecima parte circa, e nel miglio la diciottesima di quello che dovrebbero essere, se le dette particelle si presentassero al foro con la velocità accennata. Oltre a ciò dai risultati della stessa esperienza si rileva, essendo le cose rimanenti pari, che le quantità di semifluido seguono prossimamente la ragione delle aree de' fori orizzontali, da' quali esfluiscono; che maggiori sono quelle che si raccolgono da un semifluido, che ha le particelle più minute; e che finalmente maggiori quantità eziandio esfluiscono da' vasi di maggior diametro.

§. 25. Rivolgendo ora l'occhio sulle esperienze fatte dagli Idrodinamici, onde rilevare il grado della velocità, di cui sono dotate le particelle de' liquidi al sortire da orificj orizzontali, veggiamo che le quantità raccolte in un dato tempo di poco superano la metà di quelle, che avrebbero dovuto raccogliersi, se le dette particelle si presentassero al foro colla velocità intera competente all'altezza costante, a cui conservasi il liquido dentro il vase. Procedono adunque per questo conto in via analoga i liquidi co' nostri semifluidi, nè sembra che si possa attribuire l'accostarsi de' secondi maggiormente alla legge riguardata dagli Idraulici come naturale, cioè, che le particelle al sortire dell'orificio debbono essere dotate del grado di velocità dovuta all'altezza costante de' conservatoj, se non che alla picciolezza e figura delle particelle componenti i liquidi, sì che incomparabilmente meno che quelle de' semifluidi impedisconsi le une le altre il movimento di discesa verso l'orificio, a cui tutte tendono; ma non potrà non dubitarsi, che l'accennata deficienza nelle quantità effettive raccolte da' fori orizzontali ne' liquidi pure dipenda dall'essere il movimento delle particelle vicendevolmente impedito e contrastato, come chiaramente apparisce accadere ne' semifluidi. Per lo che a mio parere il ricorrere con alcuni Idraulici alla restrizione della vena, cioè di dover considerare la sezione di essa pel foro, che mantenga l'esflusso, ed il dover prendere per altezza generatrice la velocità del getto, quella che v'ha dalla superficie permanente del liquido alla detta restrizione, benchè con tali modificazioni corrispondano quasi esattamente le quantità raccolte negli esperimenti alle volute dalla teoria, deg-

giono riguardarsi come ripieghi utili a stabilire un canone per la pratica, ma non come atti a salvar la legge della velocità già accennata. Vanno poi del pari i liquidi co' nostri semifluidi quanto all' essere le quantità trasmesse da diversi fori, in circostanze pari, proporzionali alle aree de' medesimi: non possiamo però fare alcun confronto tra primi e secondi riguardo alla proprietà, che abbiamo in questi osservata di trasmetterne quantità maggiori essendo di maggior diametro i vasi prismatici, ne' quali vengono mantenuti a costante altezza, per non avere esperienze istituite a tal fine anche in quelli, il che fa giudicare non essere stato creduto tale elemento degno di osservazione finora dagl' Idraulici.

E S P E R I E N Z A IX.

§. 26. I due vasi cilindrici, che abbiamo adoperato per eseguire i seguenti esperimenti, erano amendue alti poll. 6, ma uno del diametro di poll. 2, e l'altro di poll. 3. I due semifluidi poi sono stati il miglio e le migliarole di piombo, - come quelli - che mantengono per più lungo spazio la superficie parallela all' orizzonte nel vuotarsi da un orificio preparato in centro del fondo di detti vasi. Sotto pertanto diversi fori sonosi misurate le quantità de' semifluidi sortite in diversi tempi non riempiendo il vase se non che ad ogni nuovo esperimento, e con l'avvertenza di fermare l'efflusso prima che la superficie del semifluido cominciasse a disporsi in imbuto. I risultati però ottenuti in questi esperimenti veggonsi chiaramente presentati nelle sottoposte tavole.

Miglio.

Diametri degli orifizj.	Tempo del- le scariche.	Vase cilindrico alto poll. 6, e del diametro poll. 2. Altezza primi- tiva poll. 6.		Vase cilindrico alto poll. 6, e del diametro poll. 3. Altezza primi- tiva poll. 6.	
		Altezze residue del semifluido nel vase.		Altezze residue del semifluido nel vase.	
Linee	Minuti se- condi.	Pollici	linee	Pollici	linee
7	6	4	: 2	5	: 2
	10	2	: 7	4	: 5
5	20	4	: 4	5	: 2
	40	2	: 8	4	: 5

Migliarole.

Diametri de- gli orifizj		Tempo delle scariche	Vase cilindrico alto poll. 6 , e del diametro poll. 2 Altezza primi- tiva poll. 6 Altezze residue del semifluido nel vase		Vase cilindrico alto poll. 6 , e del diametro poll. 3. Altezza primiti- va poll. 6 Altezze residue del semifluido nel vase	
Linee		Minuti se- condi	Pollici	linee	Pollici	linee
7		6	4	: 2	5	: 2
		10	2	: 8	4	: 6
-----		-----	-----		-----	
5		20	4	: 6	5	: 2
		40	2	: 11	4	: 6

Considerazioni.

§. 27. Basta applicare ora la formula (B) (a)

$$(B) \dots \dots t = \frac{\phi A (\sqrt{b} - \sqrt{a})}{K\sqrt{a}}$$

in cui t è il tempo ricercato dello scolo per i vasi prismatici che vanno vuotandosi, ϕ un minuto secondo, e nel nostro caso a l'altezza di piedi $14 \frac{1}{2}$ che un grave percorrerebbe in tale minuto secondo, A poi l'area della base orizzontale del vase, K quella dell'orificio, b l'altezza primitiva del semifluido, che ne' nostri esperimenti è stata sempre di poll. 6, e a l'altezza residua del semifluido rimasto nel

vase, basta applicare, dico, la formula *B* ai risultati della sopra descritta esperienza per rilevare di bel nuovo quanto sieno distanti i nostri semifluidi di effluire dagli orificj orizzontali col grado di velocità competente alla loro altezza, a cui si trovano costituiti dentro un vase prismatico, non essendo i tempi richiesti da fissata legge appena la ventesima parte circa de' determinati coll' esperienza. E' però da notarsi che quantunque le particelle di cotali semifluidi si contrastino vicendevolmente il loro movimento, a segno tale che, come s'è veduto, pervengono all' orificio con un grado di velocità molto minore di quello, che competerebbe alla loro discesa libera; nulladimeno il sistema totale dell' efflusso in un vase prismatico procede con tanta regolarità, che può servire di norma prossimamente a quello che accaderebbe in altro vase consimile, e dico prossimamente, poichè sembra poterli ancora raccogliere da' risultati di questa IX Esperienza, ciò che abbiamo ricavato dalla VIII, cioè che ne' vasi cilindrici di maggior diametro lo scolo dall' orificio orizzontale sia qualche cosa più libero, ed in conseguenza sieno più abbondanti le quantità trasmesse in un medesimo tempo.

§. 28. I risultati ottenuti dagl' Idraulici per ciò che riguarda lo scolo de' liquidi ne' vasi prismatici, che si vuotano da orificj orizzontali, sono, non già colla distanza de' semifluidi, lontani però dal comprovare un movimento libero e per niente vicendevolmente impedito nelle loro particelle, essendo abbisognato anche in questo caso, onde concordare la teoria coll' esperienza, ricorrere alle modificazioni accennate (§. 25.). Crederei poi non inutile in questa parte dell' Idrodinamica d' istituire sperienze particolari per rilevare, se ne' liquidi eziandio la grandezza e figura diversa dei vasi abbiano influenza nel sistema totale del loro efflusso, come s'è veduto accadere ne' nostri semifluidi anche nelle sole esperienze riferite, e ch' io ho avuto la curiosità di confermare con altre, mettendo a confronto quantità trasmesse nello stesso tempo da vasi cilindrici, e da conici sotto altezze ed orificj uguali, con che verrebbe a stabilirsi essere certo almeno nella pratica Idrodinamica il sopraccennato canone (§. 25.) per calcolare la quantità de' liquidi sgorganti da' vasi, ne' quali sieno mantenuti a costante altezza.

TEORIA

Fig. II.

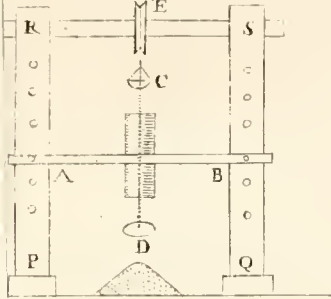


Fig. III.

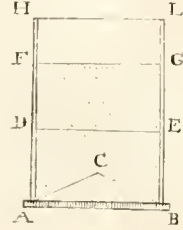


Fig. V.

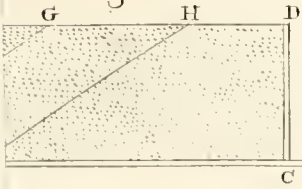


Fig. VI.

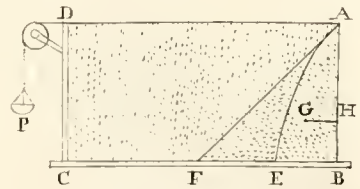


Fig. VIII.

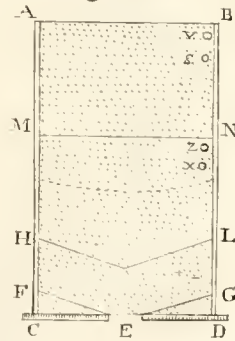


Fig. IX.

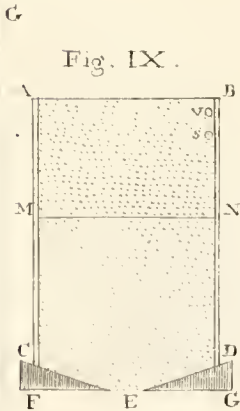


Fig. I.

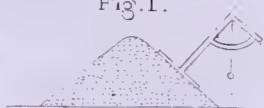


Fig. II.

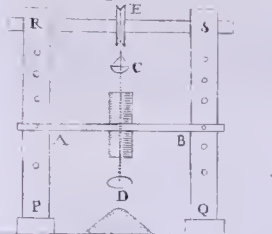


Fig. III.



Fig. IV.

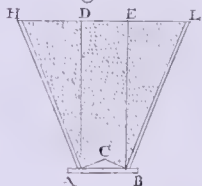


Fig. V.

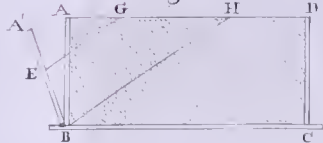


Fig. VI.

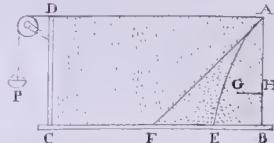


Fig. VII.

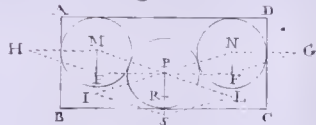


Fig. X.

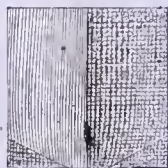


Fig. IX.

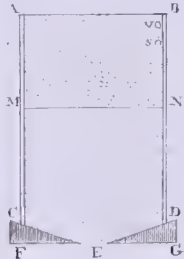
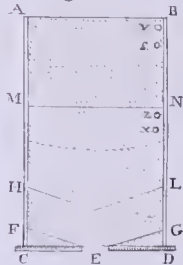


Fig. VIII.



T E O R I A

F I S I C O - M A T E M A T I C A

I N T O R N O

Al moto de' Liquidi uscenti da' fori delle conserve

Del Sig. CAVALIERE LORGNA.

I N T R O D U Z I O N E.

NOn può negarsi, che alcune parti della naturale Filosofia non debbano tutto, per così dire, alle scienze matematiche, ed altre moltissimo, avendo elle reso trattabili felicemente cose, in cui nè la ragione sola, nè la sola esperienza, nè tutte due insieme non avrebbero tant' oltre penetrato giammai. Ma in altre non poche non hanno elle realmente fatto alcun passo, quando non sia convenuto, che non sarà mai, di adottare, nelle cose naturali, tutte le verità di calcolo per verità di fatto: il che è addivenuto in quelle singolarmente, il subbietto delle quali cangia totalmente indole e condizione quando sia spogliato per astrazione di ciò che lo costituisce tale quale natura vuol, ch' egli sia nella fabbrica mondiale. E vaglia il vero non è per esempio Teoria intorno alle intime affezioni e al moto de' fluidi compressibili e incompressibili, fondata principalmente su principj puramente matematici, la quale come il può per avventura nella filosofia matematica, così possa meritare luogo con egual diritto e sopra ogni eccezione anche nella scienza reale della natura. Ma se questa mai si chiudesse, qual sarà dunque la via onde internarsi ne' magisteri di que-

sta scienza, ove sieno ignoti i principj costitutivi de' subbietti, ove sieno strettamente insieme complicate qualità caratteristiche differenti e forze intime oscurissime, indiscernibili?

Se non erro, la più acconcia sembra essere quella dell'osservazione attentissima, e del ragionamento, conducendo giudiciosamente l'una e l'altro co' metodi di risoluzione, e di composizione, cioè con quelli dell'analisi e della geometria, e valendosi eziandio al caso de' simboli e delle figure dell'una e dell'altra, ma sempre come strumenti, e quando le cose o le loro parti possano senza sformarsi prendere il carattere di quantità semplici, omogenee, subordinarii a mutue relazioni, e rappresentarsi anche al senso sotto le figure astratte della Geometria. Sarebbe mai questo il vero ufficio delle Matematiche nella naturale Filosofia? Non è già, che sieno escluse da questa maniera di filosofare tutte le supposizioni; basta che sieno ragionevoli, e ragionevolmente ammissibili nella Fisica, come sono i postulati nella Geometria, non ideali ed arbitrarie, o fatte unicamente per accomodare il subbietto alle leggi del calcolo.

Ma certamente, da che non è ella la più coltivata, bisogna credere, che questa maniera non sia nè la più accetta, nè la più facile, e che sia molto più grato all'orgoglio umano, più comodo il fingere, che il trovare ciò che fa attualmente la natura; ond'è che il d' *Alembert* non esitò di dire, che oggidì a forza d'ipotesi, e di calcolo si viene a capo di tutto. Ma comunque ciò sia, ella è indubitatamente la più sicura, se non è la più luminosa, e conduce al vero, o a risultamenti almeno non molto dalla verità lontani, cui non cancella sì agevolmente il tempo come cancella inesorabilmente le nostre comentazioni. Egli è pertanto su questi principj, che la presente ricerca ho instituito e condotto, come per saggio, e come meglio le mie forze il permisero intorno al moto de' liquori per entro e fuori delle conserve, ove son mantenuti a costante altezza durante il flusso. Le proprietà principali, che distinguono i liquidi da ogn' altro fluido conosciuto, cioè l'incompressibilità naturale, la perfetta mobilità, e l'affinità potentissima d'aggregazione, comunemente detta aderenza scambievolmente delle stille, influiscono talmente su le loro affezioni, che senza avervi

particolare riguardo dietro all'indicazione de' fenomeni, non può mai sperarsi di pervenire a cognizioni sicure intorno agli accidenti complicatissimi del loro movimento. Allora solamente pare, che sia lecito il dispensarsi dal farvi considerazione, quando alcuna di queste proprietà non sia che indur possa azioni particolari nelle stille l'una sull'altra, le quali turbino il moto comune, nella qual circostanza può non essere disdetto di concepire il liquore come un fluido imperfetto, e di subordinarlo in qualche modo alle leggi della Dinamica. In questo caso per esempio ho creduto, che possa considerarsi costituita una vena di liquore in moto, le cui stille sieno sempre e in ogni parte animate da una costante velocità, e mosse secondo una medesima direzione, e per tal via in altra Memoria che si troverà in questo volume, ho cercato di soggettare l'estimazione dell'impulsione permanente de' liquidi contro le superficie piane alle leggi dinamiche. Ma in tutt'altra condizione di cose, ove le proprietà enunciate influiscano essenzialmente ne' fenomeni, sarà mestieri, perchè non vada errata, che la teorica muova sempre dai fatti, e si diriga per la via mostrata da quelle sole sperienze, in cui abbiano operato i liquori naturalmente, e come sono da natura costituiti. Non so se mi farò adoperato nell'assunto, com'era mio proposito. Ma in ogni caso sarà mio il difetto, non mai del metodo, che mi son proposto di seguitare.

CAPITOLO PRIMO

Fenomeni naturali

§. I.

FEN. I. Se una vena di acqua perenne, come AB (*Fig. I.*) fluisca in una conserva sottoposta di qualunque figura $CDEF$, in cui l'apertura del fondo GH , donde l'acqua influente deve uscire, sia minore dell'ampiezza della vena, si *osserva*, che una certa quantità di acqua si spande prima e distende pel fondo non aperto GD , HE , e si compone poi il liquore, dopo un certo tempo, ad una certa altezza, come DI , sopra il fondo, con la superficie continuamente agitata dall'influsso della vena, e così persiste, pareggiata l'uscita coll'entrata, finchè sussistono le medesime circostanze. Il flusso pertanto secondo la direzione della vena resta interrotto in LM , e non ripiglia corso che fuor dell'apertura GH .

§. II.

FEN. II. E se sieno scolpite in sottili lamine di metallo, che possano adattarsi al fondo DE , diverse aperture maggiori e minori di GH , si *osserva*, che adattandovi aperture via via minori, la superficie IK si compone e si arresta più e più alta dal fondo stabile DE . E per l'opposito adattando sul fondo luci via via minori di GH , l'altezza dell'acqua permanente sopra il fondo va più e più scemando, e svanisce anche interamente, ove sia fatto interamente libero il passaggio della vena.

§. III.

FEN. III. Ma se venga ricevuto l'influsso della vena in un recipiente NO imminente assai da vicino alla superficie IK , pertugiato da minuti forellini, sicchè l'acqua scenda per sottilissimi filamenti, si *osserva*, che la superficie IK è sensibilmente orizzontale, e sensibilmente orizzontale si man-

tiene costantemente durante il flusso, come se il liquore IDEK fosse stagnante.

§. IV.

COROLL. I. E' dunque manifesto, che il liquore spanto e disteso sopra il fondo DE è un liquore ringorgato, regurgitato.

COROLL. II. E che la superficie IK è il limite del ringorgamento.

COROLL. III. E come l'orizzontalità sensibile, e sensibilmente permanente della superficie IK, durante il flusso, per un verso, e l'atto successivo del fluire per l'altro, onde supplire all'esborso per l'orificio GH, importano quiete sensibile per un verso, e moto per l'altro, così è conseguenza intanto indubitata di questi fenomeni, che la condizione di quest'acqua ringorgata IDEK è un certo stato singolare partecipe di quiete e di moto, e perciò essenzialmente distinto dallo stato assoluto dell'una e dell'altro.

§. V.

SCOLIO. Vedremo qui appresso, come questi pochi fenomeni certi, che sono gli Assiomi veri della naturale Filosofia, facciano strada e lume alla ragione, onde conoscere possibilmente le proprietà de' liquori uscenti da' fori delle conserve, ove sieno mantenuti a costante altezza sopra il piano de' medesimi fori. L'aver trovato, che il loro stato nell'interno de' vasi è di ringorgamento, e che questo stato è misto e distinto da quello della quiete e del moto, assolutamente presi, ma però necessariamente partecipe di entrambi, è un passo, come vedremo, decisivo in questa oscurissima materia. Ma prima d'inoltrarci diamo luogo ad altri fenomeni che più da vicino manifestino in che adoprano questi ringorgamenti col portare e mantenere più e più lontano dalle aperture de' vasi i loro limiti, nel cacciare i liquori dalle aperture fatte via via minori successivamente.

§. VI.

FEN. IV. Si appresti un vase di vetro $ABCD$ (*Fig. II.*), nel cui fondo sia praticato un pertugio ab . Una vena perenne E più ampia del foro ab metta in questo vase in un dato tempo una data quantità di acqua costantemente, e l'acqua trattenuta regurgiti nel vase fino all'altezza BG , e ivi si stabilisca con la superficie orizzontale FG . Si segni con diligenza su la parete il limite del ringorgamento FG . Ciò fatto, si ritiri dall'influsso della vena il vase, e lasciata uscire da ab una parte del liquore contenuto, si chiuda l'orificio, e in luogo dell'acqua estratta s'introduca nel vase altrettanto olio comune a un dipresso. Dopo di che si rimetta sotto la vena E il vase, sicchè l'acqua cada sull'olio, e la attraversi per giugnere alla superficie dell'acqua sottoposta, indi si schiuda l'orificio ab . Dopo un breve salire, discendere, e risalire dell'olio si *offergerà*. I. Che la superficie di lui si arresta un po' sopra al limite segnato per l'acqua GF , e torna a farsi permanente, come prima, il flusso dell'acqua per l'orificio ab . II. che la superficie dell'acqua sotto l'olio si compone e mantiene costantemente in una posizione sensibilmente orizzontale, come HI . III. Che tragitta per l'olio l'acqua infusa, come per feltro, e mette capo nell'acqua sottoposta senza cagionarvi alcuna ondulazione, tenendo risarcito l'esborso per l'orificio ab sotto l'altezza composta de' due liquori eterogenei, come faceva sotto l'altezza permanente BG del liquore omogeneo primitivamente ringorgato.

§. VII.

FEN. V. Ripetendo quest'esperimento coll'aumentare la quantità dell'olio, si *osserva*, che la superficie sottoposta dell'acqua può ridursi a stato permanente molto vicino al piano del foro ab , massimamente se questo foro sia piccolo. E continua tuttavia a soprastarvi l'olio turbato intestinamente in quanto dà passaggio all'acqua che concorre a risarcire l'esborso, ma quanto a sè, come una massa liquida

stagnante. E si *osserva* inoltre, che quanto è maggiore la quantità dell' olio soprastante all' acqua, sempre più si solleva la superficie dell' olio dal limite primitivo di confronto dell' acqua ringorgata *FG*.

§. VIII.

FEN. VI. Che se si cangi apparecchio, e non sia immessa l' acqua della vena immediatamente nell' olio, come nella fig. II., ma per mezzo di cannello, siccome dimostra la fig. III., immerso nell' olio, s' intenda introdotta e recata separatamente l' acqua della vena perenne *E* alla superficie permanente *IH* dell' acqua sottoposta all' olio, ridotto che sia il flusso in istato permanente, si *osserva*. I. che se ne sta immobile l' olio soprastante, come se fosse un corpo solido, ancorchè la superficie dell' acqua *IH* si accosti assai vicino al fondo *BC*, ch' è cosa mirabile a vedersi. II. che la superficie *fg* dell' olio riesce, come prima, superiore al limite del ringorgamento *FG* dell' acqua e alcun poco di più pel volume cacciato dal cannello che si mantiene immerso durante il flusso. III. e finalmente, se nel far varj saggi con varie quantità di olio si abbia cura in ciascun caso di tener conto, quanto più accuratamente è permesso di fare, così dell' olio introdotto, come della quantità di acqua che per esso vien cacciata fuor del vase, si *trova*, dopo lo stabilimento del flusso permanente, che il peso per parte dell' olio riesce costantemente un po' più grande, che non è il peso dell' acqua esclusa, se nel prendere tali delicatissime misure non avessi errato; il che parvemi doverli attribuire all' aderenza dell' olio alle pareti del vase, per cui scema alcun poco l' azione dell' olio sull' acqua sottoposta.

§. IX.

COROLL. I. Resta intanto deciso per questi fenomeni, che non è altrimenti dovuta, come pensava il *Newton*, all' attuale discesa dell' acqua dalla superficie permanente *FG* sino al piano del foro *ab* la velocità dell' acqua uscente dal medesimo foro, mentre dovrebbe esserlo a un tempo ad altra

ed altra discesa fatta da altre ed altre altezze, come IH (Fig. II. e III.), il che è assurdo, non essendo moto discensivo nell'olio soprastante sostituito all'acqua, il quale è stagnante e fisso nella sua posizione durante il flusso, ma solamente nell'acqua sottoposta.

COROLL. II. E poichè agisce l'olio full' acqua sottoposta per *modum unius*, come farebbe un peso premente, uno stantuffo premente su la superficie dell'acqua IH , è manifesto, che la pressione circonfusa al foro non è già quella della semplice colonna perpendicolare avente per base il medesimo foro, come pensavano il *Varignon*, l'*Ermanno*, ed altri non pochi, ma sì bene quella di tutta la massa. Imperciocchè potendo abbassarsi la superficie IH dell'acqua più e più verso il fondo, sol che si aumenti il carico dell'olio soprastante, e mantenersi uno stesso flusso costantemente coll'insufusione dell'acqua pel cannello indicato, e non operando giammai l'olio che come embolo egualmente premente in tutti i punti dell'infima sezione IH , non è luogo all'azione di alcuna colonna determinata, come mostriamo non essere ad alcuna determinata discesa nel Coroll. precedente.

COROLL. III. E' dunque dimostrato da' fenomeni, che l'acqua mantenuta nelle conserve a costante altezza sopra i fori di uscita è un'acqua ringorgata, e che nello stato di ringorgamento la pressione esercitata dalla massa del liquore circonfusa al foro adopera a guisa di stantuffo nel cacciar l'acqua dal foro, e che perciò la forza che ha ella all'uscita non è altrimenti acquistata dall'acqua per la discesa attuale fatta dalla superficie o dal limite del ringorgo sino al foro, nè prodotta dalla pressione della sola colonna verticale avente il medesimo foro per base. Quindi si comprende chiaramente onde sia, che il limite del ringorgamento più e più si sollevi sopra il piano del foro a misura che più e più il foro si restringe, e si abbassi più e più quanto più si allarga il foro sino a svanire col ringorgo medesimo, allorchè l'acqua può uscire liberamente.

COROLL. IV. E in oltre ci si fa non oscuramente intendere in che adoperi la quiete sensibile ne' liquori ringorgati, di cui l'orizzontalità sensibile della superficie o del limite del ringorgo non lascia luogo a dubitare, tosto che è la
pressione

pressione quella che anima principalmente le stille al foro . E quel qualunque moto di discesa, che pur ha luogo in questo stato, non altro sembra essere lucidamente fuorchè il ricorrere successivo delle stille al foro dietro al successivo rifarcimento, e sostituzione che si fa d' altr' acqua all' acqua che va scappando, di cui pel delicatissimo consenso delle sue parti dee risentirsi la massa del liquore dal fondo al limite del ringorgo, senza ch' egli adoperi attualmente nel cacciar l' acqua fuor dell' orificio . Come poi sussistano e si verifichino insieme nello stato ringorgato la quiete sensibile, e questo moto interno di discesa, non operativo nel produrre la velocità del flusso agli orificj, sarà ciò argomento di particolare trattazione più sotto.

§. X.

FEN. VII. Se nel vase di vetro *ABCD* (*Fig. II.*), ove sia sola acqua ringorgata fino al limite *FG*, e il flusso di già fatto permanente, si sommergano lungo le pareti del vase pezzetti di ceralacca o di altro simil corpo un pochino più grave in specie dell' acqua, si *osserva*, che discendono essi verso il fondo lentamente con direzione sensibilmente verticale, finchè, giunti a poca distanza dal fondo, inclinano e incurvano il corso visibilmente verso il foro, e radono poi tutti nell' uscire il margine dell' orificio facendo un angolo acuto sensibilmente finito col fondo . L' osservazione è stata fatta prima da *Daniello Bernoulli*, indi dal Sig. *Ab. Bossut*, come può vederli ne' loro eccellenti Trattati d' Idrodinamica, ed io l' ho puntualmente rifatta ed accertata l' anno scorso.

§. XI.

FEN. VIII. Essendo stata raccolta e misurata la quantità di acqua uscita da fori e armati di tubo, e scolpiti in sottili lamine sotto diverse altezze permanenti di acqua nelle conserve, tutte le prove fattene da' più accurati e fedeli esperimentatori dimostrano, che le velocità di un medesimo fluido uscente dal medesimo tubo, o dal medesimo foro scol-

pito in lamina sotto diverse altezze, sono fra di loro in ragione dimezzata o sudduplicata delle altezze permanenti del fluido sopra il centro del foro. Con tutte le osservazioni de' passati tempi concorrono oggi a comprovare una tal verità quelle pure che per Regia munificenza sono state istituite più recentemente in grande a Torino (*Michelotti Sper. Idraulici*, e *Mem. dell' Ac. R.* per gli anni 1784 - 85), sicchè non è forse fenomeno naturale sì costantemente stabilito come questo.

COROLL. Qualunque pertanto sieno le altezze libere da cui scendendo un grave dalla quiete può acquistare in fine del moto le velocità attuali dell' acqua uscente da un medesimo orificio sotto diverse altezze permanenti di liquore nella conserva, dovendo essere fra loro dette velocità in dimezzata ragione di dette altezze libere, quali si sieno, secondo la teoria de' moti accelerati, è cosa indubitata, che le altezze permanenti, sotto le quali con dette velocità è uscita l' acqua, dovranno essere fra loro come le altezze libere dalle quali cadendo un corpo grave avrebbe acquistato le medesime velocità in fine della discesa.

C A P I T O L O S E C O N D O

Ricerca intorno allo stato di ringorgamento de' liquori nelle conserve.

§. XII.

PROP. I. *La superficie di un liquore abbandonato all' azione libera della gravità, e costituito in perfetto equilibrio in un vase di qualunque figura che lo contiene, è orizzontale o perpendicolare in ogni punto alla direzione della gravità.*

Veggasene la Dimostrazione ne' Trattati d' Idrostatica.

§. XIII.

PROP. II. *Reciprocamente un liquore contenuto in un vase di qualunque figura, e abbandonato all' azione della gravità, la*

cui superficie sia orizzontale o perpendicolare in ogni parte alla direzione della gravità, è in perfetto equilibrio.

§. XIV.

COROLL. I. Se dunque un liquore contenuto in un vase non sia che sensibilmente costituito in equilibrio, la superficie di lui non sarà che sensibilmente orizzontale o perpendicolare in ogni parte alla direzione della gravità.

COROLL. II. E reciprocamente se la superficie di un liquore contenuto in un vase sia sensibilmente orizzontale o perpendicolare in ogni parte alla direzione della gravità, sarà tutto il sistema sensibilmente in equilibrio.

§. XV.

PROP. III. *La superficie dell' acqua ringorgata nelle conserve, donde fluiscia il liquore pe' fori scolpiti in fianco o nel fondo, e sia mantenuto a costante altezza durante il flusso sopra il centro de' fori, si mantiene sempre sensibilmente orizzontale.*

Veggasi il III. Fenom. al §. III. del Cap. preced.

COROLL. I. Dunque un tal sistema d' acqua ringorgata, durante il flusso, si mantiene nell' interno delle conserve sensibilmente in uno stato di equilibrio (§. XIV.).

COROLL. II. Ma dovendo insieme aver luogo nell' interno delle conserve un movimento, onde tener risarcito il flusso, è fuor di dubbio (§. IV.), essere questa condizione dell' acqua uno stato misto partecipe come di quiete sensibilmente continua, così di moto sensibilmente continuo.

§. XVI.

PROP. IV. *Posto ciò, definire la legge, e i sintomi naturali e proprj di questo stato di ringorgamento dell' acqua nell' interno delle conserve.*

Considerando in primo luogo, che nello stato permanente dee intenderli pareggiata esattamente l' uscita dell' acqua nel foro coll' entrata superiormente, è cosa indubitata, che l' ef-

flusso dee farsi simultaneamente coll' influsso , altrimenti nè quello per un verso sarebbe uniforme , nè sarebbe costante per l' altro il limite superiore del ringorgamento . Forza è dunque , che per entro la massa ringorgata si verifichi ad ogn' istante il transito di tanta acqua nè più , nè meno , quanta è l' acqua in quell' istante effluente dal foro , o l' influente al limite del ringorgamento ; e siccome la massa del liquore è tutta omogenea , così non transita l' acqua influente per l' acqua ringorgata per seltramento , come attraverso l' olio (§. §. VI. VII.) , ma s' ingorga subito , e si spande per l' acqua recipiente intorno al limite del ringorgamento ; nè prima può concorrere e recapitare al foro per l' uscita , che non le abbia fatto luogo di mano in mano l' acqua che precede , ed è al foro successivamente più vicina . La verifica- zione pertanto di questo transito si fa per successiva trasla- zione , e ricorrenza al foro delle stille gradatamente anteriori . Ma , attesa la perfetta mobilità dell' acqua , e il delicato consenso delle sue parti , non può farsi quest' effettivo movi- mento interno senza che se ne risenta la massa intera fino alla superficie esteriore o al limite del ringorgo . Dunque non può essere in questa massa quiete assoluta permanente , nè equilibrio permanente tra le sue parti . In conseguenza non può essere nè pure orizzontalità assoluta permanente alla superficie . Ma è di fatto (*Fen.* 111.) , che questa super- ficie si mantiene , durante il flusso , sensibilmente orizzonta- le . Esiste dunque un' equilibrasione sensibile tra le parti dell' acqua in istato di ringorgamento , e però una quiete sensibi- le nel sistema . Ma se non è in quest' acqua così costituita nè continuità non interrotta di equilibrio o di quiete , per- chè dovrebbe mantenersi continuamente la superficie e as- solutamente orizzontale , contro il fatto , nè continuità non interrotta di squilibrio , perchè non sussisterebbe nè pure l' orizzontalità sensibilmente permanente della superficie , co- me ne' fluidi imperfetti , parimenti contro il fatto , è di ne- cessità , che in questa condizione singolare dell' acqua abbia luogo una perpetua vicenda di equilbrj , e di disequilbrj . Necessariamente pertanto il moto e la quiete , cioè lo squi- librio nelle parti , e il ritorno all' equilibrio devono essere successivi .

Ma di nuovo e l'orizzontalità della superficie, e l'efflusso dal foro appariscono sensibilmente continui. Uopo è dunque concludere, che questi passaggi successivi dalla quiete al moto, e dal moto alla quiete sieno, quanto può mai esserlo operazione subita di natura, istantanei, rapidissimi. La legge pertanto e i sintomi propri dello stato di ringorgo dell'acqua nell'interno delle conserve consistono nell'aver luogo per entro la massa ringorgata dell'acqua una condizione periodicamente variabile, o un particolar tenore di passaggi periodicamente successivi dalla quiete momentanea al moto momentaneo, e da questo di nuovo alla quiete, di modo che non apparisca al senso interrotta la quiete del sistema, donde l'orizzontalità sensibilmente continua e permanente della superficie, e non riesca nè pure al senso interrotto il moto discensivo, donde è poi sensibilmente continuo e permanente il ricorso delle stille all'orificio. Quindi è palese in qual guisa sia questo stato, misto, come dicemmo (§. iv.), partecipe di quiete e di moto, distinto tanto dallo stato di quiete assoluta e da quello di moto assoluto, quanto questi due il sono fra loro, e nel suo genere singolare. Il che ecc.

§. XVII.

SCOLIO. Non è pertanto grandezza di conserva finita, o indefinita, nè figura di vase a cui sia limitata particolarmente la legge che abbiamo definito. In qualunque condizione di vase abbia il liquore una superficie stabilita e permanente, mentre per qualche pertugio fluisca egli uniformemente fuor del vase, il liquore è in istato vero di ringorgamento, e non va attesa in tale stato nè estensione, nè figura di vase, e nemmeno grandezza o configurazione di orifizio. E questa è la proprietà caratteristica, che il fa riconoscere e distinguere dagli altri.

§. XVIII.

PROP. V. *L'attuale velocità di qualunque stilla di transito per entro la massa d'acqua ringorgata, durante il flusso, è sempre infinitamente piccola.*

Imperciocchè, da che deve aver luogo un successivo passaggio dalla quiete al moto discensivo, e da questo alla quiete, e così sempre alternativamente, durante il flusso, tutti gli spazietti percorsi successivamente da una stilla faranno sempre interposti tra due punti di stazione, o di quiete, e però non può essere stilla discendente in attualità di discesa, che non sia nell'istante immediatamente precedente partita dalla quiete. Ma non è forza finita la quale sia capace d'imprimere in un corpo mosso dalla quiete velocità finita in un istante. Dunque l'attuale velocità di qualunque stilla discendente per entro la massa ringorgata, farà necessariamente infinitamente piccola. Il che ecc.

§. XIX.

COROLL. I. Se dunque suppongasi fluire un liquore con velocità infinitamente piccola, costituito il corso in istato permanente, è provato, che le parti del sistema sono fra loro in equilibrio sensibile.

COROLL. II. In questo stato pertanto, ch'è quello di ringorgamento, è pure cosa manifesta, che la legge delle sezioni reciproche alle velocità non può rigorosamente aver luogo entro la massa ringorgata, come può averlo ne' moti liberi de' liquori. Imperciocchè per salvare una tal legge per entro la massa sarebbe necessario o di limitarsi a determinate estensioni e figure di vasi, che la natura di questo stato non esige, o di subordinare a tutt'altra legge le velocità momentanee delle stille che transitano per la massa da quella che realmente si è dimostrato aver luogo, velocità alternativamente estinte al rinascere dell'equilibrio, e rinascenti al rompersi dell'equilibrio, con indiscernibile costantissima vicenda. Quindi apparisce non essere per avventura ben fondate su questa legge le teorie de' più illustri Idrodinamici intorno al moto de' liquori uscenti da' fori delle conserve, legge dallo stato di ringorgamento esclusa necessariamente.

§. XX.

SCOLIO. Era ben difficile il conciliare un' accelerazione;

continua di moto nell' acqua ringorgata delle conserve co' fenomeni, e specialmente con quelli che apertamente ci dichiarano essere dovuta la velocità del flusso alla pressione dell' acqua circonfusa, non mai all'attuale discesa libera dal limite del ringorgo al sito del flusso. Le stazioni momentanee, per cui rinasce ad ogn'istante l'equilibrato sensibile delle parti, mentre interrompono ad ogn'istante il corso discensivo, non lasciando ritenere alle stille la velocità acquistata, ed estinguendo sul nascere ogni accelerazione, son quelle a un tempo che danno luogo ad una velocità istantanea sensibilmente uniforme, sempre elementare, e ad ogni istante ricominciante dalla quiete: il che costituisce un ammirabile economia di natura, che meritava certamente di essere conosciuta intimamente e sviluppata, se pur mi sia riuscito di farlo convenevolmente.

§. XXI.

SOLIO. Finchè pertanto sussiste l'acqua contenuta ne' vasi nello stato di ringorgo, si conserva nel sistema lo stato misto, che abbiamo definito (§. xvi.), e la velocità delle stille non può mai diventar finita, e ricevere determinazione. Perchè possa quella velocità sempre elementare, e sempre rinascente dalla quiete, come dicemmo, ricevere determinazione, è mestieri, che dallo stato ringorgato passi l'acqua allo stato libero, il quale è propriamente quello in cui non è l'acqua impedita a scorrere con quella velocità e direzione di moto, ond'è animata, sia per ragione del moto istinto, sia per quella delle forze che la sollecitano al moto.

§. XXII.

SOLIO. Essendosi pertanto dimostrato (§. xviii.), che l'attuale celerità *dc* di qualunque stilla di transito per la massa d'acqua ringorgata è sempre infinitamente piccola, e dimostrandosi in oltre nella Dinamica, che la velocità iniziale di un punto libero sollecitato da qualsivoglia potenza *g* è proporzionale al prodotto *gdt* della potenza *g* pel tempo infinitamente piccolo *dt*, in cui al medesimo punto resta ap-

plicata la potenza, se una stilla qualunque del liquore ringorgato sollecitata dalla pressione circonfusa (§. 1x. Coroll. III.) diventi punto libero, e si dica g la forza premente che la sollecita, la sua celerità nell'istante dt sarà espressa dal prodotto gdt . Dunque quella celerità istantanea, ch' era dc indeterminatamente nello stato di ringorgo, diventa gdt nello stato libero, e si determina coll'equazione $dc = gdt$. Per conseguenza in qualunque punto del sistema ringorgato accada questo passaggio nelle stille dallo stato di ringorgamento allo stato libero, avrà sempre luogo l'equazione

$$(A) \dots dc - gdt = 0.$$

§. XXIII.

COROLL. I. E' dunque dimostrato, che l'equazione (A) non può aver luogo per entro la massa de' liquori mantenuti a costante altezza nelle conserve nello stato attuale ed effettivo di ringorgamento in cui sono, e che non compete, che allo stato libero, cioè dove nelle masse liquide ringorgate si verifichi il passaggio da quello stato allo stato libero.

COROLL. II. E però, tenendo fermo il proposito di non dar luogo nè a mentali divisamenti, nè a ipotesi pieghevoli alle leggi del calcolo, ma di conchiudere ciò solamente che i fenomeni e il rigoroso ragionamento portano a conchiudere, le cose precedenti escludono inesorabilmente nell'interno de' liquori ringorgati i movimenti, che lor vengono dagl' Idrodinamici comunemente attribuiti.

§. XXIV.

SOLIO. Non è stato per avventura alcuno tanto vicino a conoscere ne' liquori contenuti ne' vasi lo stato di ringorgamento, partecipe de' due stati di moto e di quiete, e dall' uno e dall' altro distinto essenzialmente, quanto il Sig. d' *Alembert*. Basta esaminare i principj su' quali stabili la sua teoria intorno al moto de' fluidi. E per verità la nostra equazione (A) (§. XXI.) , che dalla cognizione fatta di quello stato trae sua origine legittimamente, potrebbe essere principio fondamentale, onde risolvere tutti i problemi di questo illustre

sto illustre Geometra, se fosse mio scopo un'Idrodinamica di pura speculazione. Ma tutto supporrebbe uno stato di moto non mai lo stato de' liquori in attualità di ringorgamento, ch'è l'oggetto in questione, ove non ha altrimenti luogo quell'equazione (§. XXIII.). Quindi apparisce in qual condizione di cose si accordi co' fatti la teoria di lui, cioè supponendo usciti i fluidi dal ringorgo, e messi a fluire senza le alternative di discesa e di equilibracione, le quali distruggono ogni accelerazione e continuità ne' movimenti.

§. XXV.

SOLIO. Ma come temerei di confondere gli oggetti, e di oscurare le idee chiarissime che possiamo formarci intorno all' interna condizione de' liquori costituiti in istato di ringorgamento, coll' inoltrare di più, che pur potria farsi, questa ricerca; così mi fo ad esplorare dietro a' passi fatti il movimento esteriore di loro allorchè sono passati da quello stato allo stato libero; e ciò farà l' argomento del seguente Capitolo.

CAPITOLO TERZO.

Del movimento de' liquori uscanti dallo stato di ringorgo fuor degli orificj scolpiti nelle conserve.

§. XXVI.

PROP. VI. *Le stille de' liquori fluenti da' fori delle conserve, ove sieno mantenuti a costante altezza sopra il centro de' medesimi fori, sono animate dalla gravità naturale, e dalla coazione delle pressioni circonfuse all'orifizio insieme combinate.*

Essendo il foro, ond' escono le stille, il confine ove termina lo stato ringorgato, e comincia il libero, è cosa indubitata, che cessando quivi il liquore di entrare nell' equilibracione sensibile della massa ringorgata, la velocità iniziale di lui diventa quella di un grave abbandonato dalla quiete sensibile all' azione libera della gravità. Ma i fenomeni

(§. ix.) dimostrano, che la pressione è che adopera nel cacciar le stille dagli orifizj. Forza è dunque, che l'azione della gravità, ond'è animata ogni stilla, si combini con questa pressione nel promuovere le stille uscenti dagli orifizj. Ma questa pressione non è della semplice colonna liquida soprastante al foro (*ibid.*), nè è questa semplice colonna che concorra a risarcire l'esborso al foro, confluendovi d'ogn'intorno i filamenti del liquore (§. x). Dunque le stille non escono dagli orifizj nè come corpi puramente abbandonati all'azione libera della gravità, nè come corpi animati da velocità acquistata continuamente cadendo, che per entro al ringorgo non ha luogo, nè finalmente per sola pressione delle colonne imminenti e circostanti al foro, ma per coazione manifestamente di tutte le pressioni circonfuse al foro combinata coll'azione della gravità; il che ecc.

§. XXVII.

SOLIO. Ancorchè possa questa coazione concepirsi bastevolmente col ponderare i fenomeni (§. vi. e seg.), non è forse maniera che la faccia comprendere più chiaramente che col rivoltare all'in su uno schizzatojo pien d'acqua, e schizzandone fuori il liquore colla pressione. Qui certamente non esce l'acqua animata dalla gravità, la quale anzi agisce contrariamente alla forza premente, nè per sola impulsione della colonna avente per base il foro, mentre l'embolo premente sospinge tutta la massa *per modum unius*, ma per vera impulsione di tutto il fluido unitamente contenuto nel tubo, e tutto unitamente cacciato dallo stantuffo. Lo sforzo simultaneo che si fa per ogni verso al foro da questa pressione unita è quello ch'io intendo per coazione di tutte le pressioni circonfuse al foro; e in questa guisa mostrano per appunto i fenomeni esercitarsi la pressione al foro, equivalendo l'olio soprannatante all'acqua ad uno stantuffo che la prema *per modum unius*.

§. XXVIII.

PROP. VII. *Poste queste cose, dico, che il moto attuale del-*

la vena uscente dall'orificio è moto composto combinato con la gravità naturale delle stille.

S'intenda segata la conserva pel centro del foro *ab* (Fig. IV.) con un piano verticale *ABCD*, e il flusso per *ab* sia ridotto allo stato permanente sotto l'altezza costante *AB*. Non ha dubbio, che essendo la pressione circonfusa di tutto il liquore la forza, che adopera nel cacciar le stille dal foro *ab*, combinata colla gravità naturale delle medesime, ed esercitandosi ella secondo la direzione della stessa gravità, le due parti del fondo *aB*, *bC* sono due obici in riposo esposti ed opposti al corso, perchè il liquore premuto e spinto debbe infletterfi, prima di giugnere a' punti marginali *a*, *b*, e piegare il corso, onde pervenire al foro rasente il margine. Gl'infimi filamenti pertanto, contigui al fondo, impongono necessariamente la cadente al margine stesso, da una parte in *b*, dall'altra in *a*, e servono essi medesimi di fondo a' filamenti immediatamente superiori, e questi ad altri superiori successivamente, e così di mano in mano, formandosi ivi la confluenza di due corsi cospiranti adombrati dalla figura. Ma facendosi scambievolmente impressione co' rispettivi moti l'un sull'altro i due sistemi di filamenti laterali, delle due correnti viene a formarli una corrente sola, prendendo le stille di entrambi i sistemi un moto comune. Trasferendo dunque lo stesso ragionamento sopra ciascun'altra sezione verticale del vase, come *ABCD*, cioè per tutto il perimetro dell'orificio, si proverà, che dopo la confluenza de' due sistemi cospiranti di ciascuna sezione, il moto delle stille di entrambi divien comune. Forza è dunque conchiudere che per la coazione delle pressioni circonfuse al foro è indotto nelle stille uscenti un vero moto composto, il quale combinato con quello della gravità naturale delle stille costituisce il moto attuale della vena uscente dall'orificio; il che ecc.

§. XXIX.

COROLL. I. La prima legittima e importantissima conseguenza che ricaviamo di qua, è, che ne' margini degli orifizj, per quello appunto che vi s'inflettono i filamenti concorrenti al foro, accade vera ed effettiva perdita di forza,

Ccc ij

cioè vero ed effettivo scemamento nella velocità assoluta delle stille.

COROLL. II. E però, se dalla lineetta ab (*Fig. V.*) sia raffigurata la cadente del liquore, incamminato con obliquo movimento al foro, impostata al margine a del fondo nella conserva $ABCD$, non ha dubbio, che sotto una data altezza di liquore permanente, stabilito pure e permanente esser deve, durante il flusso, l'angolo d'inclinazione bac . E che però rappresentando ab il fondo su cui scorre il liquido al suo sbocco, sarà pure stabilita e permanente sotto quell'altezza la direzione del corso.

§. XXX.

SCOLIO. Basta che qui siasi riconosciuto non senza fondamento, essere all'orificio il moto della vena uscente un moto in genere realmente composto. Dopo che ci faremo industriati di definire l'angolo d'inclinazione bac sotto un'altezza modulare, ci faremo a trattare più da vicino di questo moto composto, onde conoscerne, come meglio ci verrà fatto in tanto bujo, l'indole e la misura.

§. XXXI.

PROP. VIII. *Posto ciò, e assunta l'unità per altezza modulare costante del liquore nelle conserve, trovare l'angolo d'inclinazione bac sotto una tale altezza.*

Poichè la velocità attuale ed effettiva del liquore al margine è una velocità alterata dalle resistenze che inflettono il corso del liquore, e nel flusso permanente è pur permanente la direzione del corso ba (*Fig. V.*), facendo l'acqua all'acqua da fondo stabilito coll'angolo d'inclinazione bac , si chiami P l'altezza da cui scendendo un grave nel vacuo liberamente può acquistare in fine del moto la velocità primitiva, qualunque ella siasi, non alterata, p l'altezza dovuta alla velocità alterata, cioè alla velocità attuale secondo la cadente del fondo ba , e z l'angolo bac . E giacchè tutto è ignoto, riduciamo primamente a relazione le due altezze P, p . Sia pertanto lecito di far rappresentare la velocità

attuale delle stille pel fondo stabilito ba da quella che un grave discendente nel vacuo pel medesimo piano inclinato ba acquisterebbe in un tempo pari a quello che spenderebbe il medesimo grave libero a discendere per l'altezza verticale P dovuta alla velocità primitiva non alterata. E perciò s'intenda indefinitamente prolungato il fondo ab dalle parti di b , come fino in M , e conduca dal punto M la MN perpendicolare al fondo aC prolungato, e dal punto N la Nn perpendicolare ad aM , e dal punto n la nm perpendicolare ad MN . Se sia pertanto MN l'altezza P , farà Mn la lunghezza nel piano inclinato, cui percorrerebbe un grave in un tempo pari a quello ch'esso spenderebbe nella discesa per MN , e la velocità acquistata nel punto n rappresenterà la velocità attuale dovuta all'altezza p , cioè dovuta per le note leggi all'altezza Mm . Sarà perciò $Mm = p$, e $P : p = MN : Mm = \overline{Mn}^2 : \overline{Mm}^2 = \overline{Ma}^2 : \overline{aN}^2 = 1 : \text{sen.}^2 z$, presa l'unità per seno tutto. E' dunque

$P : p = 1 : \text{Sen.}^2 z$, e l'angolo z dovrà stabilirsi nell'inclinazione dimandata da questa proporzione. Ma di nuovo sia X la forza assoluta non alterata che opera verticalmente sopra le stille verso il fondo, x la forza attuale ed effettiva che risulta sottraendo dalla forza X la forza consunta nell'inflessione, ed incamminamento obbliquo delle stille verso il foro, $\mathcal{Q}$ l'altezza permanente del liquore Ec , q l'altezza Eb stabilita anch'essa e permanente, e la lineetta ab rappresenti un filamento infinitamente piccolo in moto sopra il fondo liquido stabilito ab . E' certo pertanto, che $X = ab \times P$, e per la stessa ragione $x = ab \times p$. Ma dalla proporzionalità precedente è $p = P \text{Sen.}^2 z$; dunque $x = ab \times P \text{Sen.}^2 z$. Dunque $X - x = ab (P - P \text{Sen.}^2 z) \dots (A)$.

Ma di nuovo essendo $Ec - Eb = \mathcal{Q} - q = bc$, se si prenda ab per seno tutto, farà nel triangolo bac il lato $bc = ab \text{Sen.} z$, e però $\mathcal{Q} - q = ab \text{Sen.} z \dots (B)$, e cacciando col paragone delle equazioni (A) , (B) l'infinitamente piccolo ab , si avrà

$$\frac{\mathcal{Q} - q}{\text{Sen.} z} = \frac{X - x}{P - P \text{Sen.}^2 z}, \text{ cioè } (\mathcal{Q} - q)(P - P \text{Sen.}^2 z) = (X - x) \text{Sen.} z.$$

Ora essendo X proporzionale a P , x proporzionale a p , ossia $P \text{Sen.}^2 z$, si sostituiscano in quest'equazione per X , x i

loro proporzionali P , $PSen.^2z$, e si ridurrà ella a questa $Q - q = Sen. z$. Ma Q , q essendo le altezze permanenti del medesimo liquore sotto le quali s'intendono impresse le velocità dovute alle altezze P , p , oppure P , $PSen.^2z$, faranno Q , q , P , $PSen.^2z$ quantità rispettivamente proporzionali, cioè $Q : q = P : PSen.^2z = 1 : Sen.^2z$. Ma Q è l'altezza permanente modulare, per cui si è assunta l'unità. Dunque $Q = 1$, e però $Q : q = 1 : Sen.^2z = 1 : q$, e per conseguenza farà $q = Sen.^2z$, e l'equazione $Q - q = Sen. z$ si cangerà in questa

$$Sen.^2z + Sen. z = 1$$

la quale risolta somministrerà

$$Sen. z = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$$

con che farà cognito l'angolo d'inclinazione bac della cadente del liquore impostata al margine a , presa l'unità per altezza modulare permanente del liquore sopra il centro del foro. Il che ecc.

§. XXXII.

SCOLIO. Abbiamo pertanto ottenuto di conoscere l'obliquità del moto con cui concorrono le stille all'orifizio sotto un'altezza modulare. La soluzione è per verità appoggiata ad un Postulato, il quale mena a questa proporzionalità, cioè che il seno tutto al seno dell'obliquità sia come la velocità totale non alterata, che converrebbe ad un liquore sotto detta altezza permanente, alla medesima velocità alterata dalle resistenze al margine, cioè alla velocità attuale ed effettiva. Ma perchè non insorga dubbio su questa soluzione ch'è capitale, mi fo a mostrare, che a questa conclusione si potrebbe pervenire direttamente senza derivarla da alcun Postulato. In fatti rappresentando ba un piano obliquo alla direzione della forza premente, e questa operando continuamente sotto un'altezza costante e permanente, mentre, fatta l'impressione, scappa pel foro il liquore premuto, è fuor di dubbio, che si fa su questo piano una vera impulsione obliqua. In conseguenza di che, lasciando le denominazioni medesime di P all'altezza dovuta alla velo-

città assoluta e totale che avrebbe il liquore, se non trovasse resistenze, e di p a quella ch' è dovuta alla velocità alterata, o alla velocità attuale, l'elemento liquido ba sostiene una pressione espressa dalla formula $ba(P-p)$. Ma, posto μ l'angolo EbM , e ammettendo, ch' è permesso, la teoria ordinaria delle impulsi oblique de' liquori, l'impulsione contro ba è espressa dalla forma $ba \times P \times \text{Sen.}^2 \mu$. Egualiando queste due forme si consegue $p = P - P \text{Sen.}^2 \mu = P \text{Cof.}^2 \mu$. Ma $\text{Cof.} \mu = \text{Sen.} bac = \text{Sen.} z$. Dunque $P:p = P:P \text{Sen.}^2 z = 1:\text{Sen.}^2 z$, ch' è la nostra proporzione stabilita qui sopra. Quindi apparisce non essere altrimenti arbitrario quel Postulato, nè mancante di fondamento la soluzione precedente.

§. XXXIII.

COROLL. I. Dunque l'altezza P dovuta alla velocità, onde sarebbe animato il liquore dalla pressione circonfusa sotto l'altezza modulare 1 , se la resistenza al margine non fosse, ond' è costretto a piegare il suo corso verso il foro coll' obbliquità determinata, farà all' altezza p dovuta alla velocità alterata, ossia all' attuale ed effettiva al margine,

come $1 : \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2} \right)^2$

COROLL. II. E però se si prenda, che può farsi, l'altezza permanente modulare del liquore, cioè l' unità per l'altezza P , farà necessariamente $\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2} \right)^2$ l'altezza alterata p dovuta alla velocità effettiva del liquore al punto a del margine.

COROLL. III. Ma come quest' altezza p , così è la forza del liquore in a , e come in a così in ogn' altro punto del margine, intendendosi adoperare un' egual pressione da per tutto sotto una medesima altezza permanente del liquore. Dunque la forza alterata, o l' attuale ed effettiva, onde sono animate le stille al margine del foro, nell'atto che vanno successivamente scappando, e sottraendosi alla pressione

circonfusa con la direzione *ba* sotto la data altezza modulare, sarà espressa dalla forma $\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^2$.

§. XXXIV.

Prop. IX. *Se due filamenti d'acqua costituiti in moto in un medesimo piano da opposte parti con direzioni tra di sè co-spiranti vengano a riunirsi, di due si fa un filamento solo dopo il concorso, il quale progredisce di moto composto pari a quello che assumerebbe una stilla solitaria sollecitata dalle forze inerenti a' filamenti con le stesse direzioni.*

Imperciocchè delle stille successivamente toccantisi nel concorso de' filamenti ciascheduna vicendevolmente è sollecitata obliquamente da due forze, cioè da quella del proprio sistema, e da quella che tende a imprimerle l'opposta stilla incontrata. E però ciascheduna, se fosse solitaria, si movebbe di moto composto con la direzione dovuta all'ordinaria composizione de' moti. Ma nell'istante del contatto per la natura del liquore si uniscono immediatamente le gocce, e di due se ne forma una, e perciò la goccia composta prende il moto e la direzione, cui prenderebbe ciascuna goccia componente se dopo il concorso restasse solitaria: il che è lo stesso come se al concorso fosse una stilla solitaria sollecitata dalle forze immateriali che sono ne' filamenti concorrenti con le stesse direzioni. Se dunque il flusso de' filamenti è permanente, continua la combinazione successiva di due stille in una, e il moto sopraddetto, e però si forma un filamento solo di queste stille successive composte di due, cioè un filamento composto de' due filamenti concorrenti, il quale necessariamente prende il moto composto pari a quello delle stille solitarie che s'è detto. Il che ecc.

§. XXXV.

Prop. X. *Se due correnti concorrano insieme, e si uniscano, i filamenti del tronco unito prendono direzione e moto a modo di filamenti composti dietro all'incontro ed unione di due*

due filamenti che concorrano insieme con la stessa forza delle correnti rispettivamente e con le stesse direzioni.

Poichè è di fatto, che delle due correnti se ne forma sempre una sola dopo l'unione, o un solo tronco, è cosa indubitata, che le impressioni che si fanno scambievolmente i due corpi liquidi concorrenti s'inducono scambievolmente mutazione nel moto e nella direzione di ciaschedun filamento; e però dovendo essere comune la direzione, e il moto dopo l'unione, ciò non può essere se queste mutue impressioni non si comunichino scambievolmente, e diffondano per tutti i filamenti, sicchè ne risulti una e la stessa composizione di moto per tutti. Ma ciò essendo, è pure manifesto, che ciascun filamento del sistema unito prende direzione e moto a guisa di filamento (Prop. preced.) composto dietro all'unione di due filamenti che s'incontrano con la stessa forza e direzione delle correnti rispettivamente. Dunque se due correnti ecc. Il che ecc.

§. XXXVI.

COROLL. I. Per conseguenza il moto di ciascun filamento del sistema unito è pari a quello che assumerebbe una stilla solitaria sollecitata dalle forze inerenti a' due opposti filamenti con le stesse direzioni, cioè dalle forze di due opposte correnti, considerate immateriali, e con le loro rispettive direzioni.

COROLL. II. E come se non di due sole, ma di qualunque numero si trattasse di correnti che si unissero, è di fatto, che di tutte si forma una corrente sola, in cui fluiscono i filamenti con moto e direzione comune; così è chiaro, che ciascun filamento dopo l'unione è nel caso di un filamento risultante dall'unione di due, altrimenti non assumerebbero direzione e moto comune, contro il supposto.

§. XXXVII.

PROP. XI. *Supposte queste cose, e data la forza e la direzione con cui opera il liquore al margine dell'orificio sotto la*
Tomo IV. Ddd

data altezza modulare mantenuta costantemente nella conserva, trovare l'altezza dovuta alla velocità effettiva ed attuale della vena intera all'uscir dell'orificio sotto la stessa altezza permanente.

Essendo stabilita (§. xxix.) sotto un dato angolo la cadente del liquore verso il fondo del vase impostata a qualunque punto del margine del foro, tutte le stille intorno debbono concorrere all'orificio con la stessa direzione, formandosi ivi confluenza di correnti da tutte le parti sotto un tal angolo d'inclinazione col fondo. Ovunque pertanto s'intenda segata pel centro del foro la massa liquida con un piano verticale, due correnti hanno luogo perpetuamente in questo piano, i cui filamenti scorrono al basso sotto un tal angolo. Se dunque si riguardi la comune sezione di questo piano e del piano interno dell'orificio, come il luogo di confluenza, ove si uniscano i filamenti delle due opposte correnti, ciascuna stilla di questa comune sezione può considerarsi appartenere all'origine della vena uscente, ed essere riguardata come formata di due stille combinate (§. xxxiv.) dietro al concorso ed unione di due opposti filamenti. Il che verificandosi in tutte le sezioni fatte similmente all'intorno, l'origine dell'intera vena uscente va riguardata come il luogo della confluenza ed unione di tutti i sistemi di filamenti concorrenti al foro presi due a due da opposte parti in un medesimo piano. Il moto pertanto di ciascuna stilla dall'origine di detta vena diventa necessariamente composto, e pari a quello che assumerebbe una stilla solitaria sollecitata dalle forze inerenti a' filamenti che a quella stilla mettono capo (§. xxxiv.), cioè dalle forze delle due correnti opposte costituite nel medesimo piano, e concorrenti insieme. Ma dovendo essere una e costante sotto un' altezza comune di liquore permanente la quantità dell'azione esercitata tutto all'intorno dell'orificio, tutti i filamenti delle correnti per ogni parte debbono essere animati dalla stessa forza; ed essendo tutti diretti al foro con un dato e stabilito angolo d'inclinazione prescritto dalla cadente dell'infimo strato circonfuso impostata al margine, ciascun sistema di due opposti filamenti concorrenti dovrà costituire

colla medesima direzione di moto un medesimo e determinato angolo al concorso, cioè all'origine della vena uscente. In conseguenza la composizione di due forze per una delle stille qualunque all'origine della vena somministrerà la forza composta, ond'è animato il sistema di tutti i filamenti dell'intera vena uscente dall'orificio. Per la qual cosa sia il punto *B* (Fig. VI.) nell'orizzontale *GD* una di queste stille combinate della confluenza, e ciascuna delle rette uguali *AB*, *CB* rappresenti la forza del liquore al margine del foro cioè quella di ciascun de' due filamenti di cui *B* è la confluenza, cui abbiamo determinato al §. xxxiii. Coroll. iii., e ciascuno degli angoli *ABD*, *CBG* l'angolo costante che fa d'ogn' intorno la direzione del liquore concorrente al margine determinata al §. xxxi. cioè di nuovo quella de' predetti filamenti. Dalle uguali *CB*, *AB* si costruisca il parallelogrammo *CBAF*, e condotta la diagonale *FB*, che farà necessariamente perpendicolare a *GD*, si tiri a questa diagonale dal punto *A* la perpendicolare *AE*. Essendo uguali gli angoli *EAB*, *ABD* per le parallele *DB*, *AE*, sarà $1 : \text{sen. } ABD = 1 : \frac{\sqrt{5-1}}{2} = BA : BE$. Ma la forza $BA = \left(\frac{\sqrt{5-1}}{2} \right)^2$

(§. xxxiii.). Dunque $1 : \frac{\sqrt{5-1}}{2} = \left(\frac{\sqrt{5-1}}{2} \right)^2 : BE$, e perciò $BE = \left(\frac{\sqrt{5-1}}{2} \right)^3$. Dunque la forza composta $BF = 2BE$

farà espressa dalla forma $2 \left(\frac{\sqrt{5-1}}{2} \right)^3$.

Se dunque sia $\left(\frac{\sqrt{5-1}}{2} \right)^2$ l'altezza dovuta alla velocità di ciascuno de' due filamenti concorrenti in *B*, farà $2 \left(\frac{\sqrt{5-1}}{2} \right)^3$ l'altezza dovuta alla velocità effettiva da cui sarà animata la stilla *B*, e in conseguenza il filamento composto che verrà generato nella vena dal flusso della stilla *B*. Ma questa velocità è la velocità di tutto il sistema di stille, come la stilla *B*, combinate nella comune confluenza all'origine della vena. Dunque l'altezza dovuta alla velocità attuale ed

effettiva della vena nel suo flusso fuor dell' orificio è $2\left(\frac{\sqrt{5-1}}{2}\right)^3$, essendo l' unità l'altezza modulare permanente del liquore mantenuta nella conserva sopra il centro del foro . Il che ecc.

§. XXXVIII.

COROLL. I. Ed ecco in che adopera la coazione delle pressioni circonfuse al foro dimostrata da' fenomeni e messa in chiaro ne' primi paragrafi di questo Capitolo . L'effetto compiuto e totale di questa coazione è il generare nelle stille uscenti un vero moto composto, di cui in genere nella Prop. VII, e che abbiamo qui determinato a rigore : moto conforme a tutte le sperienze, come il mostreremo qui sotto.

COROLL. II. Si fa quindi palese come sia e come adoperi al foro la combinazione della gravità naturale con questa coazione, di che nelle Proposizioni VI, e VII le quali agiscono congiuntamente, ma la coazione in quanto a se opera come se la gravità nelle stille uscenti non fosse, e questa come se quella non fosse . Nel seguente Capitolo vedremo poi in che vaglia ed influisca la forza acceleratrice della gravità che comincia all'origine della vena, dovendo essere riguardato come costante ed uniforme il moto indotto dalla coazione a flusso stabilito e permanente.

COROLL. III. Dobbiamo pertanto nel passaggio dallo stato ringorgato allo stato libero distinguere bene le condizioni che possono agire in quel passaggio su le stille uscenti . Imperciocchè allora riescono le stille come corpi abbandonati all' azione libera della sola gravità, quando è rimossa la coazione delle pressioni circonfuse, come accaderebbe tolto improvvisamente il fondo alla conserva, e in questo caso nell' equazione $dc - gdt = 0$ (§. XXI.) g è la gravità naturale . Ma nel caso dell' uscita da un foro scolpito nella conserva, ch' è il nostro, la coazione delle pressioni opera combinata e congiuntamente coll' azione della gravità, e g non è più la sola forza naturale de' corpi abbandonati a se stessi. Questa distinzione e dilucidazione di cose sembra dell' ultima importanza .

COROLL. IV. Quindi è facile arguire, che in tutti i casi la velocità iniziale nel primo aprirsi di un foro in fondo o in fianco di una conserva, ove il liquore contenuto è in assoluta e perfetta quiete, non può essere che infinitamente piccola. Al moto finito permanente non può altrimenti pervenire il flusso nel primo istante, giacchè le prime stille partono sempre dalla quiete; e non è forza finita in natura, come ne faremo parola nel Cap. seguente, la quale possa in un istante imprimere velocità finita in un corpo quieto. Per la qual cosa ovunque si parli di velocità finita all'origine della vena, s'intenda sempre non di velocità iniziale, ma di velocità stabilita, uniforme, e costante, ridotto il flusso allo stato permanente.

COROLL. V. Sarà pertanto la velocità che avrebbe in fine del moto un grave liberamente disceso dall'altezza modulare 1, cioè dalla superficie permanente del liquore al centro del foro, alla velocità attuale ed effettiva delle stille uscenti col moto indotto dalla coazione delle pressioni circonfuse fuor del medesimo foro sotto una tale altezza modulare, esattamente, come

$$1 : \frac{\sqrt{5-1}}{2} V(\sqrt{5-1})$$

e prossimamente, prendendo le radici quadrate colle sole prime decimali, come

$$55 : 36 = 8 : 5 \frac{13}{55}$$

Ma come sono tra di sè queste velocità, così sono gli esborfi di liquore fatti in pari tempo dal medesimo foro. Dunque farà l'esborso che si farebbe sotto l'altezza 1, se la velocità del liquore al foro fosse quella d'un grave disceso liberamente da tanta altezza sino al centro del foro, all'esborso attuale ed effettivo, che si fa in pari tempo dal medesimo foro, come $8 : 5 \frac{13}{55}$.

§. XXXIX.

SCOLIO I. Prendendo per mano le Tavole del *Guglielmini*
D d d iij

nel libro che ha per titolo, *Mensura aquarum fluentium*, si trovino gli esborfi che converrebbero alle velocità libere acquistate cadendo dalle altezze ivi notate, e si paragonino cogli effettivi che l'Autore dedusse dalle sue proprie sperienze; si troverà che la proporzione di quelli a questi si aggira intorno a' numeri $8 : 4 \frac{n}{m}$, essendo m sempre maggiore di n .

Il caso calcolato dal P. *Grandi* nella Prop. x. Cap. II. del Trattato intorno al movimento dell'acque porta la proporzione tra l'esborso che dirò ipotetico e l'esborso effettivo sotto l'altezza di piedi 12 parigini, de' numeri 2952, 1663, ch'è quella di $8 : 4 \frac{187}{369}$; e così dicasi degli altri che ho calcolato con lo stesso metodo, e con la stessa proporzione assegnata dal *Grandi* tra il piede di Parigi e quello di Bologna. Un po' più forti riescono le proporzioni tra l'un esborso e l'altro, cioè di $8 : 6 \frac{n}{m}$, facendo lo stesso esame sull'esperienze del *Mariotte*. Ma tenendoci alle più recenti ed accuratissime sperienze del Sig. Ab. *Bossut* (*Traité élémentaire d'Hydrodynamique*), non può darli per certo maggior consenso nè più deciso tra la nostra Teoria, e l'esperienza maestra. La Tavola nella Part. II. Cap. IV. pag. 72 il dimostra evidentemente, ed è appunto la proporzione di $8 : 5$ prossimamente ricavata dalle sue sperienze, quella che questo illustre Geometra adopera (§. 361.) per correggere ed abbassare gli esborfi ipotetici, onde ridurli ai veri ed effettivi, che è per appunto quella stessa, che teoricamente abbiamo determinato a priori.

Scolio II. E poichè le velocità effettive ed attuali dell'acqua uscente in pari tempo da un medesimo foro sotto differenti altezze di liquore permanente sopra il centro del foro sono perpetuamente (§. XI.) in ragione sudduplicata delle medesime altezze permanenti; ancorchè non sieno elle poi quelle medesime velocità che acquisterebbe un grave discendendo per esse liberamente fino al centro del foro; e sono in oltre quelle velocità effettive necessariamente tra di se in ragione sudduplicata delle altezze da cui discendendo un grave liberamente dalla quiete giugnerebbe ad acquistarle effe-

tivamente in fine del moto, faranno (§. XI. Coroll.) le altezze permanenti del liquore, sotto di cui vengono elle acquistate, nella stessa proporzione di queste altezze vere a cui sono elle effettivamente ed attualmente dovute. Se sia dunque l'unità una di quelle altezze di liquore permanente, A un'altra qualunque, giacchè l'altezza permanente 1 sta all'altezza vera dovuta alla velocità del liquore al foro come $1 : 2 \left(\frac{\sqrt{5-1}}{2} \right)^3$, farà

$$1 : 2 \left(\frac{\sqrt{5-1}}{2} \right)^3 = A : 2A \left(\frac{\sqrt{5-1}}{2} \right)^3,$$

e però $2A \left(\frac{\sqrt{5-1}}{2} \right)^3$ farà l'altezza vera dovuta alla velocità della vena all'orificio sotto l'altezza permanente A di liquore ringorgato nella conserva sopra il centro del foro, cioè prossimamente $\frac{154}{125} A$, oppure $\frac{2}{5} A$ in più piccoli numeri prossimi.

SCOLIO III. Ed ecco finalmente onde avviene, che, mentre le velocità dell'acqua uscente da' fori delle conserve sono sensibilmente nella ragione dimezzata delle altezze permanenti sopra i centri de' medesimi fori (§. XI.), si mostrino elle nello stesso tempo di tanto minori di quelle che acquisterebbe un grave cadendo liberamente dalla quiete dalle medesime altezze.

E' bensì A l'altezza permanente nella conserva, sotto di cui fluisce la vena, ma non è che $2A \left(\frac{\sqrt{5-1}}{2} \right)^3$ l'altezza vera da cui dee discendere un grave dalla quiete per acquistare l'attuale ed effettiva velocità del flusso all'orificio; ond'è poi che abbiamo trovato essere come 8 a $5 \frac{13}{55}$ prossimamente l'esborso che dovrebbe aver luogo in supposizione che l'altezza vera fosse A , all'esborso effettivo; proporzione intorno a cui si sono sempre aggirate le sperienze di tutti gl'Idrodinamici, e di tutti i tempi.

CAPITOLO QUARTO

Della vena contratta.

§. XL.

Da quanto ci siamo industriati d'investigare e stabilire ne' Capitoli precedenti intorno alla legge con cui fluiscono dalle conserve i liquori mantenuti a costante altezza durante il flusso, apparisce chiaramente, che il non essere giammai stata per avventura definita a dovere la condizione loro, e l'indole vera dello stato ringorgato, ha tenuto mai sempre involto quest'argomento in oscurità densissima, ancorchè d'altronde si trovasse col fatto la velocità a' fori sempre minore di quella che avrebbe acquistato un grave libero disceso dalla superficie permanente sino al foro, e l'altezza vera ed effettiva dovuta a questa velocità sempre minore della metà dell'altezza permanente del liquore nelle conserve; il che pur doveva rendere sospette tutte le teorie che a tali risulamenti non conducevano per alcun modo. E fa meraviglia che volessero quella velocità dovuta a tanta altezza anche quegli Idrodinamici, i quali attribuivano nelle loro teorie il flusso de' liquori alla pressione di una colonna avente per base il foro e per altezza l'altezza del liquore, non potendo giammai dimostrarsi, che tale velocità possa essere effetto adeguato di tale pressione. Dando anche luogo alla pressione circonfusa, alla coazione delle pressioni intorno al foro, dimostrata da' fenomeni, perchè possa essere impressa alla vena uscente la velocità, onde la troviamo effettivamente dotata, ch'è ben tutt'altro da detta pressione limitata, e di tutt'altra efficacia, è ella tuttavia insufficiente a imprimere tanta quanta è quella d'un grave libero disceso dalla superficie del ringorgamento al piano del foro.

§. XLI.

L'illustre *Newton* era per avventura con più di ragione a tal sentenza condotto, siccome quegli che nella sua teoria faceva

ria faceva attualmente ed effettivamente discendere il liquore da quella superficie al foro. Ciò non ostante nella sua prima edizione de' Principj matematici della filosofia naturale non seppe allontanarsi dal fatto conchiudendo la velocità del liquore uscente dovuta alla sola meta incirca dell' altezza del liquore permanente nella conserva.

Ma facendo in appresso sopra di lui forza grandissima, come su molti altri hanno sempre fatto e fanno tuttavia i getti dell'acqua fatti da' fori aperti nelle sponde de' vasi, i quali sembrano rispondere in qualche modo alle leggi de' progetti trovati dal *Galilei*, cangiò sentenza nella seconda edizione. Avendo pertanto osservato nelle vene ch'escono un notabile ristagnamento palesarsi a poca distanza dal foro, stimò nel calcolo della velocità dell'acqua uscita da' fori doverli aver riguardo non già al diametro del foro, ma a quello della vena ristretta. E in fatti col solo impiccolire la vena in ragione di $\sqrt{2} : 1$, trovò immediatamente rispondere, ed essere dovuta alla velocità della sezione contratta un' altezza doppia dell' altezza che le sperienze facevano dovuta alla velocità attuale ed effettiva, cioè l' altezza incirca dell' acqua permanente sopra il centro del foro: partito degno di quel grand' uomo.

§. XLII.

Ma ora che abbiamo accertata la condizione dell' acqua contenuta nelle conserve a costante altezza, e che la teorica è messa in concordia co' fenomeni, sembra nel calcolo della velocità dell'acqua uscente da' fori non doverli più aver riguardo al diametro di questa vena, ma sì bene a quello del foro attuale ed effettivo unicamente. Imperciocchè non avendo luogo alcuna immaginabile accelerazione per entro alla massa contenuta nelle conserve, nè altra reale discesa fuorchè quella momentanea ch' è necessaria per tener risarcito l'esborso, e pareggiata l'entrata coll' uscita, non è ragione che sforzi a conchiudere la velocità del flusso essere necessariamente uguale a quella, che l'acqua medesima avrebbe acquistato nel cadere dalla superficie permanente sino al foro, onde sia d' uopo, per salvar la legge, di aver riguar-

do al diametro della vena contratta, non già all' effettivo dell' orificio. Ed oltre che militano anzi ragioni dimostrative per lo contrario, le sperienze tutte fanno vedere apertamente, che le velocità attuali non rispondono a quelle de' gravi caduti da tanta altezza. Ma come tutti gl' Idrodinamici coll' esempio del *Newton* hanno sempre riguardato e adottato il sostituire la sezione contratta oltre il foro al foro medesimo come capitale mezzo, onde ridurre il flusso dell' acqua dalle conserve alle leggi de' gravi cadenti, è necessaria cosa, e non senza frutto, il mettere più in chiaro che sarà possibile le ragioni, che portano ad escludere dal calcolo della velocità dell' acqua che sgorga da' vasi la contrazione delle vene.

§. XLIII.

E' cosa indubitata, che senza una reale accelerazione di moto la vena uscente nè a poca, nè a molta distanza dal foro non potrebbe ristagnerfi giammai. Ma realmente nella vena comincia aver luogo immediatamente all' uscir del foro un' accelerazione effettiva. Imperciocchè è bensì costante ed uniforme la forza del moto composto indotto dalla coazione delle pressioni circonfuse (§. xxxviii.), ma con questa forza va combinata la gravità naturale delle stille, alla cui liberazione si trovano elle abbandonate all' orificio; ed è poi congiuntamente che queste due forze operano all' origine della vena. In conseguenza dovendo passare per tutte le sezioni la stessa quantità d' acqua nello stato che si vuol sempre considerare ridotto a permanenza, è manifesto, che le sezioni debbono essere più ristrette ov' è maggiore la velocità, e però la vena prenderà ad assottigliarsi più e più successivamente per l' accelerazione necessariamente indotta dalla gravità acceleratrice dall' origine più e più successivamente crescente. Giusta pertanto è stata l' osservazione del *Newton* e d' altri in appresso intorno a questa contrazione, la quale indipendentemente dall' esperienza è dimostrata dalla ragione, e non è altrimenti effetto accidentale, come qualche Idrodinamico, d' altronde illustre, s' è dato a credere. Non sembra però nè giusto, nè esatto il conchiudere che s' è fatto dal *Newton*

e dagli altri, che questa contrazione abbia esclusivamente luogo ad una sola determinata distanza dal foro, oltre di cui debba la vena cessar di ristrignersi. Questa conclusione è fondata sul supposto, che là solamente succeda detto ristrignimento, ove i moti laterali riuniscono le loro oblique direzioni conspirando col moto dell'acqua che sgorga perpendicolarmente. Ma riflettendo che l'azione libera della gravità comincia immediatamente all'origine della vena ad esercitarsi sopra le stille uscenti, è manifesto, che se l'effetto di que' moti laterali obliqui cessa, secondo una tale sentenza, dopo l'unione, lasciando nelle stille impresso un grado di velocità uniforme che continua ad animarle costantemente senza nuovi aumenti, non cessa però la gravità di agire sopra di esse, e di accelerarle continuamente. Se dunque il flusso sia in un mezzo non resistente, la contrazione della vena non nasce già e cessa ad una determinata distanza dal foro, ma dall'origine comincia della vena, e continua ad aumentarsi più e più quanto più cresce l'accelerazione.

Ed ecco stabilita bensì la realtà della contrazione, ma tolto di mezzo un falso supposto, che legittimava in qualche modo l'arbitrio di aver riguardo piuttosto al diametro della vena ristretta di quello che all'effettivo del foro.

§. XLIV.

E qui sia permesso l'osservare, che essendo ora deciso, che non è accelerazione alcuna per entro alla massa dell'acqua ringorgata nelle conserve, e che non è il flusso dovuto alla discesa dell'acqua dalla superficie al foro, come stimava il *Newton*, non ha più luogo il conoide iperbolico di liquore, o la cateratta che questo grand' uomo aveva introdotto nel Lib. II. Sez. VII. Prop. xxxvi. de' suoi Principj, e il nostro *Guglielmini* dopo di lui nel suo Trattato *De mensura aquarum fluentium*. Ma per l'opposito è chiaro da quello che or abbiamo esposto intorno alla vena contratta, che la cateratta vera fatta dall'acqua fluente riesce fuori del vase, ed ha principio al foro. La figura della vena è quivi pure un conoide iperbolico del quarto grado, di cui non è fuor di proposito il dar qui l'equazione della sezione generatrice or

poi che per la prima volta è lecito di esprimere con esattezza la velocità effettiva al foro per una funzione dell' altezza permanente del liquore contenuto nella conserva.

Sia pertanto *MNOP* (*Fig. VII.*) la conserva, $BC = a$ il semidiametro della sezione orizzontale, supposta circolare, della vena all' origine, $DE = y$ il semidiametro di qualunque altra sezione della vena parallela a BC , $BD = x$; e rappresenti $AB = z$ l'altezza dovuta alla velocità uniforme stabilita durante il flusso permanente per la coazione delle pressioni circonfuse al foro nelle stille all' origine della vena. Sarà la velocità in *B* alla velocità in *D* come $\sqrt{z}$ a $\sqrt{(z+x)}$; ma queste velocità sono inversamente come le sezioni, o come i quadrati de' semidiametri di dette sezioni, per le quali passa ad ogn'istante una medesima quantità di acqua, e però farà

$$\sqrt{z} : \sqrt{(z+x)} = y^2 : a^2.$$

E poichè, posta *A* l'altezza permanente del liquore *NM*, è $z = 2A \left(\frac{\sqrt{5-1}}{2} \right)^2$ (§. xxxix Sc. 11.), l'equazione alla sezione *CE* generatrice del conoide iperbolico della vena farà

$$2Aa^4 \left(\frac{\sqrt{5-1}}{2} \right)^2 - y^4 \left(x + 2A \left(\frac{\sqrt{5-1}}{2} \right)^2 \right) = 0.$$

§. XLV.

Possiamo intanto conchiudere, che non dee per alcun modo imputarsi a questa contrazione l'opposizione in cui è stata finora la teorica coll'esperienza, come si pretende, cioè la cagione per cui non esce tant'acqua da' fori quanta richiede la velocità dovuta all'altezza del liquore sopra 'l piano di loro; imperciocchè la teorica primamente che richiede questa corrispondenza del moto effettivo dell'acqua con quello de' gravi caduti da tanta altezza, non è fondata che sopra alcuni fatti non bene interpretati, come vedremo; e in secondo luogo, se la sezione della vena è più angusta a qualche distanza dal foro, che non è al foro, la velocità

in ricompensa è ivi altrettanto maggiore, che non è al foro, e precisamente in ragione invera delle sezioni.

La stessa ragione poi, che autorizza a sostituire al diametro del foro il diametro di una tal sezione più angusta, autorizza pure a sostituirgli quello di tal altra che si vuole nell'estensione della vena, giacchè per tutte passa la stessa quantità di acqua. Se dee quindi averli riguardo nel calcolo della velocità non già al diametro dell'orificio, ma ad altro più ristretto della vena, non è per avventura sezione nel conoide liquido, che non possa essere assunta legittimamente per sezione più ristretta, e l'altezza che risulterà dovuta alla velocità sarà sempre varia, e sempre legittima al par di quella, che coincide coll'altezza del liquore sopra il foro. Tosto che si attribuisca al foro effettivo la vera ed effettiva velocità dovuta non già all'altezza permanente dell'

acqua A , ma alla funzione $2A \left(\frac{\sqrt{5-1}}{2} \right)^3$ di questa altezza

che abbiamo determinato, non è più necessario d'ora innanzi lo scemarla in ragione di 8 a 5 (*Bossut Hydrodyn.* §. 361.) per conto della contrazione della vena, essendo la vera ragione della velocità di un grave caduto dall'altezza A alla velocità attuale ed effettiva al foro sotto una tale al-

tezza permanente in ragione di $\sqrt{A}$ a $\frac{\sqrt{5-1}}{2} \sqrt{A(\sqrt{5-1})}$,

cioè come 8 a 5 $\frac{13}{55}$ per l'appunto (§. xxxviii.).

§. XLVI.

Ma così essendo, ond'è poi che i getti, come dicemmo, sembrano fare eccezione alla regola ed ontà alle altre sperienze, e alla teorica che attesta il contrario? La questione è oltremodo difficile, e difficile il nodo da sciorsi quant'altri mai. Cerchiamo pertanto d'introdurre almeno un po' di chiarore in tanto bujo, se pur sia possibile, analizzando i fatti scrupolosamente.

Per due versi pajono opporsi i getti alle altre sperienze, cioè per le loro ampiezze trovate, come si pretende, rispon-

dere al moto de' progetti in modo , che la forza di proiezione sembra essere quella di un grave caduto dall' altezza permanente dell'acqua nelle conserve, e pel risalire che fanno verticalmente all'altezza dell'acqua contenuta nelle medesime conserve; dal che si vuol inferire, avere il getto all'uscir del foro per appunto quella velocità che avrebbe acquistato l'acqua cadendo da tanta altezza.

Cominciamo dunque dal primo, ed esaminiamo la realtà della cosa, e se sia fondata su' fenomeni l'argomentazione. Si comincia in primo luogo dal riguardare la vena liquida all'uscir del foro, come un grave lanciato da quel sito con una certa forza nel vacuo. Combinando poscia il moto naturale accelerato di questo grave, alla maniera del *Galilei*, col moto orizzontale che quella forza gl'imprimerebbe uniformemente, si viene a conchiudere, che , come dal grave , così sia dalla vena descritta la parabola conica . Note essendo pertanto le coordinate per qualunque punto preso nel getto curvilineo, e supposta parabolica la traiettoria, si ricava ben presto il suo parametro; e perchè la quarta parte di questo parametro è dimostrata dal *Galilei* essere l'altezza dovuta alla velocità orizzontale con cui è lanciato il grave , farà quella pure l'altezza dovuta alla velocità della vena all'uscir del foro .

Si pretende dunque, che le ampiezze delle curve descritte da' getti si trovino tali quali si richiedono, perchè, dietro a queste supposizioni, i getti all'uscir dell'orificio abbiano per velocità orizzontale quella stessa ch'è dovuta all'altezza dell'acqua sopra il centro del medesimo orificio. Questa semplice espolizione di cose mostra subito , che i principj intanto su' quali l'argomentazione si appoggia sono ipotetici: che non s'inferisce l'altezza dovuta alla velocità della proiezione dal fatto, ma dalle proprietà della parabola: che una necessità, per così dire, geometrica prende il luogo della legge naturale ed effettiva con cui esce il liquore del foro, e che per conseguenza non sono questi per alcun modo fondamenti sodi e sicuri onde trarne conseguenze di fatto, com'è necessario nel caso presente. Se son ben lontani i gravi lanciati in aria dal descrivere la parabola apolloniana , molto più debbono esserlo i liquori, atteso il loro composto particola-

re, e il particolar modo con cui cadono per aria a differenza de' solidi. Ferma dunque una data ampiezza di getto sotto una data altezza di liquore nella conserva, che sono le cose di fatto, tostò che dee dipendere la determinazione della velocità dalla legge del moto fatto per aria, cioè dalla natura della traiettoria descritta dal getto, è cosa dell' ultima evidenza, che se non è legittima l'assunzione di questa, siccome quella che assoggetta a determinata legge la forza di proiezione, illegittima pure riesce la determinazione conseguente della velocità al foro, e perciò dell'altezza che le è dovuta. E' dunque manifesto, che, se desse anche il calcolo nell' ipotesi assunta con tutta precisione l'altezza del liquore sopra il centro del foro per altezza dovuta alla velocità di proiezione, farebbe ella sempre una verità condizionata, un ipotetico risultamento di cui potrebbe sempre dubitarsi, e in tutt' altro caso forse ammissibile fuorchè in questo.

§. XLVI.

Ma il fatto sta, che il risultamento di questo calcolo non solamente non somministra tanta altezza, ma piuttosto si uniforma sensibilmente a quello dell' altre sperienze comuni del raccorre e misurare l' acqua ch' esce per fori armati di tubo in un dato tempo sotto pari altezze permanenti; ch' è cosa notevole.

A questo oggetto prendo a considerare le sperienze solenni istituite dal Sig. *Krafft* a Pietroburgo, destinate a misurare la quantità dell' impulsione delle vene fluide (*Com. primi di S. Pietrob. Vol. VIII.*), a qualcuna delle quali diede mano lo stesso venerando *Eulero*, e quelle istituite dall' accuratissimo Sig. *Bossut* (*Hydrodyn. T. II. §. pag. 55.*).

Risulta al Sig. *Bossut* da molteplici sperimenti essere l' altezza dell' acqua permanente nelle conserve all' altezza dovuta alla velocità con cui escono le vene da' fori armati di tubo, come 1708 a 1111, cioè come 3738 a 2431. Assunta pertanto questa proporzione come fondamentale, è questo il prospetto delle altezze ricavate dal Sig. *Krafft* dalle ampiezze de' getti considerati di figura parabolica.

Sperienze	Altezza permanente del liquore	Altezza dovuta alla ve- locità effettiva	Altezza teorica dedotta dalle ampiezze del getto.
I.	3 7 3 8	2 4 3 1	2 5 5 7
II.			2 5 7 9
III.			2 7 5 3
IV.			2 5 3 9

ove si vedono concorrere i risultamenti dalla considerazione delle ampiezze de' getti piuttosto colle sperienze comuni, che far loro eccezione, ed essere ben lontani dal fare argomento capitale per la velocità ai fori come dovuta all' altezza de' liquori permanente nelle conserve.

Da tutto ciò possiamo non senza fondamento conchiudere, che il fatto delle ampiezze de' getti non è stato per avventura rigorosamente interpretato, sì per conto della linea da essi descritta per aria, la quale mena ad una velocità di proiezione puramente ipotetica non mai effettiva e reale, come dovrebbe essere, per opporsi legittimamente alle sperienze di fatto, e sì ancora perchè, concesso pure che fosse parabolica la loro traiettoria, non ne risulta poi la conseguenza che s'intende di ricavarne; sicchè da questo canto non s'affaccia, come sembrava, fondata ragione onde piantar massima, che inducano a credere le altre sperienze, avere indubitatamente i getti all' uscir de' fori sotto una data altezza permanente di liquore velocità pari a quella de' gravi caduti da tanta altezza.

§. XLVII.

E quanto all'argomento del risalir verticale de' getti poco men che all'altezza dell'acqua nelle conserve, è egli tutt'altro da quello delle ampiezze che abbiamo considerato qui innanzi.

E' cosa di fatto, che risale l'acqua a tanta altezza, e se non andasse spesa parte della forza nel superare le resistenze ne' tubi di condotta, e negli orifizj di uscita, e non traggessero i zampilli un mezzo resistente, pare che vi rimonterebbero indubitatamente. Se dunque per una parte tutte le altre sperienze concorrono a dimostrare, che la velocità delle vene all'uscir degli orifizj è ben lontana dal pareggiare quella che avrebbe guadagnato l'acqua cadendo dall'altezza della conserva, questo fenomeno dall'altra sembra certamente essere in opposizione con tutti gli altri fatti, e menar a conchiudere, che l'acqua esca da' vasi con una velocità pari a quella che si sarebbe acquistata cadendo dall'altezza che ha nel vase, mentre la può ricondurre alla medesima altezza. Ma è egli concesso di dire, a fronte di sì potente difficoltà che ha sempre sino al dì d'oggi conservato la sua forza, nè ha potuto giammai torrsi di mezzo nell'Idrodinamica, essere apparente soltanto l'analogia, la corrispondenza di questo fenomeno con quello della discesa ed ascesa de' gravi liberi, e doverli da altri principj ripetere la causa di una tal ascesa de' liquori? Esporrò qui pertanto brevemente ciò che ho trovato meditando e sperimentando su questo soggetto, e ciò che m'ha potuto convincere, e trarre dalla perplessità in cui era per l'innanzi con tutti gli altri.

§. XLVIII.

Consideriamo dunque la vena all'uscir de' fori in due circostanze; la prima all'istante dell'aprirsi il varco all'acqua, la seconda all'istante che il suo moto è stabilito, e tale si mantiene in appresso, cioè che il corso è ridotto a stato permanente. Queste due epoche vanno debitamente distinte. Mi fo perciò a dimostrare rigorosamente, che nella prima non

è assolutamente luogo a velocità pari a quella di un grave caduto dall'altezza dell'acqua permanente nella conserva fino al centro del foro. Imperciocchè è cosa certa, che le stille nell'istante che precede quello dello schiudersi dell'orificio sono in quiete assoluta. Qualunque pertanto siasi la forza finita con cui nell'istante dello schiudimento vengono cacciate le prime stille dall'orificio è ugualmente certo, che elle debbono cominciare a muoversi dalla quiete. Ma non è assolutamente forza finita in natura (§. xxxviii. Coroll. iv.) che possa in istante imprimere in un corpo quieto velocità finita. In conseguenza le stille della vena nel primo istante dell'uscita non possono essere animate che da velocità infinitamente piccola. Ora, supponendosi sempre finita l'altezza dell'acqua sopra il foro, è indubitato, che se quelle medesime stille fossero in vece effettivamente cadute da tanta altezza, e dovessero con la velocità acquistata cominciare il loro moto all'orificio, sarebbero attualmente ed effettivamente animate al primo istante dell'uscire da velocità finita, cioè da quella ch'è dovuta a tanta altezza. Ma attualmente ed effettivamente muovono elle dalla quiete, e non concepiscono nel primo istante che una velocità infinitamente piccola, qualunque siasi l'altezza dell'acqua permanente sopra il foro. E' dunque dimostrato, che nella prima epoca non è la velocità delle stille uscenti pari a quella di un grave caduto da tanta altezza.

§. XLIX.

Di qua ricaviamo per conseguenza necessaria, che essendo di fatto finita nello stato permanente la velocità attuale della vena, e dovendo essere infinitamente piccola la velocità iniziale al principio del moto, il passaggio dalla prima alla seconda epoca dee farsi per gradi minimi di velocità sempre crescente, finchè le stille pervengano al grado finito uniforme, che si mantiene poi costantemente finchè dura il flusso.

§. L.

Esaminiamo dunque se mai sia questo grado di velocità fi-

nita permanente quello per l'appunto che avrebbero le stille cadute attualmente dall'altezza dell'acqua nella conserva, giacchè volte all'insù le vene fluenti risalgono a tanta altezza. E in primo luogo veggiamo qualche cosa intorno all'esborso d'acqua che si fa per i getti verticali, onde trar qualche lume nella questione. Si osserva intanto, che questo esborso non è altrimenti regolato dall'altezza de' getti, ma dalla sola velocità permanente delle vene, ch'è appunto il nostro argomento. Imperciocchè facendo uno scrupoloso confronto di tutte le sperienze fatte così dal Sig. *Bossut*, come da altri, sotto una costante altezza di acqua nella conserva con orifizj di 2, 4, 6, ecc. linee di diametro, si vede, che mentre i getti per gli orifizj di due linee non poggiano alla stessa altezza de' getti per gli orifizj di 4, e 6 linee, danno per altro sempre quantità di acqua sensibilmente proporzionali alle aree delle loro aperture rispettive. Ciò fa comprendere, che questi esborfi non vanno estimati dalle altezze de' getti, ma unicamente dalla velocità che anima le vene agli orifizj, e che questa velocità è sensibilmente la stessa così per le piccole come per le più grandi aperture sotto una data e costante altezza d'acqua nella conserva. In oltre si osserva, che la quantità dell'acqua somministrata da un getto verticale in un dato tempo per un dato orificio di uscita, e sotto una data altezza permanente è di assai minore di quella che uscirebbe nello stesso tempo dallo stesso orificio scolpito in sottile lamina in fianco della conserva sotto la stessa altezza d'acqua ringorgata (veggasene il confronto nelle Tavole dell'*Idrodin.* del Sig. *Bossut* Parte II. Cap. IV.). Se dunque questi esborfi per una parte non vanno regolati dalle altezze de' getti verticali, nè per esse estimati, ma dalla sola velocità attuale ed effettiva che anima la vena al foro; e dall'altra troviamo queste velocità molto minori di quelle che animano le vene uscenti da' medesimi fori scolpiti in fianco delle conserve sotto lo stesso carico di acqua, chiaramente ci si fa comprendere, che le altezze dovute alle velocità permanenti de' getti verticali sono molto minori delle altezze dovute alle velocità delle vene uscenti da' fori delle conserve. Ma la teorica e i fatti dimostrano essere queste ultime altezze molto minori delle

altezze permanenti dell'acqua nelle conserve. Dunque dimostrano la teorica e i fatti, che la velocità stabilita e permanente che anima all'uscire i getti verticali è minore di quella che acquisterebbe un grave cadendo dall' altezza dell' acqua ringorgata nella conserva.

§. LI.

La considerazione pertanto degli esborfi effettivi fatti dai zampilli, cioè il fatto ci ha condotto a scuoprire 1.^o che la velocità con cui escono i getti dagli orifizj esteriori, essendo quella che avrebbe acquistato un grave cadendo da molto minore altezza che non è quella che ha l'acqua nella conserva, ella non è certamente capace di ricondurli che a quell' altezza sola che le è dovuta effettivamente, non mai a tanta altezza com' è quella dell'acqua permanente nelle conserve, ch' è una verità di fatto importantissima. 11.^o che in conseguenza il risalire de' getti a tanta altezza non va altrimenti stimato da quella velocità, nè da essa regolato, siccome quella che non è atta a produrlo; 111.^o e che tutt'altra da quella de' gravi cadenti ricondotti con la velocità acquistata in pari tempo all' altezza medesima da cui sono caduti, è la legge con cui è fatta questa bellissima operazione. Nè vale il supporre, che la velocità al foro interno ne' tubi di condotta possa essere tanta quanta si pretende, e che spendendosi parte nel vincere le resistenze, non sia poi che un residuo quel grado minore, onde troviamo attualmente animati i getti all'orificio esteriore, mentre la parte di velocità consumata essendo perduta per l'azione che vogliamo attribuirle sopra il getto, se non si ricorra ad altro principio, la velocità residua non può mai ricondurli a tanta altezza, cui poggiano di fatto i zampilli.

§. LII.

Potrebbe per verità essere bastante il detto fin qui per far chiaro, che l' appoggiarsi sia sulle ampiezze de' getti obliqui, sia sul risalire de' getti verticali, la presunzione comune dell'essere la velocità dell'acqua all'uscir de' vasi, ove sia

mantenuta a costante altezza, pari a quella d' un grave libero caduto da tanta altezza, non è autorizzata nè dai fatti, nè dalla ragione; ma pervenuto a questa conclusione mi si eccitò vivissimo desiderio nell' animo di penetrare, onde poi fosse da ripetersi il mistero particolarmente de' getti verticali, giacchè era fatto certo, che non poteva la loro ricondotta poco men che all' altezza dell' acqua nelle conserve attribuirsi alla velocità attuale ed effettiva della vena all' uscir del foro.

Mi fo qui pertanto ad esporre ciò che m' è riuscito di trovare intorno a questo difficile argomento, soggettando i miei pensamenti, qualunque si sieno, all' esame e giudizio de' dotti.

§. LIII.

Sia *ABCD* (*Fig. VIII.*) una conserva in cui possa metter acqua la vena perenne *O*; *CHIE* un tubo di condotta nel cui piano superiore *EI* sia scolpito a dovere in sottile lamina un piccolo pertugio *I* per cui possa sprizzar l' acqua all' insù verticalmente. Messo in atto l' efflusso dell' acqua dalla vena *O* nella conserva, s' intenda pareggiata l' entrata dell' acqua coll' uscita pel foro *I*. E' certo, che il getto, ridotto il flusso allo stato permanente, si manterrà sollevato ad una certa altezza, come *IL*, e l' acqua influente si comporrà e manterrà anch' essa costantemente all' altezza, come *EB*, la quale, supposto che il flusso si faccia nel vacuo, si fa che riesca poco men che uguale all' altezza *IL*.

Di nuovo s' intenda chiuso il foro *I*, e aperto nello stesso piano superiore del tubo di condotta il foro *K* simile ed uguale al foro *I*, il quale recapiti nel fondo *FG* di un vase o tubo attaccato al medesimo tubo di condotta, ed eretto nella stessa verticalità della conserva, di modo che la conserva e questo vase diventino vasi comunicanti, e l' altezza *GM* o *FN* di questo tubo sia esattamente uguale ad *EB*, altezza del liquore permanente nella conserva nel caso del flusso pel getto *IL*. Messo qui pure in azione il flusso di prima, è cosa indubitata, che a misura ch' entrerà acqua nella conserva, passerà ella nel vase o tubo comunicante, e

e si andranno ne' due vasi bilanciando le altezze per l'equilibrio. Ma giunta che sia l'acqua nel tubo GN all' orlo superiore NM , continuando l'influsso, andrà ella subito traciando, e scaricandosi sì, che quant'acqua metterà la vena O ad ogni istante nella conserva sopra la comune orizzontale delle due superficie AB , NM , altrettanta ne scaricherà il vasse, pareggiandosi l'entrata coll'uscita, e riducendosi qui pure il flusso, come nel caso del getto per l'orificio I , allo stato permanente. Quindi si riconosce non oscuramente, che, com'è simile lo stato di quiete assoluta de' liquori nel caso dell'equilibrio assoluto sì nella conserva che nel vase comunicante, così è simile lo stato di entrambi nel caso del flusso, cioè che il liquore, com'è nella conserva, così riesce nel vase in istato di ringorgamento, stato (Cap. I. II.) partecipe di quiete e di moto, di moto però discensivo nella conserva, ed ascensivo nel vase comunicante; ciò che è fatto palese per un verso dalle superficie AB , NM sensibilmente mantenentisi orizzontali durante il flusso, e per l'altro dal flusso attuale permanente. Come dunque nel caso dell'acqua stagnante sono eguali le pressioni contrarie ne' due vasi per l'equilibrio assoluto, così nel caso dell'acqua ringorgata sono pure uguali ne' medesimi vasi le pressioni contrarie per l'equilibrio sensibile. Ma se all'orificio K non fosse altra pressione per parte del liquore contenuto nella conserva EA fuorchè quella ch'è necessaria per equilibrarsi col liquore contenuto nel vase GN ; all'altezza FN , non avrebbe luogo il flusso. Perchè dunque esca l'acqua per l'orificio NM , la pressione in K per parte della conserva deve essere alcun poco maggiore di quella ch'è necessaria pel puro equilibrio, affinchè resti sospinta nel tubo GN l'acqua alcun poco oltre l'orizzontale NM . Ma il prisma d'acqua avente per base l'orificio K , e per altezza l'altezza FN è la misura di ciascuna delle pressioni eguali e contrarie nel caso dell'equilibrio. Dunque la forza necessaria per mantenere costantemente sospinta l'acqua nel vase comunicante oltre l'orizzontale NM deve essere una pressione alcun poco maggiore del peso di un tal prisma; e però fatto il flusso permanente per NM , dovrà l'acqua nella conserva tenersi costantemente alcun poco superiore all'orizzontale NM cioè superiore al livello AB sotto di cui si

fa il getto IL per supposizione. In conseguenza un prismma d'acqua avente per altezza l'altezza dell'acqua stabilita sopra detto livello, e per base l'orificio K , sarà la misura della pressione in K dovuta al flusso permanente per MN .

Perchè dunque il livello nella conserva sia la stessa orizzontale AB , dovrà alcun poco intendersi scemata l'altezza del tubo FN , quanto per appunto è necessario perchè sotto l'orizzontale AB trabocchi dall'orificio NM la medesima quantità di acqua. Così pertanto supponghiamo che sia; e mentre fluisce l'acqua per NM , ed è stabilito il flusso sotto l'orizzontale permanente AB , s'intenda in un istante rimossa d'ogn' intorno la parete del vase GN , senza che resti tocca la vena fluente. Il flusso continuar deve necessariamente, e convertirsi l'acqua ascendente pel tubo in un perfettissimo getto. E siccome le circostanze tutte di questo getto diventano quelle precisamente del getto IL , rimarrà l'acqua composta nella conserva, e stabilita all'altezza di prima EB , e l'altezza del getto sarà IL , cioè l'altezza del getto per l'orificio I . Se dunque il getto verticale permanente è nel caso del flusso permanente fuor del vase, sospignendosi in entrambi e scaricandosi fuor degli orifizj simili ed eguali I e K la stessa quantità di acqua sotto l'altezza comune e permanente di liquore EB nella conserva, l'altezza IL dovrà necessariamente riuscire e mantenersi alcun poco inferiore all'altezza EB , dovendo, come s'è dimostrato pel tubo comunicante, risarcirsi in altezza nella conserva medesima il di più ch'è necessario per mantenere l'esborso effettivo, cioè sospinta l'acqua oltre l'orizzontale o il livello dell'equilibrio.

Se dunque le cose esposte dal §. XLVIII. sino al §. LII. dimostrano ad evidenza per una parte non essere altrimenti dovuto il risalire de'getti verticalmente all'altezza del liquore permanente nelle conserve all'effettiva velocità della vena al foro, la quale essendo molto minore di quella che avrebbe ivi un grave libero caduto da quell'altezza, non potrebbe tant'alto ricondurli giammai, ed è perciò tolto per esclusione il luogo al principio da cui per consenso comune era ripetuto il fenomeno; e se per l'altra la pressione esercitata al foro dal liquore ringorgato nella conserva è per sè atta nata a condurveli senza stranieri sussidj per legge di

equilibrio ne' liquori tra sè comunicanti, non è senza ragione il ricorrere a questo principio, e l' attribuire l' effetto in questione all' efficacia di una causa di cui è egli proprio e naturale, come l' abbiamo messo in chiaro in questo ragionamento. Sembra pertanto che si possa conchiudere fondatamente

I.° Che l' elevazione permanente del getto *IL* poco men che all' altezza *EB* dell' acqua nella conserva non è che un caso singolare d' Idrostatica di liquore contenuto ed equilibrato in vasi comunicanti, in cui ad ogni istante entra in uno de' vasi una data quantità di liquore, ed esce per l' altro; un puro fenomeno di opposte pressioni di liquori tra sè comunicanti che si equilibrano e mantengono continuamente equilibrate con la prevalenza di livello nella conserva sopra il livello dell' equilibrio, necessaria per lo scarico e smaltimento della data quantità di liquore immessa ad ogni istante nella conserva.

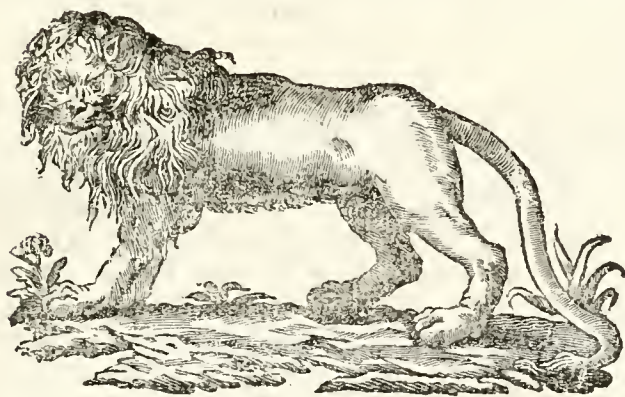
II.° Che però indipendentemente dall' aria, dal ricadere delle stille sopra di sè, e da qualunque altra immaginabile resistenza, la sommità del getto dee sempre necessariamente rimanersi alcun poco inferiore al pelo dell' acqua nella conserva, perchè resti nel liquore di questa un po' più di forza oltre quella ch' è richiesta da detto equilibrio di pressioni opposte, onde sospingere l' acqua nel flusso permanente oltre il livello dell' equilibrio. Quindi il risalire de' getti non già all' altezza *EB*, ma poco men che all' altezza *EB* che s' è detto.

III.° E che in conseguenza, sollevata e stabilita che sia attualmente l' acqua nella conserva all' altezza *EB* convenevole allo scarico per l' orificio *I* della quantità costante d' acqua immessa dalla fonte nella conserva, misura della pressione finale e permanente che opera in *I* è per appunto un prisma avente per altezza detta altezza finale e permanente *EB*, per base lo stesso orificio *I*.

§. LIV.

Questa in ristretto è la Teoria intorno al salire de' getti, a cui mena, direi necessariamente, l' esclusione della teoria comune incompatibile co' fatti e con la ragione, e la
strettissima

strettissima connessione, se dell' identità potesse dubitarsi, che ha il caso con quello de' liquori contenuti in vasi comunicanti, ove in un coll' equilibrio convenga dar luogo ad un flusso permanente. Con che termino le mie Ricerche intorno al moto de' liquidi, desiderando, che riescano di qualche frutto, e sieno altrui di stimolo onde promuovere lo studio di una materia, quanto dilettevole altrettanto difficile e piena di pericolo, la quale non può mai essere soggetto di pura Meccanica astratta senza essere dalle ipotesi sformata totalmente, e fatta oggetto di tutt' altro che della vera scienza della natura.



M I S U R A

DELL' IMPULSIONE PERMANENTE DE' LIQUIDI CONTRO LE SUPERFICIE PIANE.

Del Sig. CAVALIERE LORGNA.

Maturamente esaminando ciò che dagl' Idrodinamici è stato scritto sino a' dì nostri intorno all' impulsione de' liquidi in moto, è forza confessare, che non traluce tuttora raggio di verità decisa e incontrastabile in sì fatto argomento. E mettendo anche da parte il caso degli ostacoli totalmente immerli nel fluido impellente, oscuro quant' altri mai, sono divise tuttavia le sentenze de' Dotti anche intorno all' impulsione solamente di una vena fluida contro una superficie piana non immersa, l' estimazione che se ne fa per alcuni differendo niente men che del doppio dall' estimazione d' altri non pochi. Quindi incertezza ragionevole per entrambe. Il Sig. de la *Grange*, i cui talenti nelle Scienze Matematiche sono abbastanza noti, e superiori a' miei elogi, è l' ultimo, che siasi accinto di proposito a troncargli, se poteva farsi, la quistione nella 1. Parte delle Mem. della R. A. delle Scienze di Torino, per gli anni 1784 - 1785.

Ma a qualche suppolizione è dato luogo nel lavoro di quest' eccellente Geometra, da cui sembra esser tolto moltissimo al rigore delle sue dimostrazioni. E tanto più che dalla sua medesima teoria potrebbe conchiudersi a buon diritto, per misura dell' impulsione, un po' più che non è il peso dedotto, mettendo a conto la pressione, che non può trascurarsi, del Conoide liquido assunto come nocciolo stagnante della vena, il quale mentre trasmette alla superficie sottoposta la pressione del canale confuso, non lascia di premerla anch' esso col proprio peso naturale. Questo è l' argomento della presente Memoria, in cui tento di farmi strada nel soggetto co' soli inconcussi principj della Dinamica,

sottomettendo al giudizio degl' Idrodinamici, e di lui medesimo il mio tentativo.

P R I N C I P J

(I)

Una vena di liquore in moto per un mezzo non resistente, le cui stille sieno tutte animate da una stessa velocità, e tutte mosse secondo la stessa direzione, è come un fluido imperfetto di parti disgiunte e solitarie con lo stesso movimento, e come se l'adesione tra le sue stille non avesse luogo, durante questo stato, siccome la coerenza è, come se non fosse, tra le parti di un corpo concreto abbandonato all'azione libera della gravità nel vacuo.

(II)

Necessariamente dunque tutte le sezioni parallele di questa vena debbono essere tra di sè uguali.

(III)

Prendendo pertanto le sezioni secondo l'andamento naturale del liquore, cioè perpendicolari alla direzione del moto, si concepisca, che a qualunque di queste sezioni liquide venga sostituita una superficie piana inflessibile. E' cosa indubitata, che, perchè il flusso della vena sia permanente come prima nelle sezioni anteriori, sarà necessario, che le sezioni liquide successivamente incorrenti in questa superficie si sottraggano istantaneamente dopo l'impressione fatta, e diano luogo alle immediatamente susseguenti.

(IV)

Per conseguenza le stille successivamente sottraentisi non debbono più entrare nel sistema della vena attualmente fluente, e l'impressione, che le sezioni della vena successivamente incorrenti nella superficie sottoposta esercitano contro di

G g ij

essa, continua ad essere dovuta al momento costante del sistema.

(V)

Affinchè dunque la quantità dell'impulsione sostenuta dalla superficie impulsiva sia una, determinata, e costante nello stato di flusso permanente, è d'uopo, che le stille sottratte, straniere da quell'istante al sistema delle stille impellenti, cessino di agire su la superficie soggetta dopo l'impressione primitiva.

(VI)

E perchè ciò sia è forza, che la superficie impulsiva sia limitata ad accogliere la sola sezione liquida impellente nè più, nè meno, ch'è quanto dire, che le sia esattamente simile ed eguale, affinchè le stille della sezione anteriore dopo l'impressione fatta scappino per ogni verso fuor dell'ambito della nuova sezione impellente immediatamente successiva.

(VII)

Due condizioni pertanto debbono verificarsi per una giusta estimazione della quantità dell'impulsione perpendicolare di una vena liquida fluente uniformemente contro una superficie piana, cioè primamente, che le stille si sottraggano dalla vena dopo l'impressione fatta, e in secondo luogo, che le stille sottratte dalla vena non rimangano a carico della superficie soggetta.

La prima si verifica puntualmente, come può accertarsi chiunque ne faccia da sè l'esperimento, non essendo nel caso nostro la superficie percossa immersa nel fluido. Imperciocchè facendo cadere un liquore da un pertugio orizzontale nel fondo di un vase, ove sia mantenuto il liquore a costante altezza, sopra una superficie piana di metallo o di pietra, osserverà sempre, ridotta che sia permanente l'impressione, che il primo liquido insiste costantemente su quella superficie come se fosse solido; e intanto sprizza dal contorno dell'infine sezioni il liquore per ogni verso sottra-

endosi dalla vena, e distendendosi pel soggetto piano; ch' è cosa bellissima a vederfi; facendosi tanto contiguamente alla superficie percossa, e sì rapidamente la sottrazione, che non apparisce indizio di sfiguramento nella vena, la quale vi sta fitta costantemente, come se fosse di cristallo.

La seconda condizione poi potrà sempre aver luogo, mentre la soggetta superficie sia simile ed eguale alla sezione della vena, e non ne resti per servir di fondo al liquore che scappa, e assolutamente non fa più sistema con la vena impellente, come s'è detto.

(VIII)

Dal non essere stato convenevolmente avvertito, che il liquore che si sottrae successivamente dalla vena non dee più appartenere alla vena impellente, derivano principalmente le incertezze in cui è tuttora involta questa delicatissima parte dell' Idrodinamica. Senza una limitazione della superficie impulsiva, che adegui esattamente la sezione impellente, non può mai fissarsi una misura unica dell'impulsione, dovendo essere distinto e valutato a parte il di più che proviene dal sistema delle stille sottratte dalla vena, allorchè la superficie percossa eccede la sezione vera impellente, e distinto pure e valutato a parte il di meno, allorchè la superficie è minore della sezione liquida impellente. Ciò premesso dimostremo i seguenti Teoremi.

T E O R E M A I.

L' impulsione permanente perpendicolare di una vena di liquore uniformemente fluente nel vacuo contro una superficie piana immobile simile ed eguale alla sezione prossima imminente della vena, il cui piano sia perpendicolare alla direzione del moto, ha per misura il peso di un prisma del medesimo liquore avente per base la medesima sezione della vena, o la superficie percossa, e per altezza il doppio dell' altezza da cui dovrebbe scendere nel vacuo liberamente dalla quiete un grave per acquistare la velocità uniforme della vena.

Sia $ABCD$ (*Fig. IX*) la vena fluente del proposto liquore, di cui la densità sia d , e le cui stille sieno animate dalla velocità uniforme c , e mosse con la direzione AC per un mezzo non resistente; e sia v l'altezza dovuta alla velocità della vena c . Si concepisca, che una delle stille solitarie (I) di questa vena la cui massa sia m , separatamente dal sistema cada nel vacuo liberamente dalla quiete per la verticale NM (*Fig. X*). E poichè la massa m rappresenta il peso della stilla, rappresenterà ella a un tempo la forza della gravità g , e però la forza acceleratrice $\frac{g}{m}$ di questa stilla farà uguale all' unità. Scorso il tempo t , sia questa stilla pervenuta in M , ove abbia acquistato la velocità c , e sia $NM = x$. Progredendo il suo movimento accelerato percorra la stilla nel tempo infinitamente piccolo dt lo spazietto $Mm = dx$. E poichè abbiamo supposto essere v l'altezza dovuta alla celerità c , farà per i principj della Dinamica $d v = \frac{g}{m} dx$, e però nel caso nostro in cui la forza acceleratrice è uguale all' unità, farà $d v = dx$, cioè l' incremento dell' altezza v farà uguale all' elemento dello spazio percorso. Dunque $\frac{dx}{c} = \frac{dv}{c}$. Come poi l' elemento dx dee supporfi percorso con moto uniforme, farà $\frac{dx}{c} = dt$, e in conseguenza anche $\frac{dv}{c} = dt$. Ma pe' medesimi principj della Dinamica l' incremento della velocità dc è proporzionale al prodotto della forza acceleratrice nel tempuscolo dt . Per conseguenza nel caso nostro farà l' incremento dc proporzionale a dt . Si sostituisca pertanto dc in luogo di dt nell'equazione $\frac{dv}{c} = dt$, e farà $dv = cdc$, di cui l' integrale completo somministrerà la relazione $c^2 = 2v$ tra la velocità c di qualunque stilla della vena, e l'altezza v da cui dee scendere nel vacuo una stilla solitaria per acquistare questa medesima velocità in fine della sua discesa. In conseguenza se venga segata, ovunque ciò sia, la vena fluente con un piano EF perpendicolare alla direzione del

moto, è certo, che questa relazione dee verificarsi per tutta l'estensione della sezione liquida EF puntualmente. Posto ciò s'intenda sottoposta immediatamente a questa sezione una superficie piana immobile, cui diremo f^2 , simile ed eguale alla sezione EF , che interrompa il flusso della vena, e riceva l'impressione dovuta al momento della sezione liquida impellente. Essendo in libertà (vii) le stalle di questa sezione di sottrarsi per ogni verso, dopo l'impressione fatta, dando luogo alla nuova sezione immediatamente susseguente, e così successivamente, si concepisca costituito il flusso e l'impulsione in istato permanente. E poichè misura della forza impulsiva de' liquori fluenti uniformemente è il prodotto della quantità di materia in moto per la velocità del flusso, e la quantità di materia è misurata dal prodotto della sezione liquida fluente per la velocità del flusso, sarà misura della forza impulsiva il prodotto della sezione liquida fluente pel quadrato della velocità del flusso. Per conseguenza, essendo d la densità del liquore, sarà misura dell'impulsione perpendicolare sostenuta dalla superficie EF il solido $d.f^2.c^2$. Ma essendosi dimostrato verificarsi per tutta l'estensione della sezione EF l'equazione $c^2 = 2v$, sussisterà pure per tutta la medesima estensione l'equazione $d.f^2.c^2 = d.f^2.2v$. Se dunque il solido $d.f^2.c^2$ esprime l'impulsione perpendicolare contro la superficie f^2 , sarà pure espressa questa medesima impulsione dal solido $d.f^2.2v$. Ma $d.f^2.2v$ è il peso assoluto di un prisma di questo medesimo liquore avente per base la superficie impulsa, o la sezione della vena impellente, e per altezza il doppio dell'altezza dovuta alla velocità della vena. Dunque l'impulsione permanente perpendicolare di una vena ecc. Il che ecc.

T E O R E M A II.

L'impulsione permanente obliqua della medesima vena contro una superficie piana immobile simile ed eguale alla sezione prossima imminente della vena, il cui piano faccia lo stesso angolo obliquo con la direzione del moto, ha per misura il peso di un prisma del medesimo liquore avente per base la sezione della vena perpendicolare alla direzione del moto dimi-

nuita in ragione del seno tutto al seno dell' obbliquità dell' impulsione, e per altezza il doppio dell' altezza dovuta alla velocità della vena.

Sia FG la superficie impulsiva obbliquamente dalla medesima vena $ABCD$, e s' intenda messa in corso permanente altra vena del medesimo liquore $QOPR$ (Fig. XI.) animata dalla stessa velocità della vena $ABCD$, la cui sezione OP perpendicolare alla direzione del corso sia quarta proporzionale al seno tutto, al seno dell' obbliquità dell' impulsione contro la superficie FG , e alla sezione FE . Essendo effettivamente come solitarie (I) le stille del liquore $ABCD$, l' impulsione permanente ch' elle esercitano contro la superficie FG , ridotto a permanenza in un col flusso il sottraersi successivo delle stille dopo l' impressione fatta, non è che l' azione assoluta permanente esercitata da un sistema di corpicciuoli solitarij sostenuto sopra il piano inclinato FG , contro il medesimo piano. E siccome quest' azione è all' azione perpendicolare esercitata dal sistema contro il piano, come il seno tutto al coseno dell' inclinazione GFE del piano; così l' impulsione assoluta della vena $ABCD$ secondo la direzione del corso contro la superficie FG è all' impulsione perpendicolare contro il medesimo piano, come il seno tutto al coseno dell' angolo GFE , cioè come il seno tutto al seno dell' obbliquità dell' impulsione. Ma come il seno tutto al seno dell' obbliquità dell' impulsione, così sta la sezione FE alla sezione OP ; e come la sezione FE alla sezione OP , così sta l' impulsione perpendicolare della vena $ACDB$ contro la superficie FE all' impulsione perpendicolare della vena $QOPR$ contro la superficie OP . Sarà dunque l' impulsione assoluta della vena $ACDB$ secondo la direzione del corso all' impulsione perpendicolare contro la superficie FG , come l' impulsione perpendicolare della vena $ACDB$ contro la superficie FE all' impulsione perpendicolare della vena $QOPR$ contro la superficie OP . Ed è l' impulsione assoluta della vena $ACDB$ secondo la direzione del moto lo stesso che l' impulsione perpendicolare contro la superficie FE . Per conseguenza l' impulsione perpendicolare contro la superficie FG farà lo stesso che l' impulsione perpendicolare contro la superficie

ficie *OP*. Ma dell'impulsione perpendicolare contro *OP* (*Teor. preced.*) è misura il peso di un prisma del medesimo liquore avente per base la superficie *OP*, e per altezza il doppio dell'altezza dovuta alla velocità comune delle vene; e non altro è la superficie *OP* che la superficie *FE*, o la sezione della vena *ACDB* perpendicolare alla direzione del corso, diminuita in ragione del seno tutto al seno dell'obblività dell'impulsione. Dunque l'impulsione permanente della vena *ACDB* contro la superficie *FG*, obliqua alla direzione del corso, ha per misura il peso di un prisma del medesimo liquore avente per base la sezione *FE* della vena perpendicolare alla direzione del moto diminuita in ragione del seno tutto al seno dell'obblività dell'impulsione, e per altezza il doppio dell'altezza dovuta alla velocità della vena. Il che ecc.

(IX)

Queste dimostrazioni sono unicamente appoggiate a' principj più semplici della Dinamica, e non altro dimandano se non se, che si considerino i liquori fluenti delle vene, allorchè è uniforme il loro moto, e una medesima per tutte le stille la velocità, onde sono animati, come fluidi imperfetti di parti solitarie, o come se l'aderenza non fosse tra di esse. Il che certamente non ripugna, ove non ha luogo alcuna accelerazione, e la legge delle sezioni reciproche alle velocità nelle diverse parti del flusso non importa nè contrazione di vena, nè azione mutua tra le stille. L'esperienza intanto non è discorde dalla conclusione a cui elle conducono, come può vedersi singolarmente in quelle che con somma accuratezza ha istituite il Sig. Ab. *Bossut* ed esposte nel T. II. della sua Idrodinamica, e nell'altre con pari esattezza fatte, e riferite dal Sig. *Michelotti* nella II. Parte delle Mem. citate di Torino, il quale si propone di esporre in progresso, che sarà cosa fruttuosissima, le sue sperienze sugli urti obliqui.

(X.)

Il Sig. *de la Grange* conchiude così “ on peut prendre
Tomo IV. Hhh

„ deormais pour regle generale et constante dans le choc
 „ direct, et lorsque son effet est le plus grand, ce qui a
 „ lieu quand le plan est assez large pourque toutes les par-
 „ ticules du fluide soient contraintes d'en suivre la direction
 „ en le quittant, l'action contre le plan est egale au poids
 „ d'une colonne du fluide de la meme grosseur que la vei-
 „ ne, et d'une longueur double de celle d'ou un corps pe-
 „ sant devoit tomber pour acquerir la vitesse du fluide „ .
 Ma dietro a quanto abbiamo dimostrato, perchè nel caso
 delle impulsioni perpendicolari l'azione delle vene sia misu-
 rata da un prisma dello stesso liquore avente per base la se-
 zione della vena, e per altezza il doppio dell'altezza dovuta
 alla velocità della vena, è necessario, che la superficie pia-
 na sia simile ed eguale alla sezione della vena perpendicola-
 re alla direzione del moto. Il liquore che scappa, fatta
 l'impressione, fa sistema a parte, essendo da quell'istante
 straniero alla vena impellente, e dee valutarfi a parte, se la
 superficie sia, come vuole quest' illustre Geometra, tanto
 estesa quanto basta perchè le particole del fluido sieno co-
 strette a seguirne la direzione.

(XI.)

Non è però questa sola determinazione della superficie im-
 pulsa, corrispondente alla sezione liquida impellente, l'essen-
 ziale oggetto nell'estimazione delle impulsioni de' liquori,
 avendovene un altro niente men essenziale ed importante,
 cioè quello della velocità della vena, o per dir meglio dell'
 altezza da cui dee scendere un grave dalla quiete per acqui-
 starla, così nel caso degli orifizj nelle conserve armati di
 cannello, come in quello de' non armati o scolpiti semplice-
 mente in sottili lamine. Un piccolo errore aumenta o sce-
 ma il valore dell'impulsione più ch' altri non estima. In
 fatti avendo preso ad esaminare con tutta l'attenzione on-
 de avvenga principalmente, che le sperienze del Sig. *Bossut*
 e più ancora quelle del Sig. *Krafft* citato dal Sig. *de la*
Grange, diano per valore effettivo dell'impulsione un peso
 minore del teorico, cioè del peso di un prisma avente l'ori-
 ficio della vena per base, e per altezza il doppio dell'altez-

za dovuta alla velocità della vena , e avendo perciò confrontato insieme molte sperienze fatte anche da altri , come diremo , intorno agli esborfi dell' acqua per orifizj armati di cannello , mi sono accertato , ch' essendo l' altezza teorica , assunta come dovuta alla velocità delle vene , alcun poco più forte del dovere , il peso vero ed effettivo necessariamente doveva riuscire un po minore del teorico . Assume per esempio il Sig. *Bossut* (pag. 325 del T. citato) quest' altezza in ragione di 2 a 3 coll' altezza costante del liquore sopra il centro de' fori armati di cannello , come ragione da sè trovata prossimamente nelle sue sperienze . Ma facendo il dovuto caso anche delle sperienze del *Guglielmini* , e del Marchese *Poleni* , ho riconosciuto doverfi assumere per altezza dovuta alla velocità effettiva un po meno di $\frac{2}{3}$ dell' al-

tezza costante del liquore nelle conserve , cioè quella a questa come 163 a 256 . Ancorchè sia piccolo il divario , ciò non ostante intorno a questo piccolo divario si aggira la discordanza tra le sperienze sull' urto de' liquori e la teorica . Molto più pertanto le ragioni per queste altezze del Sig. *Krafft* ricavate dalle ampiezze de' getti supposti parabolici , di che nel IV. Cap. della nostra Mem. precedente , dovevano necessariamente produrre eccesso più sensibile del peso teorico sopra il peso effettivo equivalente all' impulsione , eccesso che quasi svanisce non assumendo dette altezze che in ragione di 163 a 256 , come proviene dal ragguagliamento delle antiche con le più recenti sperienze . Tal che avuto riguardo alla determinazione nostra nella Memoria precedente per gli esborfi fatti dagli orifizj non armati , in cui abbiamo trovato essere l' altezza dovuta alla velocità della ve-

na al foro $\frac{54}{125}$ prossimamente dell' altezza permanente del liquore sopra il centro de' fori , può essere canone e regola conforme ai fatti nell' estimare queste altezze , che l' altezza permanente del liquore sopra il centro de' fori , l' altezza dovuta alla velocità attuale ed effettiva agli orifizj armati di cannello sotto quell' altezza permanente , e l' altezza dovuta alla velocità pur effettiva della vena uscente da' medesi-

mi orifizj scolpiti in sottili lamine sotto la stessa altezza permanente, sono affai da vicino come i numeri 256, 163, 111.

(XII)

Ma è d'uopo avvertire pe' fori armati, che i cannelli delle sperienze, ond'è derivata detta proporzione, erano cortissimi, e sempre cilindrici nelle interne cavità, mentre la proporzione non potrebbe aver luogo ne' tubi o cannelli di qualche lunghezza, e di figura non cilindrica internamente. E per rispetto poi a' fori scolpiti in sottili lamine, la proporzione suppone, che non si tenga conto della vena contratta, ma sì bene dell'effettivo orificio della vena, abbandonando la correzione, che facevasi, e la sostituzione di questa vena contratta al foro reale, come arbitraria, e non necessaria subito che si assuma l'altezza vera dovuta alla velocità effettiva del foro attuale voluta dalla ragione, e dal-

le sperienze uniformi di tutti i tempi, cioè $\frac{54}{125}$, oppure $\frac{111}{256}$

dell'altezza permanente de' liquori sopra il centro degli orifizj, purchè la grossezza del fondo, o della parete, ov'è scolpito il foro, non sia tanta da equivalere ad un cannello applicato all'orificio interno, con che si potrebbe ricadere nella necessità di dar luogo alla proporzione pe' fori armati, o a proporzione più a questa vicina, che a quella. E certamente di molte ineguaglianze che appariscono nelle stesse sperienze fatte da diversi Idraulici per orifizj simili ed eguali, e sotto le medesime altezze permanenti di liquore, potrebbe non essere ultima cagione la condizione ineguale degli orifizj.



Fig. III

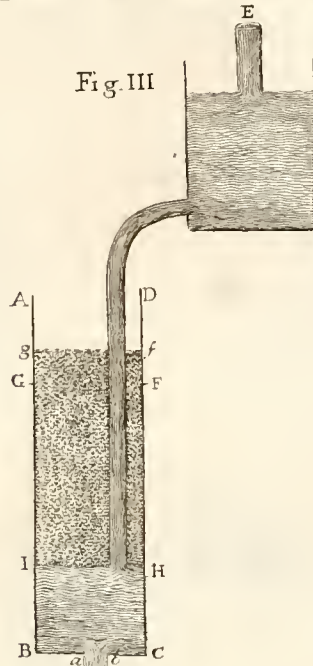


Fig. IV

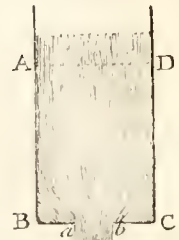


Fig. VII

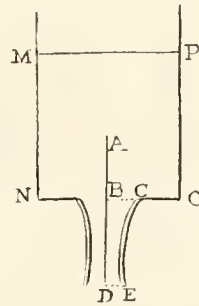


Fig. VI

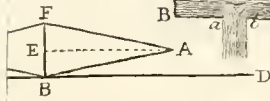


Fig. IX

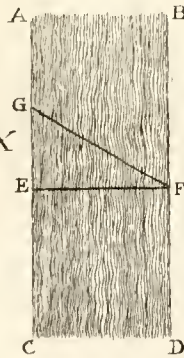
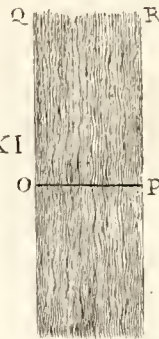


Fig. X



Fig. XI



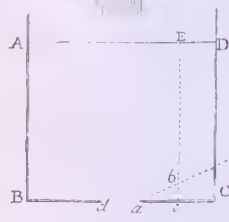
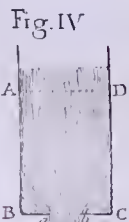
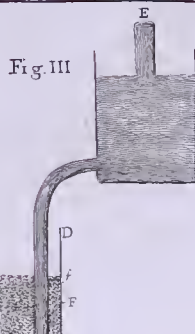
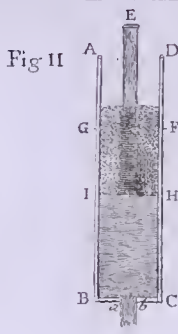
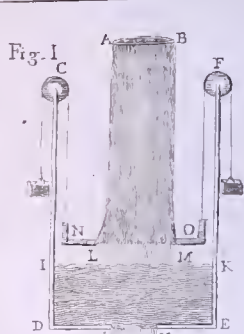


Fig. V

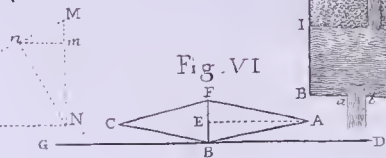


Fig. VI

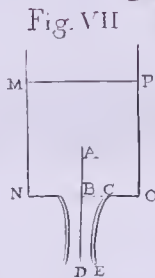


Fig. VII

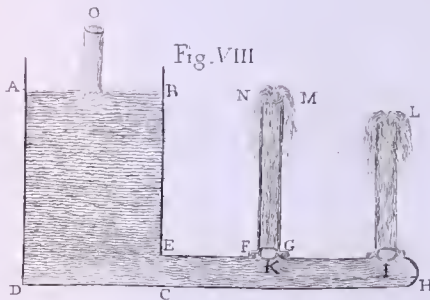


Fig. VIII

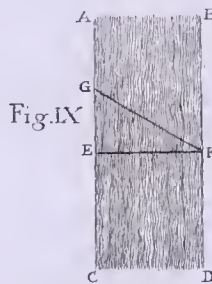


Fig. IX

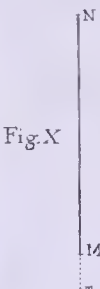


Fig. X

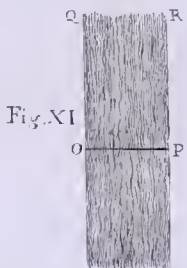


Fig. XI

R I C E R C H E S U L L E S E R I E

Del Sig. PIETRO PAOLI P. Professore delle Matematiche
Superiori nell' Università di Pisa.

IO mi propongo in queste Ricerche di risolvere il Problema seguente: Dato un numero qualunque di equazioni $z=0$, $z'=0$, $z''=0$ ecc. tra le variabili x , y , t , u , ecc., esprimere una funzione qualunque Φ delle medesime variabili per tante di esse, quanto è il loro numero diminuito del numero dell'equazioni $z=0$, $z'=0$, $z''=0$, ecc. Se fosse conosciuta la risoluzione generale dell'equazioni, questo problema non avrebbe alcuna difficoltà; perchè dall'equazioni $z=0$, $z'=0$, ecc. dedur si potrebbe il valore di altrettante variabili espresse per le altre, e questo sostituito in Φ ci darebbe quella espressione della funzione Φ che ricercavamo. Ma nello stato presente dell'Analisi conviene ricorrere ad altri artifizi, per mezzo de' quali l'intento ottener si possa indipendentemente dalla risoluzione dell'equazioni, e questi artifizi siccome in moltissime altre ricerche così in questa conviene ripeterli dal calcolo differenziale. Dalla natura poi del Problema si comprende, che il valore richiesto di Φ non potrà per lo più esprimersi per una quantità finita, ma sempre per una serie infinita, come vedremo.

I.

Si abbia in primo luogo una sola equazione $z=0$ tra le variabili x , y , t , u , ecc.; e si voglia esprimere la funzione Φ delle medesime variabili per y , t , u , ecc. senza x . Sia z_1 il valore di z quando x si cangia in x_1 ; in luogo di x prendiamo $x_1 + x - x_1$, e supponendo x_1 accresciuta

H h h iij

dell'incremento $x - x_1$, ed y, t, u , ecc. costanti, avremo pel Teorema di *Taylor*

$$z = 0 = z_1 + (x - x_1) \frac{dz_1}{dx_1} + (x - x_1)^2 \frac{d^2 \cdot z_1}{2 dx_1^2} + (x - x_1)^3 \frac{d^3 \cdot z_1}{2 \cdot 3 dx_1^3} + (x - x_1)^4 \frac{d^4 \cdot z_1}{2 \cdot 3 \cdot 4 dx_1^4} + \text{ecc. ove}$$

le differenze $\frac{dz_1}{dx_1}, \frac{d^2 \cdot z_1}{dx_1^2}$, ecc. si devono prender solamente per rapporto ad x_1 , supponendo costanti y, t, u , ecc. Per determinare la quantità $x - x_1$ mediante questa equazione, facciamo.

$x - x_1 = z_1 \cdot A + z_1^2 \cdot B + z_1^3 \cdot C + z_1^4 \cdot D + z_1^5 \cdot E + \text{ecc.}$
e sostituendo questo valore nella precedente equazione avremo

$$\begin{aligned} 0 = z_1 &+ z_1^2 \cdot B \frac{dz_1}{dx_1} + z_1^3 \cdot C \frac{dz_1}{dx_1} + z_1^4 \cdot D \frac{dz_1}{dx_1} \\ &+ z_1 \cdot A \frac{dz_1}{dx_1} + z_1^2 \cdot A^2 \frac{d^2 \cdot z_1}{2 dx_1^2} + z_1^3 \cdot 2AB \frac{d^2 \cdot z_1}{2 dx_1^2} + z_1^4 \cdot 2AC \frac{d^2 \cdot z_1}{2 dx_1^2} \\ &+ z_1^3 \cdot A^3 \frac{d^3 \cdot z_1}{2 \cdot 3 dx_1^3} + z_1^4 \cdot B^2 \frac{d^2 \cdot z_1}{2 dx_1^2} + \text{ecc.} \\ &+ z_1^4 \cdot 3A^2 B \frac{d^3 \cdot z_1}{2 \cdot 3 dx_1^3} \\ &+ z_1^4 \cdot A^4 \frac{d^4 \cdot z_1}{2 \cdot 3 \cdot 4 dx_1^4} \end{aligned}$$

Paragonando adesso i termini affetti dalle medesime potenze di z_1 , avremo

$$(1) A = - \frac{\frac{dz_1}{dx_1}}{\frac{dz_1}{dx_1}}$$

$$(2) B = - \frac{A^2 \frac{d^2 \cdot z_1}{2 dx_1^2}}{\frac{dz_1}{dx_1}}$$

$$(3) C = - \frac{2AB \frac{d^2 \cdot z_1}{2 dx_1^2} + A^3 \frac{d^3 \cdot z_1}{2 \cdot 3 dx_1^3}}{\frac{dz_1}{dx_1}}$$

$$(4) D = - \frac{2AC \frac{d^2.z_1}{2dx_1^2} + B^2 \frac{d^2.z_1}{2dx_1^2} + 3A^2B \frac{d^3.z_1}{2.3dx_1^3} + A^4 \frac{d^4.z_1}{2.3.4dx_1^4}}{\frac{dz_1}{dx_1}}$$

ecc.

L'equazione (1) ci dà $\frac{dA}{2dx_1} = \frac{\frac{d^2.z_1}{2dx_1^2}}{\left(\frac{dz_1}{dx_1}\right)^2} = A^2 \frac{d^2.z_1}{2dx_1^2}$, e

quindi $B = \frac{AdA}{2dx_1}$. Dall'equazione (2) si ricava

$$\frac{dB}{3dx_1} = \frac{-2A \frac{dA}{3dx_1} \cdot \frac{d^2.z_1}{2dx_1^2} - A^2 \frac{d^3.z_1}{2.3dx_1^3} + \frac{A^2}{3} \cdot \frac{d^2.z_1}{2dx_1^2} \cdot \frac{d^2.z_1}{dx_1^2}}{\frac{dz_1}{dx_1} \left(\frac{dz_1}{dx_1}\right)^2},$$

cioè $\frac{dB}{3dx_1} = \frac{4}{3} AB \frac{d^2.z_1}{2dx_1^2} + A^3 \frac{d^3.z_1}{2.3dx_1^3} + \frac{2}{3} AB \frac{d^2.z_1}{2dx_1^2}$

$$= 2AB \frac{d^2.z_1}{2dx_1^2} + A^3 \frac{d^3.z_1}{2.3dx_1^3},$$

e perciò $C = A \frac{dB}{3dx_1} = \frac{Ad(AdA)}{2.3dx_1^2}$. Così pure l'equazione (3)

ci darà

$$-A \frac{dB}{2dx_1} \cdot \frac{d^2.z_1}{2dx_1^2} - B \frac{dA}{2dx_1} \cdot \frac{d^2.z_1}{2dx_1^2} - \frac{AB}{2} \cdot \frac{d^3.z_1}{2dx_1^3} - \frac{3A^2}{4} \cdot \frac{dA}{dx_1} \cdot \frac{d^3.z_1}{2.3dx_1^3} - A^4 \frac{d^4.z_1}{2.3.4dx_1^4} \\ = \frac{\frac{dz_1}{dx_1}}{\left(\frac{dz_1}{dx_1}\right)^2} + \frac{AB \frac{d^2.z_1}{2dx_1^2} \cdot \frac{d^2.z_1}{dx_1^2} + \frac{A^3}{4} \cdot \frac{d^2.z_1}{dx_1^2} \cdot \frac{d^3.z_1}{2.3dx_1^3}}{\left(\frac{dz_1}{dx_1}\right)^2}, \text{ cioè}$$

$$\frac{dC}{4dx_1} = \frac{3}{2} AC \frac{d^2.z_1}{2dx_1^2} + B^2 \frac{d^2.z_1}{2dx_1^2} + \frac{3}{2} A^2B \frac{d^3.z_1}{2.3dx_1^3}$$

$$+\frac{3}{2}A^2B\frac{d^3z_1}{2.3dx_1^3}+A^4\frac{d^4z_1}{2.3.4dx_1^4}+\frac{1}{2}AC\frac{d^2z_1}{2dx_1^2}$$

$$=2AC\frac{d^2z_1}{2dx_1^2}+B^2\frac{d^2z_1}{2dx_1^2}+3A^2B\frac{d^3z_1}{2.3dx_1^3}+A^4\frac{d^4z_1}{2.3.4dx_1^4},$$

e quindi

$$D=A\frac{dC}{4dx_1}=\frac{Ad(Ad(AdA))}{2.3.4dx_1^3}.$$

Nella medesima maniera troveremo essere

$$E=A\frac{dD}{5dx_1}=\frac{Ad(Ad(Ad(AdA)))}{2.3.4.5dx_1^4}, \text{ e così in seguito.}$$

I I.

Trovati i valori di A, B, C , ecc. avremo $x-x_1$ espressa per una funzione di x_1, y, t, u , ecc. Onde siccome possiamo determinare x_1 a piacere, acciò ottenghiamo il valore di $x-x_1$ espresso per y, t, u , ecc. senza x , facciamo $x_1=f$ esprimendo f una funzione qualunque a piacere di y, t, u , ecc. Si osservi che siccome z e z_1 sono funzioni simili di x ed x_1 , potremo usare z ed x in luogo di z_1 ed x_1 , purchè ci ricordiamo poi di far da per tutto terminate le operazioni $x=f$. Se dunque ponghiamo

$$A=-\frac{1}{\frac{dz}{dx}}, \text{ avremo}$$

$$x-x_1=z.A+z^2.\frac{AdA}{2dx}+z^3.\frac{AdAdA}{2.3.dx^2}+z^4.\frac{AdAdAdA}{2.3.4dx^3}+\text{ecc.}$$

facendo dopo le differenziazioni $x=f$.

I I I.

Si abbia adesso la funzione Ψ , che si voglia svolgere in una serie data per y, t, u , ecc. supposta l'equazione $z=0$. Se in Ψ ponghiamo x_1+x-x_1 in luogo di x , avremo pel teorema di *Taylor*

$$\Psi=\Psi+(x-x_1)\frac{d\Psi}{dx}+(x-x_1)^2\frac{d^2\Psi}{2dx^2}+(x-x_1)^3\frac{d^3\Psi}{2.3dx^3}+\text{ecc.}$$

Sostituendo

Sostituendo nel secondo membro il valore trovato di $x - x_1$ e facendo terminate le operazioni $x = f$. Siccome la funzione f è indeterminata, così potrà il valore di Ψ esprimersi in infinite forme diverse.

I V.

Se sostituiamo nella formola precedente il valore di $x - x_1$ e delle sue potenze, avremo

$$\begin{aligned} \Psi = \Psi + z A \frac{d\Psi}{dx} + z^2 \cdot \frac{AdA}{2dx} \cdot \frac{d\Psi}{dx} + z^3 \cdot \frac{AdAdA}{2 \cdot 3 dx^2} \cdot \frac{d\Psi}{dx} + z^4 \cdot \frac{AdAdAdA}{2 \cdot 3 \cdot 4 dx^3} \cdot \frac{d\Psi}{dx} \\ + z^2 \cdot A^2 \frac{d^2\Psi}{2dx^2} + z^3 \cdot \frac{2A^2dA}{2dx} \cdot \frac{d^2\Psi}{2dx^2} + z^4 \cdot \frac{2A^2dAdA}{2 \cdot 3 dx^2} \cdot \frac{d^2\Psi}{2dx^2} \\ + z^3 \cdot A^3 \cdot \frac{d^3\Psi}{2 \cdot 3 dx^3} + z^4 \cdot \frac{A^2 dA^2}{4 dx^2} \cdot \frac{d^2\Psi}{2 dx^2} + \text{ecc.} \\ + z^4 \cdot \frac{3A^3dA}{2dx} \cdot \frac{d^3\Psi}{2 \cdot 3 dx^3} \\ + z^4 \cdot A^4 \cdot \frac{d^4\Psi}{2 \cdot 3 \cdot 4 dx^4} \end{aligned}$$

cioè

$$\Psi = \Psi + z A \frac{d\Psi}{dx} + z^2 \cdot \frac{AdA}{2dx} \frac{d\Psi}{dx} + z^3 \cdot \frac{AdAdA}{2 \cdot 3 dx^2} \frac{d\Psi}{dx} + z^4 \cdot \frac{AdAdAdA}{2 \cdot 3 \cdot 4 dx^3} \frac{d\Psi}{dx} + \text{ecc.}$$

facendo dopo le differenziazioni $x = f = \text{funz.} (y, t, u, \text{ecc.})$

V.

Si abbiano adesso due equazioni $z = 0$, $z' = 0$, la prima tra x , t , u , ecc. senza y , la seconda tra y , t , u , ecc. senza x , e li voglia esprimere per t , u , ecc. senza x nè y una funzione qualunque Ψ delle variabili x , y , t , u , ecc. Avremo per mezzo della seconda equazione, se ponghiamo

$$A' = - \frac{1}{\frac{dz'}{dy}}$$

$$\Phi + z'.A' \frac{d\Phi}{dy} + z'^2 \cdot \frac{A'dA' \frac{d\Phi}{dy}}{2dy} + z'^3 \cdot \frac{A'dA'dA' \frac{d\Phi}{dy}}{2 \cdot 3dy^2} + z'^4 \cdot \frac{A'dA'dA'dA' \frac{d\Phi}{dy}}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot dy^3} + \text{ecc.}$$

facendo nel secondo membro $y = f$, ed f funzione di t , u , ecc. senza x nè y . Chiamiamo ϕ questo secondo membro, e siccome ϕ è una funzione di x , t , u , ecc. senza y , avremo per mezzo della prima equazione

$$\phi = \phi + z.A \frac{d\phi}{dx} + z^2 \cdot \frac{AdA \frac{d\phi}{dx}}{2dx} + z^3 \cdot \frac{AdAdA \frac{d\phi}{dx}}{2 \cdot 3 dx^2} + z^4 \cdot \frac{AdAdAdA \frac{d\phi}{dx}}{2 \cdot 3 \cdot 4 dx^3} + \text{ecc.}$$

facendo nel secondo membro $x = f = \text{funz. } (t, u, \text{ecc.})$. Sostituendo adesso il valore di ϕ , e riflettendo che in z' ed in A' non si contiene x , avremo

$$\begin{aligned} \Phi + z.A \frac{d\Phi}{dx} + z^2 \cdot \frac{AdA \frac{d\Phi}{dx}}{2dx} + z^3 \cdot \frac{AdAdA \frac{d\Phi}{dx}}{2 \cdot 3 \cdot dx^2} + z^4 \cdot \frac{AdAdAdA \frac{d\Phi}{dx}}{2 \cdot 3 \cdot 4 dx^3} \\ + z'.A' \frac{d\Phi}{dy} + z'z'.AA' \frac{d^2\Phi}{dxdy} + z'^2z' \cdot \frac{AA'dA \frac{d^2\Phi}{dxdy}}{2dx} + z'^3z' \cdot \frac{AA'dAdA \frac{d^2\Phi}{dxdy}}{2 \cdot 3 dx^2} \\ + z'^2 \cdot \frac{A'dA' \frac{d\Phi}{dy}}{2dy} + z'z'^2 \cdot \frac{AA'dA' \frac{d^2\Phi}{dxdy}}{2dy} + z'^2z'^2 \cdot \frac{AA'dAdA' \frac{d^2\Phi}{dxdy}}{2dx \cdot 2dy} + \text{ecc.} \\ + z'^3 \cdot \frac{A'dA'dA' \frac{d\Phi}{dy}}{2 \cdot 3 dy^2} + z'z'^3 \cdot \frac{AA'dA'dA' \frac{d^2\Phi}{dxdy}}{2 \cdot 3 dy^2} \\ + z'^4 \cdot \frac{A'dA'dA'dA' \frac{d\Phi}{dy}}{2 \cdot 3 \cdot 4 dy^3} \end{aligned}$$

facendo dopo le differenziazioni $x = f$, $y = f$, ed f , f funzioni qualunque a piacere di t, u , ecc. senza x nè y . Avremo dunque Φ espressa da una serie data per t, u , ecc. senza x nè y , e la legge di questa serie è evidente; poichè essa è ordinata per le potenze ed i prodotti di z , e z' , ed

il coefficiente di z^n è in essa $= \frac{AdAdAdA \dots dA \frac{d\Phi}{dx}}{2. 3. \dots n dx^{n-1}}$; il coe-

ficiente di z'^n è $= \frac{A'dA'dA' \dots dA' \frac{d\Phi}{dy}}{2. 3. \dots n dy^{n-1}}$, ed il coefficiente

di $z^n.z'^{n'}$ è $= \frac{AA'dAdA \dots dA \frac{dA'dA' \dots dA' \frac{d\Phi}{dx dy}}{2. 3. \dots n' dy^{n'-1}}}{2. 3. \dots n dx^{n-1}}$.

Se fosser date due equazioni tra x, y, t, u , ecc. si potrebbe mediante queste due equazioni eliminar prima x , poi y , e si avrebbero le due equazioni $z=0$, $z'=0$, la prima senza x , la seconda senza y . Dunque date due equazioni tra x, y, t, u , ecc. si potrà sempre ottenere il valore della funzione Φ espresso per t, u , ecc. senza x nè y .

V I.

Similmente date tre equazioni $z=0$, $z'=0$, $z''=0$, la prima tra x, u , ecc. senza y nè t , la seconda tra y, u , ecc. senza x nè t , e la terza tra t, u , ecc. senza x nè y , troveremo il valore della funzione Φ espresso in una serie data per u , ecc. senza x , nè y , nè t . Questa serie sarà ordinata per le potenze ed i prodotti di z, z', z'' in modo, che il coefficiente

te di z^n sarà $\frac{AdAdA \dots dA \frac{d\Phi}{dx}}{2. 3. \dots n dx^{n-1}}$, il coefficiente di z'^n sarà

$= \frac{A'dA'dA' \dots dA' \frac{d\Phi}{dy}}{2. 3. \dots n dy^{n-1}}$, il coefficiente di z''^n sarà

$= \frac{A''dA''dA'' \dots dA'' \frac{d\Phi}{dt}}{2. 3. \dots n dt^{n-1}}$; quello di $z^n.z'^n$ sarà

$$\begin{aligned}
& AA'dAdA \dots dAdA'dA' \dots dA' \frac{d^2 \Phi}{dx dy} \\
= & \frac{2. 3. \dots n dx^{n-1}. 2. 3. \dots n' dy^{n'-1}}{2. 3. \dots n dx^{n-1}. 2. 3. \dots n' dy^{n'-1}}; \text{quello di } z^n \cdot z'^{n'} \text{ farà} \\
& AA''dAdA \dots dAdA''dA'' \dots dA'' \frac{d^2 \Phi}{dx dt} \\
= & \frac{2. 3. \dots n dx^{n-1}. 2. 3. \dots n'' dt^{n''-1}}{2. 3. \dots n dx^{n-1}. 2. 3. \dots n'' dt^{n''-1}}; \text{quello di } z^n \cdot z''^{n''} \\
& A'A''dA'dA' \dots dA'dA''dA'' \dots dA'' \frac{d^2 \Phi}{dy dt} \\
= & \frac{2. 3. \dots n dy^{n-1}. 2. 3. \dots n'' dt^{n''-1}}{2. 3. \dots n dy^{n-1}. 2. 3. \dots n'' dt^{n''-1}}; \text{e finalmente il} \\
& \text{coefficiente di } z^n \cdot z'^{n'} \cdot z''^{n''} \text{ farà} \\
& \frac{AA'A''dAdA \dots dAdA'dA \dots dA'dA''dA'' \dots dA'' \frac{d^3 \Phi}{dx dy dt}}{2. 3. \dots n dx^{n-1}. 2. 3. \dots n' dy^{n'-1}. 2. 3. \dots n'' dt^{n''-1}}, \text{ ove} \\
& A = -\frac{1}{dz}, A' = -\frac{1}{dz'}, A'' = -\frac{1}{dz''}. \text{ A scanso di equivoci}
\end{aligned}$$

si noti, che in queste formole la caratteristica d quando precede A indica il differenziale preso per rapporto ad x , quando precede A' , il differenziale relativamente ad y , e quando precede A'' , il differenziale relativo a t . Convien però terminate le operazioni porre nella serie $x=f, y=f, t=f$, essendo f, f', f'' funzioni arbitrarie di u , ecc. senza x , nè y , nè t .

V I I.

Non occorre continuar di più questa teoria, perchè dalle cose precedenti abbastanza apparisce, che qualunque sia il numero dell' equazioni $z=0, z'=0, z''=0$, ecc. si potrà sempre esprimere in serie il valore di Φ . La legge di questa serie è nota, e facilmente se ne troverà ciascun termine.

V I I I.

Ma quantunque le formole che abbiamo ritrovate per la loro generalità sembrano meritare l'attenzione de' Geometri,

contuttociò le variabili in esse sono così involuppate, che se si richiedesse di esprimere la funzione Ψ in una serie ordinata per le potenze ed i prodotti delle variabili, difficilmente da esse potrebbero dedursi i coefficienti di questi prodotti. Per riescire in questa nuova ricerca, diamo un' altra forma alla serie del N.º IV. Qualunque sia l' equazione $z=0$, si potrà sempre dare ad essa la forma $x-f-\phi=0$, essendo f quella funzione di y, t, u , ecc. che sopra si sostituisce in luogo di x dopo le differenziazioni, e ϕ una qualunque funzione di x, y, t, u , ecc. Avremo dunque

$$\frac{dz}{dx} = 1 - \frac{d\phi}{dx}, \text{ ed } A = -\frac{1}{\frac{dz}{dx}} = -\frac{1}{1 - \frac{d\phi}{dx}}, \text{ e risolvendo que-}$$

sta quantità in serie

$$A = -1 - \frac{d\phi}{dx} - \frac{d\phi^2}{2dx^2} - \frac{d\phi^3}{dx^3} - \frac{d\phi^4}{2dx^4} - \text{ecc.}$$

e quindi

$$\begin{aligned} AdA \frac{d\Psi}{dx} &= \frac{d^2\Psi}{2dx^2} + \frac{d^2\phi}{2dx^2} \cdot \frac{d\Psi}{dx} + 3 \frac{d\phi}{dx} \cdot \frac{d^2\phi}{2dx^2} \cdot \frac{d\Psi}{dx} \\ &\quad + 2 \frac{d\phi}{dx} \cdot \frac{d^3\Psi}{2dx^3} + 3 \frac{d\phi^2}{dx^2} \cdot \frac{d^2\Psi}{2dx^2} + \text{ecc.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} AdAdA \frac{d\Psi}{dx} &= -\frac{d^3\Psi}{2 \cdot 3dx^3} - \frac{d^3\phi}{2 \cdot 3dx^3} \cdot \frac{d\Psi}{dx} \\ &\quad - 2 \frac{d^2\phi}{2dx^2} \cdot \frac{d^2\Psi}{2dx^2} - \text{ecc.} \\ &\quad - 3 \frac{d\phi}{dx} \cdot \frac{d^3\Psi}{2 \cdot 3dx^3} \end{aligned}$$

$$AdAdAdA \frac{d\Psi}{dx} = \frac{d^4\Psi}{2 \cdot 3 \cdot 4dx^4} + \text{ecc.}$$

Sostituendo questi valori, ed osservando che z diventa $-\phi$, quando vi si pone $x=f$, avremo (4)

$$\begin{aligned}
 \Psi = \Psi + \phi \frac{d\Psi}{dx} + \phi \frac{d\phi}{dx} \cdot \frac{d\Psi}{dx} + \phi \frac{d^2\phi}{dx^2} \cdot \frac{d\Psi}{dx} + \phi \frac{d^3\phi}{dx^3} \cdot \frac{d\Psi}{dx} \\
 + \phi^2 \cdot \frac{d^2\Psi}{2dx^2} + \phi^2 \frac{d^2\phi}{2dx^2} \cdot \frac{d\Psi}{dx} + 3\phi^2 \frac{d\phi}{dx} \cdot \frac{d^2\Psi}{2dx^2} \cdot \frac{d\Psi}{dx} \\
 + 2\phi^2 \frac{d\phi}{dx} \cdot \frac{d^2\Psi}{2dx^2} + 3\phi^2 \frac{d^2\phi}{dx^2} \cdot \frac{d^2\Psi}{2dx^2} \\
 + \phi^3 \cdot \frac{d^3\Psi}{2 \cdot 3 dx^3} + \phi^3 \frac{d^3\phi}{2 \cdot 3 dx^3} \cdot \frac{d\Psi}{dx} + \text{ecc.} \\
 + 2\phi^3 \cdot \frac{d^2\phi}{2dx^2} \cdot \frac{d^2\Psi}{2dx^2} \\
 + 3\phi^3 \frac{d\phi}{dx} \cdot \frac{d^3\Psi}{2 \cdot 3 dx^3} \\
 + \phi^4 \cdot \frac{d^4\Psi}{2 \cdot 3 \cdot 4 dx^4}
 \end{aligned}$$

che si riduce manifestamente alla forma

$$\Psi = \Psi + \phi \frac{d\Psi}{dx} + \frac{d \cdot (\phi^2 \frac{d\Psi}{dx})}{2dx} + \frac{d^2 \cdot (\phi^3 \frac{d\Psi}{dx})}{2 \cdot 3 dx^2} + \frac{d^3 \cdot (\phi^4 \frac{d\Psi}{dx})}{2 \cdot 3 \cdot 4 dx^3} + \text{ecc.}$$

facendo dopo le differenziazioni $x = f = \text{funz. } (y, t, u, \text{ecc.})$.

I X.

Se ϕ e Ψ sono funzioni di x sola, e facciamo $f = y$, avremo

$$\begin{aligned}
 \Psi : x = \Psi : x + \phi : x \frac{d\Psi : x}{dx} + \frac{d \left(\phi : x \frac{d\Psi : x}{dx} \right)}{2dx} \\
 + \frac{d^2 \left(\phi : x \frac{d\Psi : x}{dx} \right)}{2 \cdot 3 dx^2} + \text{ecc.}
 \end{aligned}$$

facendo $x = y$, cioè

$$\Psi : x = \Psi : y + \phi : y \frac{d\Psi : y}{dy} + \frac{d \left(\phi : y \frac{d\Psi : y}{dy} \right)}{2dy}$$

$$+ \frac{d^2 \left(\phi : y^3 \frac{d\Psi}{dy} : y \right)}{2 \cdot 3 dy^2} + \text{ecc. che è l' elegantissimo Teorema}$$

 trovato dal Sig. *de la Grange* nelle Memorie dell' Accademia di Berlino dell' anno 1769.

X.

Nella formola trovata al N.° VIII. le variabili sono tra loro involuppate; vediamo come per mezzo di questa formola si potrà la quantità Ψ svolgere in una serie ordinata per le potestà ed i prodotti di y , t , u , ecc. Noi supporremo che le nostr' equazioni $z=0$, $z'=0$ ecc. siano razionali, perchè se contenessero radicali, sarebbe facile l'eliminarli con i metodi soliti. Si abbia dunque l' equazione $z=0$, e facendo $y=0$, $t=0$, ecc. la quantità z che è allora funzione di x sola, risolta ne' suoi fattori sia $(x-a)(x-b)(x-c)$ ecc. cioè facendo $y=0$, $t=0$, ecc. in z sia $x=a$, o $x=b$, o $x=c$, ecc. e ciascuno di questi fattori ci darà una serie per esprimere il valore di Ψ . Prendiamo il fattore $x-a$, e la funzione z farà della forma $(x-a)A - yF - tF' - \text{ecc.}$ ove A contiene gli altri fattori $x-b$, $x-c$ ecc. cioè è una funzione di x , ed F , F' , ecc. sono funzioni tali di x , y , t , u , ecc. che non diventino infinite facendo $y=0$, $t=0$, ecc. Nelle medesime circostanze supporremo che non diventi infinita la funzione Ψ , perchè se mai non fosse tale, si potrà sempre combinandola coll' equazione $z=0$ ridurre ad una forma che non diventi infinita facendo $y=0$, $t=0$, ecc. almeno nel caso, che essa possa esprimersi per le potenze ed i prodotti positivi di y , t , ecc. che è il solo caso il quale per ora c' interessa. Avremo dunque

$$\phi = \frac{yF + tF' + \text{ecc.}}{A}, \text{ e } \Psi = \Psi + \phi \frac{d\Psi}{dx} + \frac{d \left(\phi^2 \frac{d\Psi}{dx} \right)}{2 dx}$$

$$+ \frac{d^2 \left(\phi^3 \frac{d\Psi}{dx} \right)}{2 \cdot 3 dx^2} + \frac{d^3 \left(\phi^4 \frac{d\Psi}{dx} \right)}{2 \cdot 3 \cdot 4 dx^3} + \text{ecc.}$$

facendo nel secondo membro $x=a$ dopo le differenziazioni. Ora è noto, che se una funzione v si vuole svolgere in una serie ordinata per le potenze ed i prodotti positivi di y, t , ecc. farà il coefficiente del termine $y^n. t^{n'}$ ecc.

$$= \frac{d^{n+n'+\text{ecc.}} v}{1.2...ndy^n. 1.2...n'dt^{n'}. \text{ecc.}}$$
 facendo $y=0, t=0, \text{ecc.}$ dopo le differenziazioni. Quindi chiamando q_n, n' ecc. il coefficiente di $y^n. t^{n'}$ ecc. nella evoluzione di $\Psi + \phi \frac{d\Psi}{dx} + \text{ecc.}$

avremo $q_{n,n'}, \text{ecc.} = \frac{d^{n+n'+\text{ecc.}} \cdot \Psi}{1.2...ndy^n. 1.2...n'dt^{n'}. \text{ecc.}}$

$$+ \frac{d^{n+n'+\text{ecc.}}}{1.2...ndy^n. 1.2...n'dt^{n'}. \text{ecc.}} \left(\phi \frac{d\Psi}{dx} + \frac{d\left(\phi^2 \frac{d\Psi}{dx}\right)}{2dx} + \text{ecc.} \right)$$
 facendo dopo le differenziazioni $y=0, t=0, \text{ecc.}$ e $x=a$.

Quantunque la serie $\phi \frac{d\Psi}{dx} + \frac{d\left(\phi^2 \frac{d\Psi}{dx}\right)}{2dx} + \text{ecc.}$ vada all'infinito, pure non occorre prendere al di là del termine

$$\frac{d^{n+n'+\text{ecc.}} - 1 \left(\phi \frac{d^{n+n'+\text{ecc.}} \Psi}{dx} \right)}{1.2.3... (n+n'+\text{ecc.}) dx^{n+n'+\text{ecc.}} - 1}$$
, perchè i seguenti svaniranno dopo le differenziazioni facendo $y=0, t=0, \text{ecc.}$

$$\frac{d^{n+n'+\text{ecc.}}}{\phi} \left(\phi \frac{d^{n+n'+\text{ecc.}} \Psi}{dx} + 1 \frac{d\Psi}{dx} \right)$$

Infatti il termine seguente $\frac{d^{n+n'+\text{ecc.}}}{1.2... (n+n'+\text{ecc.} + 1) dx^{n+n'+\text{ecc.}}}$ farà composto di termini della forma $y^a. t^{a'}. \text{ecc.} M$, essendo $a+a'+\text{ecc.} = n+n'+\text{ecc.} + 1$, ed M una funzione che non diventi infinita facendo $y=t=\text{ecc.}=0$, quindi farà

$$\frac{d^{n+n'+\text{ecc.}} (y^a. t^{a'}. \text{ecc.} M)}{1.2...ndy^n. 1.2...n'dt^{n'}. \text{ecc.}} = 0$$
 facendo $y=t=\text{ecc.}=0$.

Con più forte ragione si potranno ammettere gli altri termini
sufseguenti

fusseguenti : sarà dunque chiamando p la seconda parte del valore di q_n, n' , ecc.

$$p = \frac{d^{n+n'+\text{ecc.}}}{1.2...ndy^n.1.2...n'dt^n'.\text{ecc.}} \left\{ \begin{aligned} &\phi \frac{d\Psi}{dx} + \frac{d(\phi^2 \frac{d\Psi}{dx})}{2dx} + \frac{d^2(\phi^3 \frac{d\Psi}{dx})}{2.3dx^2} \dots \dots \dots \\ &\dots \dots + \frac{d^{n+n'+\text{ecc.}-1}(\phi^{n+n'+\text{ecc.}} \frac{d\Psi}{dx})}{1.2.\dots.(n+n'+\text{ecc.})dx^{n+n'+\text{ecc.}-1}} \end{aligned} \right\}$$

Ma siccome dobbiamo fare $x=a$ dopo le differenziazioni relative ad x , la quantità tra le parentesi la potremo mettere sotto la forma

$$\frac{d^{n'+\text{ecc.}-1}}{1.2.\dots.(n+n'+\text{ecc.}-1)} \left\{ (x-a)^{n+n'+\text{ecc.}} \left(\phi \frac{d\Psi}{dx} + \frac{\phi^2 \cdot \frac{d\Psi}{dx}}{2(x-a)^2} + \frac{\phi^3 \cdot \frac{d\Psi}{dx}}{3(x-a)^3} \dots + \frac{\phi^{n+n'+\text{ecc.}} \cdot \frac{d\Psi}{dx}}{(n+n'+\text{ecc.})} \right) \right.$$

quale permutando le differenziali sarà

$$p = \frac{d^{n+n'+\text{ecc.}-1} \left\{ (x-a)^{n+n'+\text{ecc.}} \cdot d^{n+n'+\text{ecc.}} \left(\phi \frac{d\Psi}{dx} \dots + \frac{\phi^{n+n'+\text{ecc.}} \cdot \frac{d\Psi}{dx}}{(n+n'+\text{ecc.})} \right) \right\}}{1.2.\dots.ndy^n.1.2.\dots.n'dt^n'.\text{ecc.}1.2.\dots.(n+n'+\text{ecc.})}$$

Ma la quantità $\frac{\phi \frac{d\Psi}{dx}}{x-a} + \text{ecc.}$ invece che sia composta di un

numero finito di termini, si potrà supporre continuata all'infinito, perchè i termini che si aggiungono sono zero, dovendosi fare $y=0$, $t=0$, ecc. dopo le differenziazioni relative a queste variabili; nel qual caso questa quantità divenendo

$= -\frac{d\Psi}{dx} \log. \left(1 - \frac{\phi}{x-a} \right)$, avremo per conseguenza

$$p = - \frac{d^{n+n'+\text{ecc.}-1} \left\{ (x-a)^{n+n'+\text{ecc.}} \cdot d^{n+n'+\text{ecc.}} \left(\frac{d\Psi}{dx} \log. 1 - \frac{\phi}{x-a} \right) \right\}}{1.2...ndy^n.1.2...n'dt^n'.\text{ecc.}1.2... (n+n'+\text{ecc.}-1)dx^{n+n'+\text{ecc.}-1}}$$

A questo valore si può aggiungere il termine

$$\frac{d^{n+n'+ecc.-1} \left\{ (x-a)^{n+n'+ecc.} \cdot d^{n+n'+ecc.} \left(\frac{d\Phi}{dx} \log. (x-a. A) \right) \right\}}{1.2..ndy.^n 1.2..n'dt^n.^ecc. 1.2... (n+n'+ecc.-1) dx^{n+n'+ecc.-1}}$$

il quale è evidentemente $= 0$ facendo dopo le differenziazioni $x=a$. Ma $\log. (x-a. A) + \log. \left(1 - \frac{\Phi}{x-a} \right)$
 $= \log. (x-a. A - A\Phi) = \log. z$. Sarà dunque

$$p = - \frac{d^{n+n'+ecc.-1} \left\{ (x-a)^{n+n'+ecc.} \cdot \frac{d^{n+n'+ecc.}}{dy.^n dt^n.^ecc.} \left(\frac{d\Phi}{dx} \log. z \right) \right\}}{1.2..n. 1.2..n'. ecc. 1.2... (n+n'+ecc.-1) dx^{n+n'+ecc.-1}}$$

e quindi

$$q_{n,n',ecc.} = \frac{d^{n+n'+ecc.} \cdot \Phi}{1.2..ndy.^n 1.2..n'dt^n.^ecc.}$$

$$- \frac{d^{n+n'+ecc.-1} \left\{ (x-a)^{n+n'+ecc.} \cdot \frac{d^{n+n'+ecc.}}{dy.^n dt^n.^ecc.} \left(\frac{d\Phi}{dx} \log. z \right) \right\}}{1.2..n. 1.2..n'. ecc. 1.2... (n+n'+ecc.-1) dx^{n+n'+ecc.-1}}$$

facendo $y=0$ dopo le differenziazioni relative ad y , $t=0$ dopo le differenziazioni relative a t , ecc. ed $x=a$ dopo tutte le differenziazioni.

X I.

Ho supposto che il fattore $x-a$ non ne abbia altri eguali: se vi saranno in A altri fattori uguali ad $x-a$, le formole precedenti non ci daranno la serie che esprime il valore di Φ . Infatti la formola del numero VIII suppone che la funzione ϕ non contenga $x-a$ nel denominatore, altrimenti i suoi termini diventerebbero infiniti facendo $x=a$. Nel caso dunque che la funzione z facendo $y=t=ec.=0$ abbia più fattori uguali, converrà usare il metodo seguente. Sia i il numero de' fattori uguali ad $x-a$, e la funzione z sarà composta di i fattori della forma $(x-a) A - \phi$, $(x-a) A' - \phi'$, ec. ove A, A' , ec. non conterranno più il fattore $x-a$. Chiamiamo Z, Z', Z'' , ecc. questi fattori, e ciascuno di essi per esempio Z ci darà una serie per Φ ,

nella quale chiamando $q_{n,n'}$, ecc. il coefficiente del termine $y^n t^{n'}$ ecc. sarà

$$q_{n,n'} = \frac{d^{n+n'+\text{ecc.}} \cdot \Phi}{1.2...n dy^n 1.2...n' dt^{n'} \text{ ecc.}}$$

$$\frac{d^{n+n'+\text{ecc.}-1} \left\{ (x-a)^{n+n'+\text{ecc.}} \cdot \frac{d^{n+n'+\text{ecc.}}}{dy^n dt^{n'} \text{ ecc.}} \left(\frac{d\Phi}{dx} \log. Z \right) \right\}}{1.2...n. 1.2...n' \text{ ecc. } 1.2... (n+n'+\text{ecc.}-1) dx^{n+\text{ecc.}-1}}$$

Se prendiamo un medio aritmetico tra tutte queste i serie che nascono dai fattori $Z, Z', \text{ecc.}$ e chiamiamo $q_{n,n'}$, ecc. il coefficiente di $y^n t^{n'}$ ecc. in questa serie media, avremo

$$q_{n,n'} = \frac{d^{n+n'+\text{ecc.}} \cdot \Phi}{1.2...n dy^n 1.2...n' dt^{n'} \text{ ecc.}}$$

$$\frac{d^{n+n'+\text{ecc.}-1} \left\{ (x-a)^{n+n'+\text{ecc.}} \cdot \frac{d^{n+n'+\text{ecc.}}}{dy^n dt^{n'} \text{ ecc.}} \left(\frac{d\Phi}{dx} \log. z \right) \right\}}{1.2...n. 1.2...n' \text{ ecc. } 1.2... (n+n'+\text{ecc.}-1)}$$

cioè , siccome $\log. Z + \log. Z' + \log. Z'' + \text{ecc.} = \log. z$,

$$q_{n,n'} = \frac{d^{n+n'+\text{ecc.}} \cdot \Phi}{1.2...n dy^n 1.2...n' dt^{n'} \text{ ecc.}}$$

$$\frac{d^{n+n'+\text{ecc.}-1} \left\{ (x-a)^{n+n'+\text{ecc.}} \cdot \frac{d^{n+n'+\text{ecc.}}}{dy^n dt^{n'} \text{ ecc.}} \left(\frac{d\Phi}{dx} \log. z \right) \right\}}{1.2...n. 1.2...n' \text{ ecc. } 1.2... (n+n'+\text{ecc.}-1)}$$

facendo $y=0, t=0, \text{ecc.}$ dopo le differenziazioni relative ad $y, t, \text{ecc.}$ ed $x=a$ dopo tutte le differenziazioni.

X I I.

Se z e Φ sono funzioni di due sole variabili x ed y , ed $(x-a)^i$ è uno de' fattori di z quando $y=0$, avremo chiamando q_n il coefficiente di y^n nella serie che rappresenta il valore di Φ quando si fa uso del fattore $x-a$

$$q_n = \frac{d^n \Psi}{1.2 \dots n dy^n} - \frac{d^{n-1} \left\{ (x-a)^n \cdot \frac{d^n \left(\frac{d\Psi}{dx} \log. z \right)}{1.2 \dots n dy^n} \right\}}{1.2 \dots (n-1) id x^{n-1}}$$

facendo $y=0$ dopo le differenziazioni relative ad y , ed $x=a$ dopo tutte le differenziazioni. Questa formola è stata data senza dimostrazione dal Sig. *de la Place* nelle Memorie dell' Accademia delle Scienze di Parigi dell'anno 1777. Pare che essa abbia il senso seguente: che cioè sia q_n il coefficiente di y^n

nella serie che esprime il valore di Ψ quando $i=1$; ma quando $i>1$, q_n sia il coefficiente di y^n nella serie che è il medio aritmetico tra tutte quelle serie che rappresentano il valore di Ψ , quando si fa uso del fattore $(x-a)^i$.

Si abbia per esempio l'equazione $(x-1)^2 - y^2 (a+bx)^2 = 0$, e si voglia svolgere il valore di x in una serie ordinata per le potenze di y . Saranno $x-1-y(a+bx)$, $x-1+y(a+bx)$ i due fattori dell'equazione $z=0$, e questi fattori ci daranno le due serie per esprimere il valore di x

$$x = 1 + (a+b)y + (a+b)by^2 + (a+b)b^2y^3 + (a+b)b^3y^4 + \text{ecc.}$$

$$x = 1 - (a+b)y + (a+b)by^2 - (a+b)b^2y^3 + (a+b)b^3y^4 - \text{ecc.}$$

e ciascuna di queste serie soddisfa all'equazione $z=0$. Se prendiamo il medio aritmetico tra queste due serie, avremo quella serie che ci dà la formola del Sig. *de la Place*, cioè

$$x = 1 + (a+b)by^2 + (a+b)b^3y^4 + \text{ecc.}$$

ma questa serie non soddisfa più all'equazione $z=0$.

X I I I.

Ritorniamo al problema generale, e supponghiamo che l'equazione $z=0$ sia della forma $(x-a)A - yF - tF' - \text{ecc.} = 0$, ove siano F , F' , ecc. e Ψ funzioni di x solamente. E' chiaro che il primo termine del valore di q_n, n' , ecc. è in questo caso $=0$: per avere il valore della

seconda parte si offervi che

$$\frac{d^{n+n'+\text{ecc.}} \left(\frac{d\Psi}{dx} \log. z \right)}{dy^n. dt^{n'}. \text{ecc.}}$$

$$= - \frac{d\Psi}{dx} \cdot \frac{1. 2. \dots (n+n'+\text{ecc.}-1) F^n. F'^{n'}. \text{ecc.}}{A^{n+n'+\text{ecc.}} (x-a)^{n+n'+\text{ecc.}}}$$

facendo $y=0$,
 $t=0$, ecc. e quindi farà

$$d^{n+n'+\text{ecc.}-1} \left(F^n. F'^{n'}. \text{ecc.} \frac{d\Psi}{dx} \right)$$

$$q_{n,n'}, \text{ecc.} = \frac{1. 2. \dots n. 1. 2. \dots n'. \text{ecc.} d x^{n+n'+\text{ecc.}-1}}{}$$

facendo $x=a$ dopo le differenziazioni.

X I V.

Si abbiano adesso due equazioni $z=0$, $z'=0$, la prima tra x, y, t , ecc. la seconda tra y, t , ecc. senza cendo $t=0$, ecc. in z' sia $y=b$ uno de' valori di y risulta, il qual valore supporrò che non ne abbia altri. Facendo adesso $t=0$, ecc. e $y=b$ in z , sia x de' valori di x , e questo ancora supporrò che non sia altri eguali. Sarà z della forma $(x-a)A-(y-b)F-t$, e z' della forma $(y-b)B-tf-\text{ecc.}$ essendo A funz. x , F, F' , ecc. funzioni di x, y, t , ecc. B funz. y, f , ecc. funzioni di y, t , ecc. Ora facendo uso dell'equazione $z=0$, avremo

$$\Psi = \Psi + \phi \frac{d\Psi}{dx} + \frac{d \left(\phi^2 \frac{d\Psi}{dx} \right)}{2 dx} + \frac{d^2 \left(\phi^3 \frac{d\Psi}{dx} \right)}{2. 3 dx^2} + \text{ecc.}$$

ove $\phi = \frac{(y-b)F + tF' + \text{ecc.}}{A}$, ponendo nel secondo mem-

bro $x=a$ dopo le differenziazioni. Facciamo questo secondo membro $=v$, e sarà v funzione di y, t, u , ecc. la quale se mediante l'equazione $z'=0$ si vorrà svolgere per le potenze ed i prodotti di t, u , ecc. avremo chiamando $q_{n,n'}, \text{ecc.}$

il coefficiente di $t^n. u^{n'}. \text{ecc.}$ (X)

$$q_{n,n'}, \text{ecc.} = \frac{d^{n+n'+\text{ecc.}}. v}{1. 2. \dots n dt^n. 1. 2. \dots n' du^{n'}. \text{ecc.}}$$

K k k iij

$$\frac{d^{n+2}}{1. 2.}$$

$$\frac{d^{n+1}}{1. 2.}$$

$$d^{n+n'+ecc.-1} \left\{ (y-b)^{n+n'+ecc.} \cdot \frac{d^{n+n'+ecc.}}{dt^n \cdot dt'^{n'} \cdot ecc.} \left(\frac{dv}{dy} \log. z' \right) \right\}$$

$1. 2. \dots n. 1. 2. \dots n'. ecc. 1. 2. \dots (n+n'+ecc.-1) dy^{n+n'+ecc.-1}$
 facendo $t=u=ecc.=0$, ed $y=b$ dopo le differenziazioni.
 Sostituendo adesso il valore di v avremo

$$q_{n, n', ecc.} = \frac{d^{n+n'+ecc.} \Psi}{1. 2. \dots n dt^n. 1. 2. \dots n' dt'^{n'} \cdot ecc.}$$

$$+ \frac{d^{n+n'+ecc.} \cdot \left(\Phi \frac{d\Psi}{dx} + \frac{d(\Phi^2 \frac{d\Psi}{dx})}{2 dx} + \frac{d^2(\Phi^3 \frac{d\Psi}{dx})}{2 \cdot 3 dx^2} + ecc. \right)}{1. 2. \dots n dt^n. 1. 2. \dots n' dt'^{n'} \cdot ecc.}$$

$$\frac{z'^{n'+ecc.-1} \left\{ (y-b)^{n+n'+ecc.} \cdot \frac{d^{n+n'+ecc.}}{dt^n dt'^{n'} \cdot ecc.} \left(\frac{d\Psi}{dy} \log. z' \right) \right\}}{1. 2. \dots n. 1. 2. \dots n' \cdot ecc. 1. 2. \dots (n+n'+ecc.-1) dy^{n+n'+ecc.-1}}$$

$$\frac{z'^{n'+ecc.-1} \left\{ (y-b)^{n+n'+ecc.} \cdot \frac{d^{n+n'+ecc.}}{dt^n \cdot dt'^{n'} \cdot ecc.} \left\{ \frac{d(\Phi \frac{d\Psi}{dx} + \frac{d(\Phi^2 \frac{d\Psi}{dx})}{2 dx} + ecc.)}{dy} \log. z' \right\} \right\}}{1. 2. \dots n. 1. 2. \dots n' \cdot ecc. 1. 2. \dots (n+n'+ecc.-1) dy^{n+n'+ecc.-1}}$$

La seconda parte di questo valore è per le cose precedenti

$$\frac{d^{n+n'+ecc.-1} (x-a)^{n+n'+ecc.} \cdot \frac{d^{n+n'+ecc.}}{dt^n \cdot dt'^{n'} \cdot ecc.} \left(\frac{d\Psi}{dx} \log. z \right)}{1. 2. \dots n. 1. 2. \dots n' \cdot ecc. 1. 2. \dots (n+n'+ecc.-1) dx^{n+n'+ecc.-1}}$$

Nella quarta parte si potrà omettere il termine

$$\frac{d^{n+n'+ecc.} (\Phi \frac{d\Psi}{dx})}{1. 2. \dots (n+n'+ecc.+1) dx^{n+n'+ecc.}}$$

Infatti differenziando una volta per rapporto ad y , n volte per rapporto a t , n' volta per rapporto ad u , ecc. e facendo poi $t=u=ecc.=0$, questo termine ci produrrebbe nella quarta parte una quantità della forma

$$\frac{d^{n+n'+ecc.-1} \cdot (y-b)^{n+n'+ecc.} \cdot \left(p \log.(\overline{y-b.B}) + \frac{p'}{(y-b)B} + \right.}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (n+n'+ecc.-1) d}$$

ove la minima potenza di $y-b$ in p per lo meno farà $=0$, in p' farà $=1$, in p'' farà $=2$, e generalmente in p^m farà $=m$, quindi questa quantità farà $=0$, dovendosi fare dopo le differenziazioni $y=b$. Con più torte ragione potranno ometterli i termini più remoti di quello che abbiamo considerato. Quindi in luogo della quantità

$$\frac{\phi \frac{d\Psi}{dx} + \frac{d \cdot \left(\phi^2 \frac{d^2\Psi}{dx^2} \right)}{2 dx} + ecc. \text{ potremo porre l'espressione}}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (n+n'+ecc.-1) dx^{n+n'+ecc.-1}}$$

$$d^{n+n'+ecc.-1} \cdot (x-a)^{n+n'+ecc.} \cdot \left(\phi \frac{d\Psi}{dx} + \frac{\phi^2 \frac{d^2\Psi}{dx^2}}{2(x-a)^2} + ecc. \right)$$

e permutando le differenziali e ponendo come sopra

$-\frac{d\Psi}{dx} \log. z$ invece di $\phi \frac{d\Psi}{dx} + ecc.$ avremo questa quarta parte così espressa

$$+ \frac{d^{2n+2n'+ecc.-2} \left\{ \frac{1}{(x-a)(y-b)} n+n'+ecc. \cdot d^{n+n'+ecc.} \left(\frac{d \left(\frac{d\Psi}{dx} \log. z \right)}{dy} \log. z' \right) \right\}}{1 \cdot 2 \dots n. 1 \cdot 2 \dots n'. ecc. 1^2 \cdot 2^2 \dots (n+n'+ecc.-1)^2 dx^{n+n'+ecc.-1} \cdot dy^{n+n'+ecc.-1}}$$

facendo $t=u=ecc.=0$ dopo le differenziazioni relative a $t, u, ecc. y=b$ dopo le differenziazioni relative ad y , ed $x=a$ dopo tutte le differenziazioni. Sarà dunque con queste condizioni

$$\begin{aligned}
& d^{n+n'+ecc.} \cdot \Psi \\
& {}^q n, n', ecc. = \frac{1.2...ndt^n.1.2...n'du^{n'}.ecc.}{d^{n+n'+ecc.-1} \left\{ (x-a)^{n+n'+ecc.} \cdot \frac{d^{n+n'+ecc.}}{dt^n \cdot du^{n'}.ecc.} \left(\frac{d\Psi}{dx} \log. z \right) \right\}} \\
& - \frac{1.2...n.1.2...n'.ecc.1.2...(n+n'+ecc.-1)dx^{n+n'+ecc.-1}}{d^{n+n'+ecc.-1} \left\{ (y-b)^{n+n'+ecc.} \cdot \frac{d^{n+n'+ecc.}}{dt^n \cdot du^{n'}.ecc.} \left(\frac{d\Psi}{dx} \log. z' \right) \right\}} \\
& - \frac{1.2...n.1.2...n'.ecc.1.2...(n+n'+ecc.-1)dy^{n+n'+ecc.-1}}{d^{2n+2n'+ecc.-2} \left\{ (x-a)(y-b)^{n+n'+ecc.} \cdot \frac{d^{n+n'+ecc.}}{dt^n \cdot du^{n'}.ecc.} \left(\frac{d(\frac{d\Psi}{dx} \log. z)}{dy} \log. z' \right) \right\}} \\
& + \frac{1.2...n.1.2...n'.ecc.1^2.2^2...(n+n'+ecc.-1)^2 dx^{n+n'+ecc.-1} dy^{n+n'+ecc.-1}}{+}
\end{aligned}$$

Ho supposto che i fattori $x-a$, $y-b$ non ne abbiano altri uguali: se ne avessero, si seguirebbe un metodo analogo a quello usato di sopra (XI). Sia i il numero de' fattori uguali ad $x-a$, l il numero de' fattori uguali ad $y-b$, e se vorremo avere quella serie che è il medio aritmetico tra tutte quelle che nascono dai fattori $(x-a)^i$, $(y-b)^l$, avremo per questa serie ponendo per più semplicità $n+n'+ecc. = m$

$$\begin{aligned}
& d^m \cdot \Psi \\
& {}^q n, n', ecc. = \frac{1.2...ndt^n.1.2...n'du^{n'}.ecc.}{d^{m-1} \left\{ (x-a)^m \cdot \frac{d^m}{dt^n \cdot du^{n'}.ecc.} \left(\frac{d\Psi}{dx} \log. z \right) \right\}} \\
& - \frac{1.2...n.1.2...n'.ecc.1.2...(m-1)idx^{m-1}}{d^{m-1} \left\{ (y-b)^m \cdot \frac{d^m}{dt^n \cdot du^{n'}.ecc.} \left(\frac{d\Psi}{dx} \log. z' \right) \right\}} \\
& - \frac{1.2...n.1.2...n'.ecc.1.2...(m-1)ldy^{m-1}}{+}
\end{aligned}$$

$$+ d^{2m-2}$$

$$+ \frac{d^{2m-2} \left\{ \frac{1}{(x-a)(y-b)} m \cdot \frac{d^m}{dt^n \cdot du^{n'}} \text{ecc.} \left(\frac{d \left(\frac{d\Phi}{dx} \log. z. \right)}{dy} \log. z' \right) \right\}}{1. 2. \dots n. 1. 2. \dots n' \text{ecc. } 1^2. 2^2. \dots (m-1)^2 dx^{m-1} dy^{m-1}}$$

X V.

Sia per esempio $z = (x-a) A - tF$, $z' = (y-b) B - uf$, ove sieno A ed F funzioni di x sola, B ed f funzioni di y sola, e si voglia mediante queste due equazioni svolgere una funzione Φ delle variabili x, y in una serie ordinata per le potenze ed i prodotti di t, u . La prima parte del valore di q_n, n' è $= 0$ perchè Φ non contiene t nè u : la seconda parte svanisce quando $n' > 0$, perchè z non contiene u ; ma

$$d^{n-1} \left(\frac{F^n}{A^n} \cdot \frac{d\Phi}{dx} \right)$$

quando $n' = 0$, essa diventa $\frac{1}{1. 2. \dots n dx^{n-1}}$: similmente la terza parte svanisce quando $n > 0$, ma quando $n = 0$ diviene

$$d^{n'-1} \left(\frac{f^{n'}}{B^{n'}} \cdot \frac{d\Phi}{dy} \right)$$

$\frac{1}{1. 2. \dots n' dy^{n'-1}}$. Per avere il valore della quarta parte si

osservi che $\frac{d \left(\frac{d\Phi}{dx} \log. z. \right)}{dy} = \frac{d^2 \Phi}{dx dy} \log. z$ onde differenziando per rapporto a t ed u , avremo nel caso di $t = u = 0$

$$\frac{d^{n+n'} \left(\frac{d^2 \Phi}{dx dy} \log. z \log. z' \right)}{1. 2. \dots n dt^n. 1. 2. \dots n' du^{n'} \text{ecc.}} = \frac{d^2 \Phi}{dx dy} \cdot \frac{F^n}{n(x-a)^n A^n} \cdot \frac{f^{n'}}{n'(y-b)^{n'} B^{n'}}$$

Differenziando adesso per rapporto ad y avremo nel caso di $y = b$

$$\frac{d^{n+n'-1} \cdot \left\{ (y-b)^n \cdot \frac{d^2 \Psi}{dx dy} \cdot \frac{F^n}{n(x-a)^n A^n} \cdot \frac{f^{n'}}{n' B^{n'}} \right\}}{1. 2. \dots (n+n'-1) dy^{n+n'-1}}$$

$$= \frac{d^{n'-1} \cdot \left(\frac{d^2 \Psi}{dx dy} \cdot \frac{F^n}{n(x-a)^n A^n} \cdot \frac{f^{n'}}{B^{n'}} \right)}{1. 2. \dots n' dy^{n'-1}} \text{ e differenziando per rap-}$$

$$d^{n+n'-1} \cdot \left\{ (x-a)^{n'} \cdot d^{n'-1} \left(\frac{d^2 \Psi}{dx dy} \cdot \frac{F^n}{n A^n} \cdot \frac{f^{n'}}{B^{n'}} \right) \right\}$$

$$1. 2. \dots (n+n'-1) dx^{n+n'-1} \cdot 1. 2. \dots n' dy^{n'-1}$$

$$= \frac{d^{n-1} \cdot d^{n'-1} \left(\frac{d^2 \Psi}{dx dy} \cdot \frac{F^n}{A^n} \cdot \frac{f^{n'}}{B^{n'}} \right)}{1. 2. \dots n dx^{n-1} \cdot 1. 2. \dots n' dy^{n'-1}} \text{ nel caso di } x=a. \text{ Quindi}$$

la quarta parte del valore di $q_{n,n'}$, n' farà

$$\frac{d^{n+n'-2} \left(\frac{d^2 \Psi}{dx dy} \cdot \frac{F^n}{A^n} \cdot \frac{f^{n'}}{B^{n'}} \right)}{1. 2. \dots n dx^{n-1} \cdot 1. 2. \dots n' dy^{n'-1}} ; \text{ la medesima quarta parte } \equiv 0$$

quando $n=0$, e quando $n'=0$, quindi sarà facendo $x=a$,
 $y=b$ dopo le differenziazioni

$$q_{n,n'} = \frac{d^{n-1} \cdot \left(\frac{F^n}{A^n} \cdot \frac{d^2 \Psi}{dx} \right)}{1. 2. \dots n dx^{n-1}}$$

quando $n'=0$

$$q_{n,n'} = \frac{d^{n'-1} \cdot \left(\frac{f^{n'}}{B^{n'}} \cdot \frac{d^2 \Psi}{dy} \right)}{1. 2. \dots n' dy^{n'-1}}$$

quando $n=0$

$$q_{n,n'} = \frac{d^{n+n'-2} \cdot \left(\frac{F^n}{A^n} \cdot \frac{f^{n'}}{B^{n'}} \cdot \frac{d^2 \Psi}{dx dy} \right)}{1. 2. \dots n dx^{n-1} \cdot 1. 2. \dots n' dy^{n'-1}}$$

quando n ed n' sono > 0 . La funzione Ψ ridotta in serie fa-
rà perciò della forma

$$\begin{aligned}
\Psi = & \Psi + t \cdot \frac{F}{A} \cdot \frac{d\Psi}{dx} + t^2 \cdot \frac{d\left(\frac{F^2}{A^2} \cdot \frac{d\Psi}{dx}\right)}{1 \cdot 2 dx} + t^3 \cdot \frac{d^2\left(\frac{F^3}{A^3} \cdot \frac{d\Psi}{dx}\right)}{1 \cdot 2 \cdot 3 dx^2} + t^4 \cdot \frac{d^3\left(\frac{F^4}{A^4} \cdot \frac{d\Psi}{dx}\right)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 dx^3} \\
& + u \cdot \frac{f}{B} \cdot \frac{d\Psi}{dy} + tu \cdot \frac{F \cdot f}{A \cdot B} \cdot \frac{d^2\Psi}{dx dy} + t^2 u \cdot \frac{d\left(\frac{F^2 \cdot f}{A^2 \cdot B} \cdot \frac{d^2\Psi}{dx dy}\right)}{1 \cdot 2 dx} + t^3 u \cdot \frac{d^2\left(\frac{F^3 \cdot f}{A^3 \cdot B} \cdot \frac{d^2\Psi}{dx dy}\right)}{1 \cdot 2 \cdot 3 dx^2} \\
& + u^2 \cdot \frac{d\left(\frac{F^2}{A^2} \cdot \frac{d\Psi}{dy}\right)}{1 \cdot 2 dy} + tu^2 \cdot \frac{d\left(\frac{F \cdot f^2}{A \cdot B^2} \cdot \frac{d^2\Psi}{dx dy}\right)}{1 \cdot 2 dy} + t^2 u^2 \cdot \frac{d^2\left(\frac{F^2 \cdot f^2}{A^2 \cdot B^2} \cdot \frac{d^2\Psi}{dx dy}\right)}{1 \cdot 2 dx \cdot 1 \cdot 2 dy} + \text{ecc.} \\
& + u^3 \cdot \frac{d^2\left(\frac{f^3}{B^3} \cdot \frac{d\Psi}{dy}\right)}{1 \cdot 2 \cdot 3 dy^2} + tu^3 \cdot \frac{d^2\left(\frac{F \cdot f^3}{A \cdot B^3} \cdot \frac{d^2\Psi}{dx dy}\right)}{1 \cdot 2 \cdot 3 dy^2} \\
& + u^4 \cdot \frac{d^3\left(\frac{f^4}{B^4} \cdot \frac{d\Psi}{dy}\right)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 dy^3}
\end{aligned}$$

facendo nel secondo membro $x=a$, $y=b$.

X V I.

Si abbiano adesso tre equazioni $z=0$, $z'=0$, $z''=0$, la prima tra le variabili x , y , t , u , r , ecc. la seconda tra y , t , u , r , ecc. senza x , la terza tra t , u , r , ecc. senza x nè y . Facendo $u=0$, $r=0$, ecc. in z'' , sia $t=c$; facendo $u=0$, $r=0$, ecc. e $t=c$ in z sia $y=b$; facendo finalmente $u=0$, $r=0$, ecc. $t=c$ ed $y=b$ in z sia $x=a$. Suppongo che $t=c$, $y=b$, $x=a$ non abbiano nelle loro rispettive quantità altri fattori uguali, perchè se ne avessero, converrebbe ricorrere all'artificio usato di sopra (XI). Si voglia adesso facendo uso di questi valori di t , y , x svolgere la funzione Ψ delle variabili x , y , t , u , r , ecc. per le potenze ed i prodotti di u , r , ecc. Chiamando $q_{n,n'}$, ecc. il coefficiente di

$u^n \cdot r^{n'}$, ecc. in questa evoluzione, troveremo per i principj esposti che il valore di $q_{n,n'}$, ecc. è composto di otto termini, il primo de' quali, se facciamo $n+n'+\text{ecc.}=m$, sarà

$$L_{11} \quad ij$$

$\frac{d^m \cdot \Psi}{1.2 \dots n du^n. 1.2 \dots n' dr^{n'}. \text{ecc.}}$, il secondo farà

$$\frac{d^{m-1} \left\{ (x-a)^m \cdot \frac{d^m}{du^n \cdot dr^{n'}. \text{ecc.}} \left(\frac{d\Psi}{dx} \log. z \right) \right\}}{1.2 \dots n. 1.2 \dots n'. \text{ecc.} 1.2 \dots (m-1) dx^{m-1}}$$

Altri due termini si troveranno ponendo in questo in luogo di $x-a$, e z prima $y-b$ e z' , poi $t-c$ e z'' . Il quinto termine farà

$$\frac{d^{2m-2} \left\{ \frac{d^m}{(x-a)(y-b)} \cdot \frac{d^m}{du^n \cdot dr^{n'}. \text{ecc.}} \left(\frac{d \left(\frac{d\Psi}{dx} \cdot \log. z \right)}{dy} \log. z' \right) \right\}}{1.2 \dots n. 1.2 \dots n'. \text{ecc.} 1^2. 2^2 \dots (m-1)^2 dx^{m-1}. dy^{m-1}}$$

Altri due termini si troveranno ponendo in questo $t-c$, e z'' prima in luogo di $y-b$, e z' , poi in luogo di $x-a$, e z . Finalmente l'ottavo termine farà

$$\frac{d^{3m-3} \left\{ \frac{d^m}{(x-a)(y-b)(t-c)} \cdot \frac{d^m}{du^n \cdot dr^{n'}. \text{ecc.}} \left(d \left\{ \frac{d \left(\frac{d\Psi}{dx} \log. z \right)}{dy} \log. z' \right\} \cdot \log. z'' \right) \right\}}{1.2 \dots n. 1.2 \dots n'. \text{ecc.} 1^2. 2^2 \dots (m-1)^3 dy^{m-1}. dt^{m-1}}$$

Convien però in queste formole fare $u=0$, $r=0$, ecc. $t=c$, $y=b$, $x=a$ dopo le differenziazioni relative ad u , r , ecc. t , y , x .

X V I I.

Sia per esempio $z=(x-a)A-uF$, $z'=(y-b)B-rf$, $z''=(t-c)C-s\phi$, ove A ed F siano funzioni di x sola, B ed f funzioni di y sola, C e ϕ funzioni di t sola, e sia proposto di svolgere la funzione Ψ delle variabili x , y , t , in una serie ordinata per le potenze ed i prodotti delle variabili u , r , s . Se chiamiamo q_n, n', n'' il coefficiente di $u^n \cdot r^{n'} \cdot s^{n''}$, avremo ragionando come sopra (XV)

$$\begin{aligned}
 & d^{n-1} \left(\frac{F^n}{A^n} \cdot \frac{d\Phi}{dx} \right) \\
 \text{quando } n' = n'' = 0, \text{ ed } n > 0, \\
 & q_{n,n',n''} = \frac{d^{n-1} \left(\frac{f^{n'}}{B^{n'}} \cdot \frac{d\Phi}{dy} \right)}{1.2 \dots n dx^{n-1}} \\
 \text{quando } n = n'' = 0, \text{ ed } n' > 0, \\
 & q_{n,n',n''} = \frac{d^{n'-1} \left(\frac{\Phi^{n''}}{C^{n''}} \cdot \frac{d\Phi}{dt} \right)}{1.2 \dots n' dy^{n'-1}} \\
 \text{quando } n = n' = 0, \text{ ed } n'' > 0, \\
 & q_{n,n',n''} = \frac{d^{n+n'-2} \left(\frac{F^n \cdot f^{n'}}{A^n \cdot B^{n'}} \cdot \frac{d^2 \Phi}{dx dy} \right)}{1.2 \dots n dx^{n-1} \cdot 1.2 \dots n' dy^{n'-1}} \\
 \text{quando } n'' = 0, \text{ ed } n > 0, n' > 0 \\
 & q_{n,n',n''} = \frac{d^{n+n''-2} \left(\frac{F^n \cdot \Phi^{n''}}{A^n \cdot C^{n''}} \cdot \frac{d^2 \Phi}{dx dt} \right)}{1.2 \dots n dx^{n-1} \cdot 1.2 \dots n' dt^{n''-1}} \\
 \text{quando } n' = 0, \text{ ed } n > 0, n'' > 0, \\
 & q_{n,n',n''} = \frac{d^{n'+n''-2} \left(\frac{f^{n'} \cdot \Phi^{n''}}{B^{n'} \cdot C^{n''}} \cdot \frac{d^2 \Phi}{dy dt} \right)}{1.2 \dots n' dy^{n'-1} \cdot 1.2 \dots n'' dt^{n''-1}} \\
 \text{quando } n = 0, \text{ ed } n' > 0, n'' > 0; \text{ e finalmente} \\
 & q_{n,n',n''} = \frac{d^{n+n'+n''-3} \left(\frac{F^n \cdot f^{n'} \cdot \Phi^{n''}}{A^n \cdot B^{n'} \cdot C^{n''}} \cdot \frac{d^3 \Phi}{dx dy dt} \right)}{1.2 \dots n dx^{n-1} \cdot 1.2 \dots n' dy^{n'-1} \cdot 1.2 \dots n'' dt^{n''-1}}
 \end{aligned}$$

quando n, n', n'' sono > 0 . In questi valori di $q_{n,n',n''}$ conviene però fare $t=c, y=b, x=a$ dopo le differenziazioni relative a t, y, x .

X V I I I.

Se paragoniamo tra loro i valori di $q_{n,n',\text{ecc.}}$ che abbia-

mo ne' diversi casi ritrovati (X), (XIV), (XVI), vedremo facilmente la legge che regna in essi: onde qualunque sia il numero dell' equazioni $z=0$, $z'=0$, ecc. potremo sempre svolgere in serie la funzione Ψ , ed in qualunque caso troveremo quella formola composta di replicate differenziazioni che esprima il valore di $q_{n,n'}$, ecc. Questa formola è

già assai complicata, quando il numero dell' equazioni è tre: se questo numero fosse maggiore, quantunque per quel che abbiamo insegnato si possa facilmente trovare il valore di $q_{n,n'}$, ecc. questo valore però sarà estremamente involuto in modo che non se ne potrà fare alcun uso. Ma attesa la generalità de' problemi sembra che queste formole non possano essere meno complicate. Forse potranno ridursi in una forma più contratta diminuendone il numero de' termini; ma non essendomi in ciò niente riescito che mi abbia soddisfatto, porrò qui fine a queste ricerche.

X I X.

Mi resta ad avvertire, che quantunque le nostre serie siano ordinate per le variabili y , t , u , ecc. si potrà nondimeno col medesimo metodo avere serie ordinate per qualunque funzione delle medesime variabili. Siano infatti queste funzioni P , Q , R , ecc. facciamo $P=p$, $Q=q$, $R=r$, ecc. e ne dedurremo i valori di y , t , u , ecc. per p , q , r , ecc. Sostituiamo questi valori in z , z' , ecc. ed in Ψ , e col nostro metodo troveremo Ψ espressa da una serie ordinata per p , q , r , ecc. cioè per P , Q , R , ecc. come si richiedeva.



SULL' EQUAZIONI

A DIFFERENZE FINITE

Del medesimo

L'Equazioni a differenze finite presentano spesso per la loro integrazione maggiori difficoltà di quelle, che si incontrano nella integrazione dell'equazioni differenziali. In queste essendo la differenza dx infinitamente piccola, e potendosi sempre assumere costante, queste due condizioni facilitano le operazioni che la loro integrazione richiede. In quelle la differenza di x può essere o costante o variabile; nel primo caso le difficoltà della loro integrazione si riducono a quelle dell'equazioni differenziali; ma nel secondo caso la variabilità della differenza potendo esser qualunque, ed estendendosi alle differenze seconde ed ulteriori, si rende oltremodo malagevole l'integrazione di quest'equazioni, pressa generalmente e spesso quell'equazione, che in un dato sistema di differenza variabile può integrarsi, la medesima si rende affatto intrattabile, se si muta la legge della differenza. Ma siccome tra le differenze variabili e le costanti vi è un certo rapporto, mediante il quale quelle per queste esprimersi si possono; pare che vi debba essere un metodo generale, per cui qualunque sia la differenza variabile, l'integrazione dell'equazioni affette da questa differenza ridursi possa all'integrazione di equazioni a differenze costanti. Con questo metodo ci potremo dispensare dal fare ulteriori ricerche nelle molteplici specie dell'equazioni a differenze variabili, e tutto si ridurrà all'integrazione di equazioni a differenze costanti, le quali sono più trattabili. Ho altrove accennato un tal metodo, ma adesso mi propongo di esporne i principj con qualche estensione.

I.

Si abbia dunque un' equazione qualunque a differenze finite e variabili $M=0$ tra le variabili x ed y_x , e la differenza di x sia $\phi: x \rightarrow x$, ove col segno $\phi: x$ indico qualunque funzione di x . Si faccia $x=p_z$, e questa funzione p_z si determini in modo, che quando x varia di $\phi: x \rightarrow x$, la z nella funzione p_z varj dell' unità. Avremo dunque $\phi: x = p_{z+1}$, e siccome $\phi: x = \phi: p_z$, avremo l'equazione

$$p_{z+1} = \phi: p_z \quad (a)$$

L'integrale di questa equazione ci darà il valore di $p_z = x$, onde poi potremo dedurre il valore di z per x . Facendo $x=p_z$ in M , y_x diventerà y_{p_z} che chiameremo t_z , e supponendo che dopo questa sostituzione M diventi M' , avremo l'equazione $M'=0$ tra le variabili z e t_z , ove la differenza di z è costante $=1$. Sia $t_z = \phi$ l'integrale completo di questa equazione, ed avremo per l'integrale della proposta $y_x = P$, se in P si porrà in luogo di z il suo valore dato per x .

I I.

Di qualunque ordine sia l'equazione $M=0$, l'integrale $t_z = P$ contiene tutte le costanti necessarie per ottenere un valore completo di y_x : quindi non farà d'uopo che trovare un integrale particolare dell'equazione (a), oppure avendone trovato l'integrale completo si potrà determinare la costante arbitraria in modo che il valore di y_x riesca il più semplice e il più comodo per l'uso che se ne vuol fare.

III.

I I I.

Per maggior schiarimento supponghiamo che l' equazione $M=0$ sia lineare , cioè della forma

$$Ay_x + By'_x + Cy''_x \dots\dots + My^{(n)}_x = X$$

ove sieno $A, B, C \dots M$, ed X funzioni di x , ed $y'_x = y_x + \Delta y_x$, $y''_x = y'_x + \Delta y'_x$, ecc. essendo come sopra $\Delta x = \phi : x - x$. Se A_1, B_1 , ecc. X_1 sono i valori di A, B , ecc. X , quando in luogo di x vi si pone p_z , l'equazione $M=0$ sarà della forma

$$A_1 t_z + B_1 t_{z+1} + C_1 t_{z+2} \dots\dots + N_1 t_{z+n} = X_1.$$

Adeffo trovato $t_z = P$ si avrà $y_x = P$ sostituendo in P, x in luogo di p_z . Si osservi che mediante questa sostituzione le quantità $A_1, B_1, C_1, \dots X_1$ ritorneranno ad essere $A, B, C, \dots X$. Quindi non occorrerà fare alcuna sostituzione in A, B , ecc. purchè si osservi nel decorso dell' integrazione di non fare intorno a queste quantità alcuna operazione, la quale potesse mescolarle con altre quantità che porta l' integrazione. Poi nella quantità P si troveranno intatte queste quantità, e la sostituzione del valore di z dovrà farsi nelle quantità che ha portate l' integrazione. Le operazioni per altro sulle quantità A, B, C , ecc. come farebbe la differenza o la somma dovranno farsi secondo il sistema di differenza variabile che regna nella proposta. Ecco dunque a qual cosa si riduce il nostro metodo. S' integri la proposta, come se la differenza di x fosse $= 1$, avvertendo di non eseguire ma accennare le operazioni sulle quantità A, B, C , ecc. Poi lasciando intatte le quantità A, B, C , ecc. si ponga da per tutto in luogo di x il valore di z ricavato dall' equazione $x = p_z$, essendo p_z tale che abbia luogo l' equazione $p_{z+1} = \phi : p_z$.

I V.

Si abbia l'equazione lineare di prim'ordine

$$Ay_x + By'_x = X$$

essendo in esso $\Delta x = \phi : x - x$. S'integri come se la differenza di x fosse uguale all'unità, e l'integrale sarà com'è noto

$$y_x = e^{\Sigma \log. - \frac{A}{B}} \left(C - \Sigma e^{-\Sigma \log. - \frac{A}{B}} \cdot \frac{X}{A} \right);$$

e questo medesimo sarà l'integrale della proposta, se invece di x vi si sostituirà il suo valore, o sia se le integrazioni si faranno nella ipotesi di $\Delta x = \phi : x - x$. Infatti si abbia l'integrale $\Sigma M = P_x$ quando $\Delta x = 1$, e ponendo in P_x il valore di x , P_x diventi $\mathcal{Q}_x$; sarà $\mathcal{Q}_x$ l'integrale di M quando $\Delta x = \phi : x - x$. Poichè $P_{x+1} - P_x = M$; ma P_x fatta la sostituzione è $= \mathcal{Q}_x$, $P_{x+1} = \mathcal{Q}_{\phi x}$: dunque $\mathcal{Q}_{\phi x} - \mathcal{Q}_x = M$, cioè $\mathcal{Q}_x$ è l'integrale di M nell'ipotesi di $\Delta x = \phi : x - x$.

V.

Nell'esempio addotto fortunatamente abbiamo potuto far di meno della sostituzione, che dipende dall'integrazione dell'equazione $p_{z+1} = \phi : p_z$. Ma negli altri casi converrà avere un integrale particolare di questa equazione, lo che sembra superare le forze dell'analisi, se ϕ si prende nella sua generalità. Contuttociò in molti casi particolari potrà quell'equazione integrarsi, come ne andremo alcuni accennando.

1.° Sia $\phi : x = ax + b$, essendo a , b quantità costanti, ed avremo

$$p_{z+1} = ap_z + b$$

e facilmente si troverà $p_z = \frac{Ca^z - b}{a - 1} = \frac{a^z - b}{a - 1}$ facendo $C = 1$.

Sarà dunque $x = p_z = \frac{a^z - b}{a - 1}$, e $z = \frac{\log.(b + a - 1.x)}{\log. a}$.

II.° Sia $\phi : x = ax^m$, avremo

$$p_{z+1} = ap^m_z$$

Per integrar questa equazione facciamo $p_z = a^{q_z}$, ed avremo $a^{q_{z+1}} = a^{mq_z + 1}$, e prendendo i logaritmi $q_{z+1} = mq_z + 1$,

e $q_z = \frac{Cm^z - 1}{m - 1}$, quindi $p_z = a^{\frac{Cm^z - 1}{m - 1}} = x$, e prendendo

di nuovo i logaritmi $z = \frac{\log. \left(\frac{1}{C} + \frac{m - 1. \log. x}{C \log. a} \right)}{\log. m}$, e più

semplicemente $z = \frac{\log. (\log. a + m - 1. \log. x)}{\log. m} = \frac{\log. \log. ax^{m-1}}{\log. m}$.

III.° Sia $\phi : x = \sqrt[m]{a + bx^m}$, avremo l'equazione

$$p_{z+1} = \sqrt[m]{a + bp^m_z}$$

e quindi $p^m_{z+1} = a + bp^m_z$, e facendo $p^m_z = q_z$, q_{z+1}

$= a + bq_z$, e $q_z = \frac{b^z - a}{b - 1}$, $p_z = x = \sqrt[m]{\frac{b^z - a}{b - 1}}$, e quindi

$x^m (b - 1) + a = b^z$, e prendendo i logaritmi

$$z = \frac{\log. (x^m.b - 1 + a)}{\log. b}.$$

IV.° Sia $\phi : x = x^2 - 2$, ed avremo

$$p_{z+1} = p^2_z - 2$$

Facciamo $p_z = q_z + \frac{1}{q_z}$, ed avremo $q_{z+1} + \frac{1}{q_{z+1}} = q^2_z$

$+ \frac{1}{q^2 z}$, cioè $q_{z+1} = q^2 z$. Sia $q_z = e^{r_z}$, essendo e il numero ch'è ha per logaritmo iperbolico l' unità, ed avremo $r_{z+1} = 2r_z$, ed $r_z = C2^z$: quindi $q_z = e^{C2^z}$, e $p_z = e^{C2^z} + e^{-C2^z} = 2 \cos. 2^z$ facendo $C = 1$; e perciò $2^z =$

$$\frac{\log. \text{Arc. del cos. } \frac{x}{2}}{\log. 2}.$$

Ar. del cos. $\frac{x}{2}$, e $z =$

V.° Sia $\phi : x = x^3 - 3x$, avremo l' equazione

$$p_{z+1} = p^3 z - 3p_z$$

e facendo $p_z = q_z + \frac{1}{q_z}$, $q_{z+1} + \frac{1}{q_{z+1}} = q^3 z + \frac{1}{q^3 z}$,

cioè $q_{z+1} = q^3 z$, e $q_z = e^{C3^z} p_z = x = e^{C3^z} + e^{-C3^z}$.

VI.° Ma cerchiamo in generale qual esser debba la funzione $\phi : x$, perchè mediante la sostituzione $p_z = q_z + \frac{1}{q_z}$

l' equazione $p_{z+1} = \phi \cdot p_z$ diventi $q_{z+1} = q^n z$, o sia

$$q_{z+1} + \frac{1}{q_{z+1}} = q^n z + \frac{1}{q^n z}. \text{ Facciamo}$$

$$\left(q_z + \frac{1}{q_z}\right)^n = q_z^n + \frac{1}{q_z^n} + A\left(q_z + \frac{1}{q_z}\right)^{n-2}$$

$$+ B\left(q_z + \frac{1}{q_z}\right)^{n-4} + C\left(q_z + \frac{1}{q_z}\right)^{n-6} + \text{ecc.}$$

e supponendo che quando n diventa $n+1$, A , B , ecc. diventino A' , B' , ecc. avremo

$$\left(q_z + \frac{1}{q_z}\right)^{n+1} = q_z^{n+1} + \frac{1}{q_z^{n+1}} + A' \left(q_z + \frac{1}{q_z}\right)^{n-1}$$

$$+ B' \left(q_z + \frac{1}{q_z}\right)^{n-3} + C \left(q_z + \frac{1}{q_z}\right)^{n-5} + \text{ecc.}$$

Ma $\left(q_z + \frac{1}{q_z}\right)^{n+1} = \left(q_z + \frac{1}{q_z}\right)^n \left(q_z + \frac{1}{q_z}\right)$, cioè

$$\left(q_z + \frac{1}{q_z}\right)^{n+1} = q_z^{n+1} + \frac{1}{q_z^{n+1}} + q_z^{n-1} + \frac{1}{q_z^{n-1}} +$$

$$A \left(q_z + \frac{1}{q_z}\right)^{n-1} + B \left(q_z + \frac{1}{q_z}\right)^{n-3} + C \left(q_z + \frac{1}{q_z}\right)^{n-5} + \text{ecc.}$$

$$= q_z^{n+1} + \frac{1}{q_z^{n+1}} + A \left(q_z + \frac{1}{q_z}\right)^{n-1} + B \left(q_z + \frac{1}{q_z}\right)^{n-3} +$$

$$C \left(q_z + \frac{1}{q_z}\right)^{n-5} + \text{ecc.}$$

$$+ \left(q_z + \frac{1}{q_z}\right)^{n-1} - A \left(q_z + \frac{1}{q_z}\right)^{n-3} - B \left(q_z + \frac{1}{q_z}\right)^{n-5} - \text{ecc.}$$

essendo A' , B' , ecc. i valori di A , B , ecc. quando n diventa $n-1$. Paragonando adunque i due valori di $\left(q_z + \frac{1}{q_z}\right)^{n+1}$

avremo $A' - A = 1$, $B' - B = -A$, $C' - C = -B$, ecc. cioè

$$A = \Sigma 1 = n + \text{cost.}, B = -\Sigma A = -\Sigma(n-1 + C) = -\frac{n(n-3)}{2} - C'n - C'',$$

$$C = \frac{n(n-4)(n-5)}{2 \cdot 3} + C'n^2 + C''n + C''', \text{ ecc. Le costanti } C', C'', C''', \text{ ecc. si troveranno tutte uguali a zero, se}$$

si riflette che il termine medio della potenza $\left(q_z + \frac{1}{q_z}\right)^n$

$\bar{c} = 2$ quando $n = 2$, $\bar{c} = 6$ quando $n = 4$, $\bar{c} = 20$ quando $n = 6$, ecc. Quindi avremo $A = n$, $B = -\frac{n(n-3)}{2}$,

$$C = \frac{n(n-4)(n-5)}{2 \cdot 3}, D = \frac{n(n-5)(n-6)(n-7)}{2 \cdot 3 \cdot 4}, \text{ ecc. e perciò}$$

l'equazione

$$q_{z+1} + \frac{1}{q_{z+1}} = q_z^n + \frac{1}{q_z^n} \text{ ci darà, ponendo } q_z + \frac{1}{q_z} = p_z,$$

$$p_{z+1} = p_z^n - n p_z^{n-2} + \frac{n(n-3)}{2} p_z^{n-4} + \frac{n(n-4)(n-5)}{2 \cdot 3} p_z^{n-6} - \text{ecc}$$

e l'integrale di questa equazione sarà

$$p_z = x = e^{Cn^z} + e^{-Cn^z} = 2 \cos. Cn^z.$$

V I.

Abbiamo scorsi alcuni casi tra molti altri, che potrebbero riferirsi, ne' quali può integrarsi l'equazione $p_{z+1} = \phi: p_z$.

Ma potremo anche far di meno di questa integrazione per ritrovare il valore di z che deve sostituirsi in luogo di x .

In fatti se $x = p_z$, viceversa sarà $z = q_x$, essendo q_x una funzione di x , e siccome $\phi: x = p_{z+1}$, avremo $z+1 = q_{\phi: x}$,

e quindi $1 = q_{\phi: x} - q_x$, cioè $q_x = z = \Sigma 1$ prendendo questa somma nel sistema della differenza variabile proposta.

Fatta dunque l'integrazione dell'equazione data, come se la differenza di x fosse l'unità, convien dopo sostituire nell'integrale $\Sigma 1$ in luogo di x , avendo però riguardo alle altre avvertenze di sopra (III) accennate.

V I I.

Ed ecco che abbiamo pienamente dimostrato che l'integrazione dell'equazioni a differenze variabili ridur si può a quella dell'equazioni a differenze costanti. Nè fa difficoltà

L'introduzione della quantità $\Sigma 1$, la quale non può in generale assegnarsi; poichè l'integrazione delle funzioni di una sola variabile si suppone data, quando si tratta dell'integrazione dell'equazioni. La somma dell'unità può invero assegnarsi in molti casi, cioè in tutti quelli, ne' quali si fa integrare l'equazione $p_{z+1} = \phi : p_z$. Si potrà in qualche caso trovare anche direttamente questa somma, come per darne un esempio nel caso che la differenza di x sia ax , essendo a quantità costante. Avremo in questo caso $\frac{x}{a} + \text{cost.}$

$$= \Sigma x, \frac{x^2}{(a+1)^2-1} + \text{cost.} = \Sigma x^2, \text{ e in generale } \frac{x^n}{(a+1)^n-1} + \text{cost.}$$

$= \Sigma x^n$. Facciamo n infinitamente piccola, ed avremo

$$\Sigma 1 = \frac{1+n \log. x}{n \log. (a+1)} + \text{cost.}, \text{ e ponendo la costante } = -\frac{1}{n \log. (a+1)},$$

$$\Sigma 1 = \frac{\log. x}{\log. (a+1)}. \text{ Indirettamente, supponendo data la somma}$$

dell'unità, si potrà sempre trovare la differenza variabile che gli conviene. In fatti essendo $\Sigma 1 = f : x$, farà $1 = f : (x + \Delta x) - f : x$, dalla qual equazione si potrà ricavare il valore di Δx . Sia per esempio $\Sigma 1 = ax^m$, farà $1 = a(x + \Delta x)^m - ax^m$, e quindi

$$x + \Delta x = \left(\frac{1 + ax^m}{a} \right)^{\frac{1}{m}}, \text{ e } \Delta x = \left(\frac{1 + ax^m}{a} \right)^{\frac{1}{m}} - x.$$

Sia ancora

$$\Sigma 1 = a^x, \text{ farà } 1 = a^x (a^{\Delta x} - 1); \text{ e quindi } \Delta x = \frac{\log. (1 + a^{-x})}{\log. a}.$$

V I I I.

Ma lasciando da parte queste ricerche particolari, per illustrar maggiormente la nostra riduzione delle differenze variabili alle differenze costanti, prendiamo ad integrar direttamente l'equazione lineare di qualunque ordine a coefficienti costanti e a differenze in qualunque modo variabili: tanto più che questa integrazione contiene alcuni artifizj, i quali

potranno esser utili in altre occasioni. Sia pertanto proposto d' integrare l' equazione

$$Ay + By' + Cy'' + Dy''' \dots + My^{(m)} = X$$

essendo $A, B, \dots M$ quantità costanti, X funzioni di x , $y' = y + \Delta y$, $y'' = y' + \Delta y'$, ecc. e la differenza di x variabile secondo qualunque legge. Supponghiamo che questa equazione divenga integrabile moltiplicata per $a^{\Sigma P}$, ove a è costante, P funzione di x , e ΣP l' integrale finito di P preso nel sistema di differenza variabile che regna nella proposta; e il di lei integrale sia

$$a^{\Sigma P} (A_1 y + B_1 y' + C_1 y'' \dots + L_1 y^{(m-1)}) = \Sigma a^{\Sigma P} . X$$

Avremo prendendo la differenza

$$a^P (A_1 y' + B_1 y'' + C_1 y''' \dots + L_1 y^{(m)}) = X \\ - A_1 y - B_1 y' - C_1 y'' \dots - L_1 y^{(m-1)}$$

e paragonando questa equazione con la proposta troveremo

$$A_1 = -A \quad \text{e} \quad M = L_1 a^P$$

$$B = A_1 a^P - B_1$$

$$C = B_1 a^P - C_1$$

ecc.

cioè

$$A_1 = -A$$

$$B_1 = -B - A a^P$$

$$C_1 = -C - B a^P - A a^2 P$$

⋮

⋮

$$L_1 = -L - I a^P - H a^2 P \dots - A a^{(m-1)P}$$

onde, siccome $M = L_1 a^P$, avremo l' equazione

$$M + L a^P + H a^2 P \dots + B a^{(m-1)P} + A a^{mP} = 0.$$

Ora essendo i coefficienti di questa equazione costanti, sarà costante a^P , ed in conseguenza P . Facciamo dunque $P = 1$, e per determinare a avremo l' equazione

$$M +$$

$$M + La + Ha^2 \dots + Ba^{m-1} + Aa^m = 0. \quad (P)$$

Questa equazione ci darà il valore di a , trovato il quale avremo

$$A_1 = -A$$

$$B_1 = -B - Aa$$

$$C_1 = -C - Ba - Aa^2$$

$$\vdots$$

$$\vdots$$

$$L_1 = -L - La - Ha^2 \dots - Aa^{m-1}$$

I valori di A_1 , B_1 , ecc. si possono anche esprimere nel modo seguente:

$$A_1 = \frac{B}{a} + \frac{C}{a^2} + \frac{D}{a^3} \dots + \frac{M}{a^m}$$

$$B_1 = \frac{C}{a} + \frac{D}{a^2} + \frac{E}{a^3} \dots + \frac{M}{a^{m-1}}$$

$$C_1 = \frac{D}{a} + \dots + \frac{M}{a^{m-2}}$$

$$\vdots$$

$$\bullet$$

$$L_1 = \frac{M}{a}$$

Trovati questi valori l'integrale della proposta sarà

$$a^{-\Sigma 1} \cdot \Sigma a^{\Sigma 1} \cdot X = A_1 y + B_1 y' + C_1 y'' \dots + L_1 y^{(m-1)}.$$

Ma l'equazione (P) ha m radici, le quali possono tutte ugualmente prenderli per a ; dunque chiamando queste radici a , a_1 , a_2 , ecc. e supponendo che A_1 si muti in A_2 ; A_3 , ecc. quando a si cangia in a_1 , a_2 , ecc. e così degli altri coefficienti B_1 , C_1 , ecc. avremo le m equazioni seguenti

$$a^{-\Sigma^1} \cdot \Sigma a^{\Sigma^1} \cdot X = A_1 y + B_1 y' + C_1 y'' \dots + L_1 y^{(m-1)}$$

$$a_1^{-\Sigma^1} \cdot \Sigma a_1^{\Sigma^1} \cdot X = A_2 y + B_2 y' + C_2 y'' \dots + L_2 y^{(m-1)}$$

$$a_2^{-\Sigma^1} \cdot \Sigma a_2^{\Sigma^1} \cdot X = A_3 y + B_3 y' + C_3 y'' \dots + L_3 y^{(m-1)}$$

ecc.

Mediante quest' equazioni si potranno eliminare le quantità $y', y'', \dots y^{(m-1)}$, e si otterrà il valore di y . Ma senza eseguire questa eliminazione, che farebbe per lo più involta di molte difficoltà, si osservi che essa ci darebbe il valore di y così espresso:

$$y = \frac{a^{-\Sigma^1} \cdot \Sigma a^{\Sigma^1} \cdot X}{n} + \frac{a_1^{-\Sigma^1} \cdot \Sigma a_1^{\Sigma^1} \cdot X}{n'} + \frac{a_2^{-\Sigma^1} \cdot \Sigma a_2^{\Sigma^1} \cdot X}{n''} + \text{ecc.}$$

essendo $n, n', \text{ecc.}$ quantità costanti. Per determinarle, si sostituisca il valore di y nella prima delle precedenti equazioni, e si avrà

$$\begin{aligned} a^{-\Sigma^1} \cdot \Sigma a^{\Sigma^1} \cdot X &= a^{-\Sigma^1} \cdot \Sigma a^{\Sigma^1} \cdot X \left(\frac{A_1}{n} + \frac{B_1}{na} + \frac{C_1}{na^2} + \frac{D_1}{na^3} + \text{ecc.} \right) \\ &+ \frac{B_1 X}{na} + \frac{C_1}{n} \left(\frac{X}{a^2} + \frac{X'}{a} \right) + \frac{D_1}{n} \left(\frac{X}{a^3} + \frac{X'}{a^2} + \frac{X''}{a} \right) + \text{ecc.} \\ &+ a_1^{-\Sigma^1} \cdot \Sigma a_1^{\Sigma^1} \cdot X \left(\frac{A_1}{n'} + \frac{B_1}{n'a_1} + \frac{C_1}{n'a_1^2} + \frac{D_1}{n'a_1^3} + \text{ecc.} \right) \\ &+ \frac{B_1 X}{n'a_1} + \frac{C_1}{n'} \left(\frac{X}{a_1^2} + \frac{X'}{a_1} \right) + \frac{D_1}{n'} \left(\frac{X}{a_1^3} + \frac{X'}{a_1^2} + \frac{X''}{a_1} \right) + \text{ecc.} \\ &+ \text{ecc.} \end{aligned}$$

Siccome questa equazione dev' essere identica, convien che sia

$$\frac{A_1}{n} + \frac{B_1}{na} + \frac{C_1}{na^2} + \frac{D_1}{na^3} + \text{ecc.} = 1$$

e tutti gli altri termini devono da loro stessi svanire. Sarà dunque $n = A_1 + \frac{B_1}{a} + \frac{C_1}{a^2} + \frac{D_1}{a^3} + \text{ecc.}$ e sostituendovi i valori di $A_1, B_1, \text{ecc.}$

$$n = \frac{B}{a} + \frac{2C}{a^2} + \frac{3D}{a^3} \dots + \frac{mM}{a^m}.$$

Questo valore di n non è che il differenziale della quantità $A + \frac{B}{a} + \frac{C}{a^2} \dots + \frac{M}{a^m}$ preso per rapporto ad a , e mol-

tiplicata per $-\frac{a}{da}$. I valori di n' , n'' , ecc. si troveranno riflettendo che n si muta in n' , n'' , ecc. quando a diventa a_1 , a_2 , ecc. Dunque se facciamo

$$P = A + Bz + Cz^2 + Dz^3 \dots + Mz^m$$

avremo

$$n = z \frac{dP}{dz} \text{ facendovi } z = \frac{1}{a}$$

$$n' = z \frac{dP}{dz} \text{ facendovi } z = \frac{1}{a_1}$$

$$n'' = z \frac{dP}{dz} \text{ facendovi } z = \frac{1}{a_2}$$

ecc.

Ora la quantità P è $= A(1 - az)(1 - a_1z)(1 - a_2z) \dots (1 - a(m-1)z)$; quindi farà

$$n = -A \left(1 - \frac{a_1}{a}\right) \left(1 - \frac{a_2}{a}\right) \left(1 - \frac{a_3}{a}\right) \dots \left(1 - \frac{a(m-1)}{a}\right)$$

$$n' = -A \left(1 - \frac{a}{a_1}\right) \left(1 - \frac{a_2}{a_1}\right) \left(1 - \frac{a_3}{a_1}\right) \dots \left(1 - \frac{a(m-1)}{a_1}\right)$$

$$n'' = -A \left(1 - \frac{a}{a_2}\right) \left(1 - \frac{a_1}{a_2}\right) \left(1 - \frac{a_3}{a_2}\right) \dots \left(1 - \frac{a(m-1)}{a_2}\right)$$

ecc.

Posti questi valori, l'integrale finito della proposta farà

$$y = \frac{a^{-\Sigma_1}(C + \Sigma a^{\Sigma_1}.X)}{n} + \frac{a_1^{-\Sigma_1}(C' + \Sigma a_1^{\Sigma_1}.X)}{n'} + \frac{a_2^{-\Sigma_1}(C'' + \Sigma a_2^{\Sigma_1}.X)}{n''} + \text{ecc.}$$

ove C , C' , ecc. sono m costanti arbitrarie.

X.

Sia $\Delta x = 1$, farà $\Sigma_1 = x$, e quindi

$$y = \frac{a^{-x}(C + \Sigma a^x.X)}{n} + \frac{a_1^{-x}(C' + \Sigma a_1^x.X)}{n'} + \frac{a_2^{-x}(C'' + \Sigma a_2^x.X)}{n''} + \text{ecc.}$$

essendo n , n' , ecc. come sopra. Questo integrale si cangia in quello di sopra ritrovato ponendovi Σ_1 invece di x , come doveva succedere per ciò che abbiamo precedentemente dimostrato (VI).

N n n ij

X.

Riguardo all'equazioni lineari a coefficienti variabili, non sappiamo integrarle al di là del primo grado. Solo è noto, che se l'integrale della proposta si conosce quando $X=0$, se ne potrà dedurre l'integrale quando X è una funzione qualunque di x (a). Non farà dunque affatto inutile l'accennare alcune equazioni, l'integrazione delle quali dalle cose esposte dipende. Si abbia pertanto l'equazione dell'ordine m a differenze finite e variabili

$$y - \alpha_x \cdot y^{(m)} = 0$$

Ponghiamo $y = e^{-\Sigma P}$, essendo e il numero che ha per logaritmo iperbolico l'unità, e l'equazione diventerà

$$e^{-\Sigma P} - \alpha_x \cdot e^{-\Sigma P - P - P' - P'' \dots - P^{(m-1)}} = 0$$

e prendendo i logaritmi avremo

$$P + P' + P'' \dots + P^{(m-1)} = \log. \alpha_x.$$

In questa equazione i coefficienti sono costanti; quindi integrandola per quel che abbiamo insegnato di sopra (VIII) avremo il valore di P , e quindi l'integrale della proposta

$$y = e^{-\Sigma P}.$$

X I.

Nel caso di $m=1$ avremo $P = \log. \alpha_x$, e quindi

$$y = e^{-\Sigma \log. \alpha_x} \text{ com' è noto. Se } m=2, \text{ avremo l'equazione}$$

$$P + P' = \log. \alpha_x, \text{ e perciò } P = -(-1)^{-\Sigma 1} (C + \Sigma (-1)^{\Sigma 1} \log. \alpha_x),$$

$$\text{e } y = C e^{\Sigma (-1)^{-\Sigma 1} (C' + \Sigma (-1)^{\Sigma 1} \log. \alpha_x)}, \text{ e nel caso di } \Delta x = 1$$

(a) Si veda una Memoria del Sig. Cav. *Lorgna* sul Calcolo Integrale del-

le differenze finite pubblicata nel primo Tomo di questa Società.

$y = Ce^{\Sigma(-1)^{-x} \cdot (C' + \Sigma(-1)^x \cdot \log. \alpha x)}$. Questo integrale potremo esprimerlo in una maniera molto più comoda: cerchiamo a quest'oggetto un valore particolare di y . E' noto che

$$\Sigma(-1)^x \cdot \log. \alpha_x = (-1)^{x-1} \cdot \log. \alpha_{x-1} + (-1)^{x-2} \cdot \log. \alpha_{x-2} \\ + (-1)^{x-3} \cdot \log. \alpha_{x-3} \dots + (-1) \log. \alpha.$$

Quindi farà

$$(-1)^{-x} \cdot \Sigma(-1)^x \cdot \log. \alpha_x = -\log. \alpha_{x-1} + \log. \alpha_{x-2} - \log. \alpha_{x-3} \dots \mp \log. \alpha,$$

ove il segno $\mp$ avrà luogo secondo che x è pari o dispari; e prendendo la somma di questa quantità avremo

$$\Sigma(-1)^{-x} \cdot \Sigma(-1)^x \cdot \log. \alpha_x = -\log. \alpha_{x-2} - \log. \alpha_{x-3} - \log. \alpha_{x-4} - \log. \alpha_{x-5} - \text{ecc.} \\ + \log. \alpha_{x-3} + \log. \alpha_{x-4} + \log. \alpha_{x-5} + \text{ecc.} \\ \dots - \log. \alpha_{x-4} - \log. \alpha_{x-5} - \text{ecc.} \\ + \log. \alpha_{x-5} + \text{ecc.}$$

$$\text{cioè} = -\log. \alpha_{x-2} - \log. \alpha_{x-4} - \log. \alpha_{x-6} - \text{ecc.}$$

$$= -\log. \alpha_{x-2} \cdot \alpha_{x-4} \cdot \alpha_{x-6} \cdot \text{ecc.}$$

ove l'ultimo fattore farà α_2 se x è pari, ed α_1 , se x è dispari. Dunque se indichiamo col segno $\nabla^2 \cdot \alpha_{x-2}$ il prodotto $\alpha_{x-2} \cdot \alpha_{x-4} \cdot \alpha_{x-6} \cdot \text{ecc.}$ continuato finchè non si abbiano fattori coll'indice zero o negativo, avremo

$$y = e^{-\log. \nabla^2 \cdot \alpha_{x-2}} = \frac{1}{\nabla^2 \alpha_{x-2}}. \text{ Questo non è che un integrale}$$

particolare della proposta: per aver l'integrale completo si faccia $y = \frac{z}{\nabla^2 x_{x-2}}$, e la proposta diventerà $z - z'' = 0$, e

questa avendo per integrale $z = C + C'(-1)^x$, farà

$y = \frac{1}{\nabla^2 \alpha^{x-2}} (C + C'(-1)^x)$ l' integrale completo della proposta

X I I.

Generalmente nella ipotesi di $\Delta x = 1$ se facciamo $\Delta^m \alpha^x = \alpha^x \cdot \alpha^{x-m} \cdot \alpha^{x-2m} \cdot \alpha^{x-3m} \cdot \text{ecc.}$ continuando questo prodotto fino al fattore α^{x-nm} , ove $x-nm$ è tale che ponendo $n+1$ in luogo di n , diventi $x-(n+1)m$ zero o negativo, farà $y = \frac{1}{\Delta^m \alpha^{x-m}}$ un integrale particolare dell' equazione $y - \alpha^x \cdot y^{(m)} = 0$. Per rintracciare l' integrale completo ponghiamo $y = \frac{z}{\nabla^m \alpha^{x-m}}$, ed avremo l' equazione

$z - z^{(m)} = 0$. Questa ha per integrale $z = Cf^x + C'f_1^x + C''f_2^x \dots + C^{(m-1)}f^{(m-1)x}$ chiamando f, f_1, f_2 , ecc. le radici dell' equazione $1 - f^m = 0$. Quindi l' integrale completo della proposta farà

$$y = \frac{1}{\nabla^m \alpha^{x-m}} (Cf^x + C'f_1^x + C''f_2^x \dots + C^{(m-1)}f^{(m-1)x})$$

Ma le quantità f, f_1 , ecc. sono a due a due della forma $\cos. \phi \pm \sqrt{-1} \cdot \text{sen. } \phi$: dunque quella parte d' integrale che appartiene a queste radici farà $C(\cos. \phi + \sqrt{-1} \cdot \text{sen. } \phi)^x, C'(\cos. \phi - \sqrt{-1} \cdot \text{sen. } \phi)^x$. Ora $(\cos. \phi \pm \sqrt{-1} \cdot \text{sen. } \phi)^x = \cos. \phi x \pm \sqrt{-1} \cdot \text{sen. } \phi x$: onde mutando le costanti farà la parte d' integrale dovuta a queste radici così espressa; $C \cdot \cos. \phi x + C' \cdot \text{sen. } \phi x$. E' noto pel Teorema di *Cotes* che $\phi = \frac{i\pi}{m}$ ove π è la semiperiferia del cerchio che ha per raggio l' unità, i esprime qualunque numero pari non maggiore di m , quindi farà

$$y = \frac{1}{\nabla^m \alpha_{x-m}} \left\{ \begin{aligned} &C + C'(-1)^m + C'' \cos. \frac{2\pi x}{m} + C''' \text{sen.} \frac{2\pi x}{m} + C^{iv} \cos. \frac{4\pi x}{m} \\ &+ C^v \text{sen.} \frac{4\pi x}{m} \dots + C^{(m-2)} \cos. \frac{(m-2)\pi x}{m} + C^{(m-1)} \text{sen.} \frac{(m-2)\pi x}{m} \end{aligned} \right\}$$

se m è pari, e

$$y = \frac{1}{\nabla^m \alpha_{x-m}} \left\{ \begin{aligned} &C + C' \cos. \frac{2\pi x}{m} + C'' \text{sen.} \frac{2\pi x}{m} + C''' \cos. \frac{4\pi x}{m} + C^{iv} \text{sen.} \frac{4\pi x}{m} \\ &\dots \dots \dots + C^{(m-2)} \cos. \frac{(m-1)\pi x}{m} + C^{(m-1)} \text{sen.} \frac{(m-1)\pi x}{m} \end{aligned} \right\}$$

se m è dispari.

X I I I.

Sia proposto d'integrare l'equazione

$$A x_{\alpha} y + B x_{\alpha} \cdot \alpha'_{\alpha} y' + C \alpha_{\alpha} \cdot \alpha'_{\alpha} \cdot \alpha''_{\alpha} y'' \dots + M \alpha_{\alpha} \cdot \alpha'_{\alpha} \dots \alpha^{(n)}_{\alpha} y^{(n)} = X$$

ove A, B , ecc. sono quantità costanti, α_x ed X funzioni date di x , e la differenza di x comunque variabile. Ponghiamo $y = \frac{z}{t}$, ed avremo

$$A x_{\alpha} \cdot \frac{z}{t} + B x_{\alpha} \cdot \alpha'_{\alpha} \cdot \frac{z'}{t'} \dots + M \alpha_{\alpha} \cdot \alpha'_{\alpha} \dots \alpha^{(n)}_{\alpha} \cdot \frac{y^{(n)}}{t^{(n)}} = X \dots$$

Facciamo $\frac{\alpha_x}{t} = \frac{\alpha_{x'} \cdot \alpha'_x}{t'}$, cioè $t - \frac{t'}{\alpha'_x} = 0$, e sarà (II) $t = e^{\sum \log. \alpha'_x}$

Posto questo valore di t , l'equazione proposta diventerà

$$A z + B z' + C z'' \dots + M z^{(n)} = X e^{\sum \log. \alpha_x}$$

e integrando quest'equazione come abbiamo insegnato (VIII), ne dedurremo l'integrale completo della proposta così espresso

$$y = e^{-\sum \log. \alpha'_x} \left(\frac{a^{-\sum 1} (C + \sum e^{\sum \log. \alpha_x} \cdot X)}{n} + \frac{a_1^{-\sum 1}}{1} \right)$$

essendo le quantità a, a_1 , ecc. n, n' , ecc. come sopra

$$\Delta x = 1, \text{ farà } e^{-\sum \log. \alpha'_x} = \frac{1}{\nabla \alpha_x} = \frac{1}{\alpha_x \cdot \alpha_{x-1} \cdot \alpha_{x-2} \dots \alpha_x}$$

e in questo caso la proposta è stata integrata dal Sig. *de la Place* nel Tomo settimo delle Memorie presentate all' Accademia delle Scienze di Parigi.

X I V.

Più generalmente sia data l'equazione

$$A x y + B \alpha \cdot x^{(m)} \cdot y^{(m)} + C \alpha \cdot x^{(m)} \cdot x^{(2m)} \cdot y^{(2m)} \dots + M \alpha \dots \alpha^{(nm)} y^{(nm)} = X.$$

Facciamo per integrarla $y = \frac{z}{t}$ essendo t tale che abbia luogo

l'equazione $t - \frac{t^{(m)}}{\alpha^{(m)}} = 0$, della qual'equazione si potrà avere un integrale particolare (X). Mediante questa sostituzione la proposta diventerà

$$Az + Bz^{(m)} + Cz^{(2m)} \dots + Mz^{(nm)} = \frac{Xt}{\alpha}.$$

Quindi chiamando a , a_1 , ecc. le radici dell'equazione

$$A + Bz^m + Cz^{2m} \dots + Mz^{nm} = 0 = P$$

avremo l'integrale della proposta così espresso:

$$y = \frac{1}{t} \left\{ \frac{a^{\Sigma 1} (C + \Sigma a^{-\Sigma 1} \cdot \frac{Xt}{\alpha})}{n} + \frac{a_1^{\Sigma 1} (C' + \Sigma a_1^{-\Sigma 1} \cdot \frac{Xt}{\alpha})}{n'} + \text{ecc.} \right\}$$

ove $n = z \frac{dP}{dz}$ facendo dopo la differenziazione $z = a$, e si muta in n' facendo $z = a_1$, ecc. Nel caso di $\Delta x = 1$, farà

$t = \Delta \cdot \frac{m}{\alpha} \quad (\text{XII})$, e quindi

$$y = \frac{1}{\nabla^m \alpha} \left\{ \frac{a^x (C + \Sigma a^{-x} \cdot X \nabla^m \alpha^{x-m})}{n} + \frac{a_1^x (C' + \Sigma a_1^{-x} \cdot X \nabla^m \alpha^{x-m})}{n'} + \text{ecc.} \right\}$$

essendo n , n' , ecc. come sopra

OSSERVAZIONI

OSSERVAZIONI

SOPRA ALCUNE TROMBE DI MARE

Formatesi su l' Adriatico il dì 23 Agosto 1785

Del Sig. Ab. LAZARO SPALLANZANI.

CONvengono i moderni Fisici, che di questa maravigliosa meteora noi non abbiamo finora che idee vaghe e incomplete, parte per la scarsità delle osservazioni, parte per essere state queste non sempre istituite o da' più idonei, o da' più veridici. Il perchè ogni qualvolta la fortuna arride agli osservatori naviganti sul mare, coll' offerir loro alcuno di così fatti fenomeni, debbono a sommo studio esser premurosi di esaminarli, con lusinga di sparger qualche luce su questo oscuro e curioso soggetto. Fu questo in parte il motivo che me indusse, son già tre anni, a diligentemente considerare una di queste meteore, allorchè coll' Eccellentiss. Cavaliere *Zulian*, creato Bailo alla Porta Ottomana, io veleggiava per Costantinopoli, e questo ora mi determina ad adombrarne brevemente la storia.

Salpato avendo noi da Venezia la sera de' 22 agosto del 1785, il giorno appresso un' ora prima del mezzodì avevamo in faccia le montagne dell' Istria. Il vento piuttosto placido spirava da ovest, il cielo era coperto da nuvoli temporaleschi, che avevano la direzione all' est, e quando a quando al nordest si vedevano de' vivi lampi, seguiti da tuoni, i quali non faceano già sentire quel romore allungato, che le più volte udiam su la terra, ma somigliavano a brevissimi colpi di cannone; la qual cosa ho io altre volte notata su l'acque; massimamente quando appariscono *maria undique*, & *undique calum*. La faccia inferiore delle nuvole toccava i monti istriani, e quindi a giudizio dell' occhio

non sembrava più alta di un miglio . Era per tutto eguale, a riserva d'una gonfiezza da un lato, e quivi il nuvolo essendo più grosso, appariva più nero. Oltre al moto di rapimento verso l'est, comune al restante delle nuvole, quella gonfiezza ne aveva un vorticoso, e quivi era dove più frequenti guizzavano i lampi, e romoreggiavano i tuoni, senza che apparisse però indizio di pioggia. La gonfiezza del nuvolo corrispondeva perpendicolarmente a un tratto di mare, niente più distante di cinque miglia da noi. Nel tempo che ad essa rivolto aveva gli occhi, siccome quell' oggetto che più feriva la vista, osservai che verso il mezzo della medesima si allungò improvvisamente una specie di cono inverso; nè indugiarono altri coni simili a comparire lateralmente, i quali infinitamente in grande somigliavano a stallattiti pendenti dalla volta d'una sotterranea caverna. Ma poco andò che quel gruppo di coni si sciolse. Sebbene di lì a non molto si credè un altro cono nel sito istesso, ma assai più capace, il quale velocemente allungandosi, e piombando al basso, in pochissimo d'ora giunse non mai interrotto fino al mare, toccandone la superficie con l'estremità inferiore, o direm noi con l'apice, nel tempo che la base del cono si nascondeva in quella gonfiezza di nuvoli. Come l'apice toccò l'acqua del mare, questa si sollevò in un monticello, che seguì ad apparire, finchè il cono inverso si tenne intiero. Questa era dunque una verace e compiuta tromba di mare, laddove que' coni più brevi non erano che trombe imperfette. E come tale venne pur giudicata da' marinaj che si trovavano a bordo, per averne vedute altre consimili, i quali imbevuti degli antichi pregiudizj, eran già presti di conficcare nell'albero di maestra il coltellino dal manico nero, se la tromba venuta fosse dirittamente contro di noi; persuasi che con tale artificio si sarebbe spezzata, e ridotta al niente: ed in questa persuasione andava pur anco il Capitano della nave, uomo di qualche esperienza nella marina, ma che nel rimanente non sentiva più alto della ciurma. L'apice della tromba era distante da noi tre miglia e mezzo all'incirca: il suo diametro apparente, dove toccava il mare, pareva non oltrepassasse gli undici piedi, ma via via che la tromba ascendeva, facevasi maggiore, di guisa

che per lo meno appariva decuplo, dove essa toccava le nuvole. La materia componente la tromba sembrava non differire da quella della nube generatrice, eccetto l'essere più trasparente, così che nelle parti inferiori si vedevano in barlume i corpi posti a tergo di lei, cioè quel tratto di mare, che giaceva al di là. Faceva la tromba un arco visibilissimo, convesso verso noi, e concavo alla parte opposta, e la concavità veniva prodotta dal vento, che seguiva a soffiare da ovest. Il sito dove toccava il mare non corrispondeva perpendicolarmente a quello, in cui toccava la nuvola, ma di molto giaceva al di qua. Stando attento con l'occhio si vedeva progressivamente muovere da cima a fondo il grand' arco, che lento lento dalla parte di ovest si accostava a noi, quantunque per la direzione desse chiaro a vedere, che recato non avrebbe molestia alla nave, ma che passata la avrebbe da un lato.

Nel tempo ch'io era giulivo osservatore di quel non più ammirato fenomeno, ecco che dalla stessa gonfiezza di nuvola, che allora era nerissima, e che non desisteva di lampeggiare e tonare, si spiccano due altre trombe, l'una più voluminosa, e l'altra meno della prima, le quali scendendo, quasi con pari velocità giunsero al mare. Il tempo della discesa fu poco più di tre minuti. Oltre il solito incurvamento, vidi alla loro sommità o base un movimento vertiginoso, e vidi altresì per la maggior vicinanza con più precisione e chiarezza i due monticelli di acqua sottostanti ai due apici delle trombe, già che qui pur si formarono, tosto che quelle toccarono il mare. Comechè adunque da prima preso avessi per solido quell' monticello d'acqua, non ne aveva però che l'ingannatrice apparenza. Questo era un velo di acqua, che di alcuni piedi si sollevava dal livello del mare, e che da me impuntato con buon cannocchiale, appariva schiumoso; il qual velo essendo in più parti lacerato, lasciava non oscuramente vedere un incavo dentro di sè che non occupava il mezzo, e che per più di due piedi internavasi nel mare. Pensai io adunque, non senza fondamento, che questa fosse una potenza che dall'alto al basso agendo sul mare, creava quella cavità, obbligando poi l'acqua a lateralmente salire. E siccome la cavità, e il velo

tagliante sottostavano sempre a perpendicolo all' apice delle due trombe, e seguivanli appuntino ne' loro andamenti, quindi giudicai che siffatta potenza altro non fosse che una corrente di aria, la quale dalle nuvole precipitando giù per la tromba, andasse con empito a ferire l' acqua marina. La sempre maggiore prossimità delle trombe mi fece scorgere un altro fenomeno, che vieppiù mi confermò nel mio giudizio, e questo era un confuso non interrotto fragore, che partiva da quelle due cavità, somigliante a quello che producon le piante, ove sieno dal vento violentemente agitate. Nè di tal fenomeno aver poteva alcuna parte il mare, non essendo allora la sua superficie che leggermente, e senza veruno strepito, da un venticello agitata.

Nel tempo che io era contemplatore di queste due trombe, la prima erasi già dileguata. Il dileguamento ebbesi per tal guisa. L' arco, onde era formata, divenne sempre più acuto, e a poco a poco verso il mezzo, quasi facendo angolo, si ruppe in due; e seguitane appena la rottura, l'apparente monticello d' acqua sparì. Non lasciaron però eosì subito que' due pezzi d' arco di esistere. Per undici minuti si conservaron visibili, indi insensibilmente si dileguarono, come accade a nebbia, che riducasi al nulla. Ma per rifarmi su l' altre due trombe, essendo queste dalla parte del nord passate di fianco alla distanza d' un miglio dalla nave, potei intraprender nuove, ed anche più accertate osservazioni. L' apice della tromba più grande aveva il diametro di circa tre pertiche, il quale a più doppi cresceva a proporzione che questa saliva. La materia della tromba sembrami similissima a quella delle nubi, e la sua trasparenza facea sì vedesse internamente vuota. Con la più decisa chiarezza si sentiva il romore dell' aria, che piombando dall' alto della tromba percuoteva potentemente il mare, e quindi lo obbligava ad incavarli, sorgendo poscia attorno all' incavo uno schiumoso velo di acqua alto più piedi: e la superficie della cavità ribolliva, spumeggiava, e venia rapita da un circolar movimento; effetti tutti quanti dell' aria impellente. Fenomeni affatto contimili succedevano nella tromba minore. Intanto la nube temporalesca corrispondeva al nostro zenit, e senza versare una goccia d' acqua continuava a

dar lampi , accompagnati da colpi di tuono , che al solito quasi momentaneamente finivano . Di dove si spiccavan le trombe (che fu sempre da quel tumore o nera gonfiezza di nuvola) , a guisa di arcolajo muoveva velocemente in giro la nube , e cotal moto vertiginoso si mirava anche più chiaro in varj luoghi delle trombe . La tromba più grande durò 27 minuti , e 18 la più piccola . E la durata sarebbe per ventura in entrambe stata più lunga , se il vento dal troppo incurvarle , rotte in fine non le avesse nella superior parte .

Qui pure interrotta la continuazione delle trombe , i due tratti di mare , che sottogiacevano agli apici di esse , perduta quasi di subito la concavità , e il velo spumeggiante , si appianarono perfettamente , e si misero in calma , siccome già era il restante del mare . Sebbene gli archi delle trombe , già spezzati , seguitarono per qualche intervallo a farsi vedere ; la parte superiore restando attaccata alle nuvole , e l'inferiore fatta ludibrio del vento . Ma il forte del temporale , che non era molto esteso , oltrepassati ci aveva già , fattoli da alcune miglia più orientale di noi . E quantunque due altre trombe in seguito s' ingenerassero , compiute perfettamente , perchè allungatesi fino alla superficie del mare ; tutta via la lontananza mi contese l' esaminarle convenevolmente , siccome riescito mi era nell' altre : e quindi dovetti por fine alla contemplazione di uno spettacolo , non prima d'allora per me veduto , nè dappoi , da che viaggio sul mare .

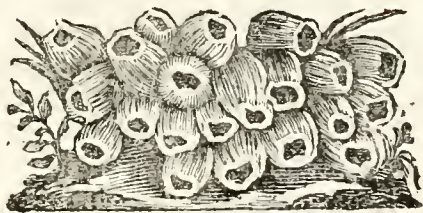
Accenniamo ora in pochi tratti le principali conseguenze , che dalle dianzi narrate osservazioni ne derivano immediatamente . Primo questa specie di tromba non solleva , nè assorbe dentro di se l' acqua del mare : non ve ne versa tampoco sopra , ma consiste in una semplice corrente di aria , che dalle nuvole precipitando al basso , rinchiusa sempre in un canale di materia analoga a quella delle nubi , produce su la superficie dell' acqua gli effetti indicati . Secondo questa corrente par che sia necessariamente prodotta almeno in origine da contrarj venti , che danno insieme di cozzo , e per cui viene rapita in giro allorchè scende dalla nuvola temporalesca ; del che a giudizio mio ne è una evidente ri-

prova il rapido aggirarsi della nuvola, non che di alcune porzioni delle trombe medesime. Terzo il canale vaporoso, che chiamiamo tromba, è verosimilmente generato dal suddetto vortice di aria, che entrando con violenza nella nuvola, e gonfiandone la parte inferiore, la penetra, e dentro al suo invoglio ne scende, ora giungendo fino al mare, ora stendendosi a minore profondità. Quarto l'imperfetta generazione delle trombe, rappresentate in que' conî inversi che vanno a finire assai prima di toccar il mare, può nascere o per cessazione della corrente aerea, troppo necessaria alla produzione di esse, o perchè cotesta corrente non ritrova nelle trombe nascenti la dovuta resistenza per allungarle, e spingerle fino al mare, indipendentemente da altri impedimenti, che vi posson concorrere. Quinto consistendo tutta la forza di questa qualità di trombe in quel violento soffio di aria dall'alto al basso, quantunque esso possa esser nocivo a' piccoli bastimenti, fino anche pel troppo impeto aprofondarli, e ad empierli d'acqua in grazia del veloschiumoso che solleva attorno a se; non saprei però se cagionar potesse gravi danni a legni di gran corpo, quale si era la nave *Bailéra*, che a noi dava ricetto.

Per le cose fin qui narrate si rende chiaro, che la specie di trombe da me osservata su l'Adriatico non è nuova. Almeno di qualche tromba analoga, descritta da altri, fa menzione il *Buffon* ne' suoi *Supplementi*. A me sembra soltanto, che nessuno veduti ne abbia gli effetti sul mare con precisione, e chiarezza pari alla mia. Nel giornale di *Rozier* (an. 1787) il Sig. *Michaud Architetto* descrive una tromba di mare da lui osservata presso Nizza di Provenza nel 1780. Ma questa era di natura ben diversa dalla mia: conciossiachè egli affermi d'essere stato ocular testimone di un fluido vaporoso, compresso assai, visibilissimo, ed attivissimo il quale staccatosi dal mare entrava dentro alla tromba, e fu per lei salendo penetrava fino alla nuvola con lanci successivi, senza che mai ritornasse dalla nuvola alla tromba. E avvalorando egli la sua affermazione con la testimonianza di due altri, che furono spettatori di quella meteora, pare non resti luogo a dubitare della verità della cosa. Consultando le storie de' viaggiatori, s'incontrano descrizioni di

trombe di mare ben diverse dalle esposte fin qui , ma d' altronde a' Fisici troppo note per essere in questo luogo rammemorate.

Continuando col Bailo *Zulian* il mio viaggio verso Levante , allorchè giunsi a Corsù , erasi un mese prima veduto in quel Porto un' altra meteora , che fu fatale ad un Bastimento . Non posso darne che un cenno , per non averne avuta da quegli abitanti, che una tronca ed imperfetta relazione . Pareva ch'ella avesse tutte le apparenze di un ouragano . Sorse improvviso , per quanto mi riferirono , un violentissimo turbine dentro del porto , il quale in un momento sconvolse l'acqua del mare , e la sollevò a grande altezza , formandone un ampio cumulo ; e questo cumulo , a guisa di ruota , rapidissimamente moveva in giro . Su di esso per disgrazia trovossi un bastimento , il quale dopo l' avere alcun poco ubbidito al moto della vorticoso corrente , fu veduto staccarsi da lei , e sollevarsi in aria , indi abbandonato al proprio peso ricadere precipitosamente , e naufragare . Si sa che questi turbini imperversano anche su la terra , nè sono molto rarissimi nell' istessa nostra Lombardia , e viva conserviamo ancor la memoria di uno , che oltre agl' infiniti danni cagionati fuori di Padova , e dentro , staccò il tetto che copriva la gran Sala del Pubblico di quella città , e intiero lo trasferì a considerabil distanza .



R I C E R C H E

Del Dottor GIUSEPPE BARONIO

INTORNO ALCUNE RIPRODUZIONI CHE SI OPERANO
NEGLI ANIMALI COSÌ DETTI A SANGUE CALDO
E NELL' UOMO

P R E S E N T A T E

Dal Sig. Ab. LAZARO SPALLANZANI

A R T I C O L O I.

Della regenerazione delle Ossa.

TRa le molte, e varie proprietà, che all'attento osservatore presenta la compostissima macchina animale, quella ne pare degna di serio esame di cui godono alcune parti di essa, di riparare cioè le perdite fatte anche di grosse porzioni di sostanza solida, o volontariamente staccate dagli animali ad oggetto di fisiche sperienze, o perdute per conseguenza di qualche malattia. E a parlare primamente dell'uomo, le ossa appunto, ed in ispecie quelle, che tengono alta sollevata la nostra macchina, e ci danno la bella forma, della quale andiamo su tutto il mondo animato superbi, non si sono vedute rigenerarsi, e riprodursi mirabilmente? I colpi esterni, le contusioni, le suppurazioni, e quegli ascessi, che appajono segnatamente nelle malattie non giudicate, e che tengono luogo di una crisi imperfetta, benchè poco disturbino, almeno in apparenza, l'economia animale, pur non di meno se si formano immediatamente sopra un osso, ben presto lo attaccano, e succedendo la carie, il corrompono fino a distruggerne una sensibile porzione: che se la natura providamente non separasse le parti cariate dalle sane, ed alle

ed alle parti già distrutte non ne sostituissè poco a poco delle nuove, valendosi della forza riproduttrice, ch'ella unicamente possiede, quante persone noi vedremmo soggiacere per leggieri cagioni ad una lenta morte, ed altre non prestarli che con pena a que' movimenti, che sono all' uomo più necessarij, e più comuni?

Nelle accennate circostanze si raccoglie un siero acre, e marcioso, il quale agisce sulle ossa a guisa di un menstruo, ed intinuandosi tra lamina e lamina non la perdona alla parte più dura, e più resistente, ivi cioè dove le lamine sono raddoppiate, come si osserva nella diaphisi; eppure frequentemente ci accade di trovare registrati ne' libri dei Chirurghi molti casi di ossa lunghe cariate, e quasi direi in parte sciolte da questo siero acre, e marcioso, le quali colle sole forze della natura, separata la parte guasta dalla sana, si sono perfettamente ristabilite, conservando nella parte riprodotta la lunghezza eguale a quella che avevano da prima. Tal genere di riproduzione è stato osservato da *Lodwigio* (a) dal *Boemero* (b) dal *Bartolino* (c) dall' *Offmanno* (d). Nella Memoria del *Du-Hamel* scritta sulle ossa, ed inserita in quelle delle Scienze di Parigi (e) si racconta che avendo una fanciulla perduto in varj tempi quasi l' omero intero, tanto perfettamente si riprodusse quest' osso, che non ne rimase in appresso alcun difetto nè riguardo alla lunghezza, nè riguardo alla figura del braccio. Tra le osservazioni poi di ossa riprodotte che si riferiscono nelle Memorie della Reale Accademia di Chirurgia di Parigi (f) io non so, se alcuna ve ne sia più sorprendente di quella, che ne fornisce il valente Chirurgo Sig. *Moreau*. Staccata da' suoi legamenti, e distrutta interamente una clavicola per causa d'un ascesso in un uomo nello Spedal grande di Parigi; una

Tomo IV.

Ppp

(a) *Traſſatio de diaphiſibus osſum cylindrico um laſſis, exfoliatione ſeparatis, & callo jubnato reſtitutis. Adverſaria Medico-practica* Vol. III. par. 1. *Lipſiæ apud Hæredes Weidmanni, & Reich* 1772 pag. 54

(b) *In Proluſione Academica de of-*

ſium callo. Lipſiæ 1748 in 4. edita.

(c) *Acta Hiſtoriæ* Vol. III pag. 1 & tab. 1. fig. 1.

(d) *Append. ad ephem. natur. curios.* cen. IX, & X pag. 458 tab. I.

(e) *An* 1713

(f) Tom. XIV. in 12.

nuova clavicola si riprodusse, che non era punto diversa nè in lunghezza, nè in sodezza dalla prima. Quindi morta dopo qualche tempo la persona, in cui era avvenuto il sorprendente fenomeno, il Sig. *Angerville* volle far la dissezione del cadavere, e separatone l'osso riprodotto il presentò con grata maraviglia ai dotti membri di quell' Accademia. Che se altri esempj si vogliono a conferma dell' asserita riproduzione, lasciando ora la generazione di quasi l'intera tibia in una donna da me stesso osservata, d' una tibia parimenti ben riprodotta sotto gli occhj del Dott. *Bernardino Moscati* nello Spedal grande di Milano si parla dal chiariss. *Spallanzani* (a): e più fatti di tale natura ne vengono esposti nelle Opere eccellenti del *Ruifchio* (b) del *la Motte* (c) e nelle più recenti del Sig. *Troja* (d) celebre Medico, e Chirurgo di Napoli. Nè meno delle ossa lunghe si è trovato riprodursi benissimo le ossa così dette larghe. Il Sig. *Lorenzo Nanoni* (e) ci assicura d'aver osservato riprodursi tutta la parte laterale destra della mascella inferiore in un uomo quinquagenario, di maniera che il nuovo processo condiloideo combaciava così bene colla cavità dell' osso temporale da far esercitare a quell'uomo liberamente i moti di elevazione, abbassamento, e rotazione soliti alla mascella inferiore. Ed io stesso sono testimonio di veduta della riparazione di una grossa porzione dello sterno guastatosi per un ascesso inforto in progresso di una malattia non ben giudicata.

Ed ecco quali sieno le progressioni delle riproduzioni osservate nell' osso che si rigenera: comincia a comparire una sovranza molle adente al tatto, che sorge dall' osso sano, e si produce dal perioffio sotto le sembianze d' una gelatina condensata, o d' una spugna tinta all' intorno di rosso, scaccata d' una prodigiosa quantità di vasi, che sembra a chi l'osserva una infiammazione erisipelatosa, oppure si rassomi-

(a) Opuscoli di Fisica Animale Vegetabile dell' Ab. *Spallanzani* Vol. 2. pag. 248

(b) *Opera omnia* Tom. I. pag. 171

(c) *Traité complet de Chirurgie*. Tom. IV. pag. 264

(d) *De novorum ossum in integris*,

aut maximis ob morbos deperditionibus regeneratione. Lutetiae Parisiorum e typis Franc. Ambr. Didot. 1775

(e) Sulla regenerazione delle parti similari costituenti il corpo umano 1781 per *Marelli*.

glia a quella rosea gonfiezza, che nasce nelle labbra delle ferite. Nello spazio di alcuni mesi questa gelatina cresce, e s'indura, finchè a poco a poco arriva a riempire tutta la cavità lasciata dall'osso separato, ed attaccandosi alle parti sane dell'osso, forma con esso un tutto.

Una prova delle progressioni indicate aver la possiamo nei polli, o nei colombi (*a*). Si taglia la tibia nella sua estremità inferiore vicino all'epifisi, e col mezzo d'una sonda scannellata abbastanza sottile introdotta nel cavo dell'osso, se ne distrugge tutta la midolla contenutavi, ed in sua vece si riempie l'osso di sottilissime filaccia, mettendone poche per volta, e comprimendole quanto è possibile, affinchè nel canale interno non trasudi umore alcuno, che corrompendosi porterebbe a morte l'animale. Avendo io così disposto un pollo robusto, dopo dieci giorni osservai vicino alla rottura gonfio il periostio, che lasciava vedere una gelatina, o piuttosto una sostanza spugnosa, e questa formando un tutto coll'osso, lo allungava, essendo sensibili i vasi sanguigni, che nella nuova parte d'osso s'immergevano. In capo ad un mese questa stessa sostanza avea acquistato maggior sodezza, e settanta giorni dopo l'operazione, era diventata affatto ossea: così chi predilige questo ramo di Fisica animale proceda con le accennate cautele, che certo simili esperienze reiterate non solo dimostreranno ad occhi veggenti la riparazione delle ossa, e l'andamento di tale operazione; ma potrebbero forse sulle tracce principalmente del Sig. *Troja* guidarne a cognizioni maggiori di quelle che finora abbiamo per iscoprire finalmente il mistero della natura sulla formazione delle ossa (*b*). Non vogliamo però lasciarci alcune osservazioni relative all'operazione indicata, che verrò

Ppp ij

(*a*) E riguardo ai colombi *Troja* opera cit.

(*b*) E' nota la quistione che ha interessato tanto l'illustre Francese *Du-Hamel*, e l'immortale *Hallero*, se il periostio degeneri in osso, o no. Il *Du-Hamel* dall'analogia che passa tra le ossa e le piante, credette che siccome la scorza degenera in legno,

così l'osso si formasse dal periostio. L'*Hallero* guidato da uno scrupoloso esame sul pulcino nell'uovo sostenne tutto il contrario. Quantunque non manchino su questo soggetto e belle osservazioni, ed ingegnosi esperimenti, non osiamo però ancora accertare chi de' due valenti scrittori sostenga la verità.

qui tosto accennando come si presentino al pensiero . Dico adunque che ne' casi di cui parliamo trasuda continuamente un umor biancastro sottile, che si rassomiglia al bianco dell' uovo . E' questo necessario all' opera della riproduzione, poichè sotto di esso si svolgono i vasi sanguigni, guardati questi, e difesi mercè di tale umore dalle pericolose esterne impressioni, osservandosi altresì, che dalla maggiore, o minore quantità di esso dipende pure il maggiore o minore aumento dell' osso. Del quale umore giacchè ne accade di parlare, giova avvertire, che non solamente nel caso di ossa guaste, ma dalla superficie ancora di tutte le ferite, qualunque esse siano, un umore ne suda di natura linsatica somigliante in qualche maniera al tessè indicato . Al che troppo importa che pongan mente i Chirurghi, onde astenerli quant'è possibile da certe loro tinture spiritose di mirra, e di garofani, come pure dello spirito di vino puro, di cui gli empirici imbevono più volte i piunacciuoli in occasione di frattura d' ossa . Oltre che materie sì fatte inaspriscono l' infiammazione delle labbra della ferita, distruggono ancora questo umore linsatico tanto necessario all' opera della riproduzione, e ritardano così moltissimo i progressi della cura, e però gli avveduti Chirurghi in simili casi si valgono piuttosto d' una tintura acquosa di mirra allungata con una decozione d' orzo .

Ma una leggere infiammazione riesce inevitabile in ogni genere di riproduzione . Dipende questa dal sangue, e dagli umori, che in copia si portano ai bordi della ferita, da dove incomincia la riproduzione, e coll' urto loro svolgono, distendono, modellano le fibre a loro adiacenti, nelle quali operazioni però tutto consiste il meccanismo della riproduzione, siccome lo sviluppo di tutta la macchina .

Non è poi così regolare, come lo era innanzi, la nuova produzione dell' osso . La direzione delle fibre componenti la massa ossea varia moltissimo . Ora pare che seguano l' ordine, con cui sono disposte le fibre del periostio, ora un altro fascetto le attraversa, ed interrompe il corso loro . Anzi allora soltanto ci accorgiamo essere seguita l' intera riparazione dell' osso distrutto, quando questa parte non compare più rossa, e spugnosa, ma piuttosto bianca, e resistente col-

le fibre disposte irregolarmente, del resto tale irregolarità nel rigenerarsi non è soltanto limitata alle ossa, ma ad essa soggiacciono tutte le altre parti, che si riproducono. Fino le cicatrici cutanee esaminate tanto nell'uomo, che negli altri animali, presentano un ammasso di fibre totalmente irregolare; la quale irregolarità siccome dipende dal vario intralciamento delle fibre, e delle lamine sia delle ossa, sia degli integumenti ivi raddoppiate, e più stivate che in altri luoghi, così succede costantemente, che le parti riprodotte sono sempre più dure delle altre. Di tale fermezza si accorgono gli Anatomici dalla resistenza che soffre il coltello nel tagliare una parte cicatrizzata, e ne sono testimonj coloro, ai quali essendosi riprodotto qualche pezzo d'osso, se venne questo sgraziatamente a spezzarsi, ciò fu al di sotto, o al di sopra, non mai alla parte medesima della riproduzione.

A me certo fece stupore le due volte ch'ebbi occasione di esaminare ossa riprodotte in un cadavere, fece dico stupore l'osservare quanto irregolarmente fossero cresciuti quei due pezzi d'osso. Ora le lamine erano molto rialzate, e la superficie allora restava aspra e squamosa. Ora si trovavano delle lacune, dei pori, dai quali veniva come intercelto il piano dell'osso, ed il periostio, che vi si adattava, era pure nella superficie irregolare, e scabro: ora sembrava che dalla sostanza muscolare parimenti rigenerata si staccassero delle fibre tendinee, e s'impiantassero dentro all'osso, attraversando in varj modi il periostio. Nè dee già attribuirsi tale irregolarità od alle impressioni dell'aria, od all'applicazione dei rimedj, o dei piumacciuoli, o finalmente all'uso delle fasciature, ma sibbene ad una ineguale distribuzione d'umori, necessaria conseguenza dell'essere in quelle parti il meccanismo della circolazione alquanto alterato; onde ne avviene che anche le riproduzioni, le quali operano internamente, riescono esse pure irregolari.

ARTICOLO II.

Dell' innesto dello Sperone sulla cresta del gallo, e dell' innesto del naso nell' uomo.

La riproduzione dei tendini è un fatto così notorio, che non occorre parlarne particolarmente. Noi abbiamo prove accertate della riparazione di tutto il gran tendine d'Achille, altrimenti chiamata *corda magna* (a); altrettanto si dica de' legamenti i quali non solo si riproducono quando vengono distrutti, come appare nel caso sopra accennato della clavicola, ma possono ancora generarsi di nuovo. L'innesto dello sperone sulla cresta di un gallo può servire di prova. Siccome però a tutti non è noto come si proceda in questo esperimento dilettevole non meno, che istruttivo, farà cred' io pregio dell' opera, che qui vengasi brevemente descrivendo.

Tutti fanno che la cresta de' galli è attaccata alla lor testa con una base abbastanza larga, che prende dalla parte superiore dell' occipite, e si estende sino all'origine del becco. Ciò presupposto, si taglia questa cresta alla distanza di un dito traverso delle ossa del cranio. Fatta tale sezione, si forma alla parte posteriore una protuberanza d' ordinario molto fitta, vicino alla quale far si dee un' ansa con filo incerato: e ne viene quindi che la cresta lascia un vuoto nel mezzo, in cui deve essere collocato lo sperone distaccato dal piede d' un altro pollo. Già le lamine della cresta, che rimangono attaccate per via di un tessuto cellulare, si accostano tra di loro verso il becco, e già lo sperone si attacca, e cresce. E' vero che quando si fa questo giuoco, alcuni degli speroni cadono per lo movimento, che fa il pollo colla testa, ma se giungono ad acquistare una unione abbastanza perfetta; quegli speroni che emulavano nella loro grossezza una semente di canape, nello spazio di sei mesi

(a) Vedi una mia Lettera diretta al Professore Girardi di Parma nel Tomo IX part. V. pag. 313 negli Opuscoli scelti di Milano.

acquistano un mezzo pollice di lunghezza . Accade inoltre , che molto più crescono sulla cresta , che nel piede , così che nel decorso di tre o quattr' anni considerandoli dritti sono lunghi più di quattro pollici , e formano come un corno ; espongono poi i ciurmadori de' galli si fatti , quasi mostri , cui nato sia sulla testa una specie di corno , come a me medesimo è accaduto di vedere . Che se anatomizzare si vogliono questi innesti , si comincia a vedere un bordo duro , e calloso che cinge la base del corno : distruggendo quindi una porzione di questo bordo , si scopre un legamento capsulare , che impedisce di vedere l' inserzione dello sperone colla testa , e serve intanto all' articolazione . Staccata in parte anche questa fascia ligamentosa , appajono delle altre striscie parimenti ligamentose , delle quali alcune vanno a terminare nelle fosse nasali alla parte superiore dell' orbite , ed altre in alcuni punti dell' occipite . Or si rompano questi ligamenti , e si ripieghi il corno verso il becco ; e si troveranno alla di lui base delle cavità articolari , e delle eminenze corrispondenti sul cranio : quantunque poi v' abbia della varietà nel numero , e nelle attaccature di detti legamenti nei diversi galli , pur nondimeno la loro produzione è sicura , e il legamento capsulare , che articola lo sperone colla cresta , costantemente si trova in tutti i galli , in cui si tentò l' esperimento , ed è quindi una prova , che non solo i legamenti si rifanno , ma si generano anche di nuovo .

Non parrà certo sì facile il trovare l' analogia tra questi innesti dei polli e le riproduzioni nell' uomo . Gioverà però assai all' intento l' esaminare il raro libro di *Gasparo Tagliacozio* , che professò la chirurgia , e l' anatomia in Bologna verso la metà del secolo decimo sesto : *De curtorum chirurgia per insitionem , libri duo , in quibus omnia ea , quae ad hujus chirurgiae , narium scilicet , aurium , ac labiorum per insitionem restaurandorum cum theorica , tum practica pertinere videbantur , clarissima methodo cumulativissime declarantur . Aditis cutis traductis instrumentorum omnium , atque deligationum iconibus , & tabulis . Venetiis apud Gasparem Bindonem juniorem 1597 in fol.* così porta il titolo .

Troviamo qui che a questo grand' uomo non era ignota la maniera di riparare il naso , e le orecchie staccate in ris-

sa, o tagliate in segno di obbrobrio ai malfattori, come portava la giurisprudenza criminale di que' tempi. Non arderei però asserire *Tagliacozio* essere stato l'inventore di questo metodo, volendosi da alcuni, che fino dal 1442 un certo *Branca* Chirurgo di Sicilia lo avesse scoperto, e che *Antonio* suo figlio lo abbia perfezionato fino per riparare con questa novella arte delle orecchie, e delle labbra tagliate. Si aggiunge anzi che *Vincenzo Vianeo* medico, e chirurgo Calabrese abbia reso più facile il metodo d'innestare i nasi (a) sicchè in appresso altri Chirurghi ancora principalmente in Calabria si fecero gran nome per quella operazione singolare fino al principio del passato secolo, al qual tempo abbandonata quella specie di pena, onde ne nasceva più frequente il bisogno, andò pure in dimenticanza sì bella parte di Chirurgia. Che che sia però dell'origine della operazione indicata detta da' Greci *Protesi*, che vale quanto aggiunta artificiale di qualche parte perduta alla macchina animale; deesi certo a *Tagliacozio* la gloria di avere ristorata moltissimo quest' arte, e di averla estesa in varie parti d'Italia. E perciò fu che una statua avente il naso in mano se gli eresse nel Teatro Anatomico dell'Università di Bologna, ove si vede tuttavia, ed una bella iscrizione se le aggiunse da quella Facoltà medica a perpetuare la memoria di questo sì insigne, e benemerito medico, e chirurgo. Quanto al metodo da lui adottato, ed esposto nell'accennato libro, non può essere più semplice. Tutto si riduce ad una scalatura fatta al luogo del naso, ed una incisione nella cute del braccio dello stesso soggetto: perchè poi è più facile ne sia l'intelligenza, e più sicura la pratica ne dà egli stesso esattamente incise le figure d'uomini, fu de' quali li operò, venendo in più tavole disegnato quanto mai può avere rapporto all'operazione, e quanto può servire d'istruzione all'operatore: ed io stesso ben volentieri darei qui una notizia più estesa di quella rara opera, se fatto non lo avesse con molta accuratezza il Cavalier *Alessandro Brambilla* nella sua dotta Storia

(a) Histoire de l'Anatomie, & de la Chirurgie par M. Portal. Tom. II. pag. 165

Storia delle scoperte Medico-Finco - ecc. fatte dagli uomini illustri italiani (a), a cui dobbiamo moltissimo per le utili cognizioni che ci ha dato. Intanto oso dire, che il metodo di *Tagliacozio* meriterebbe d'essere richiamato alla pratica pel bene dell'uman genere. Quante deformità si potrebbero con questo mezzo riparare non solo ne' nasi mozzati, ma nelle orecchie ancora, e nelle labbra perdute? Strano soggetto è vero, e poco meno che ridicola chimera parrà forse quanto si avanza sulla possibilità, e la maniera di riparare la mancanza delle parti indicate. Così però non ne parve nè al grande *Hallero* nella sua Fisiologia, nè al *Platner* nelle sue istituzioni Chirurgiche, ove parla delle ferite del naso, e fa ciascuno quanto valga il giudizio d'entrambi questi uomini illustri, nè disforme, o ridicolo riesce il naso innestato come alcuni scrissero, ma anzi regolare, conforme all'architettura della faccia (b): due esempi ne riferiscono il *Pareo*, e l'*Ildano* che servire ce ne possono di luminosa prova. Il primo riguarda un uomo, che mancandogli l'apice del naso lo portava d'argento, di che finalmente annojato venne in Italia ad oggetto di tentare l'operazione dell'innesto, riuscita di fatti mirabilmente all'intento. L'*Ildano* poi (c) racconta il caso d'una fanciulla, alla quale essendo stato rimesso il naso da un certo *Grifonio* Chirurgo alquanto industriosò, tale apparve l'esattezza con cui era stato inferito, che divenne l'oggetto della comune ammirazione. Che sarebbe poi se replicando le esperienze si spingesse più avanti l'osservazione e si migliorasse questo metodo col trarne delle utili conseguenze? L'innesto fa crescere un ramo sopra un altro ramo; i sughi dell'albero alimentano questo fusto straniero, e questo parassita diviene ben presto una porzione dell'albero in cui è stato introdotto. Mettiamo in parallelo questo fatto coll'unghia della gallina piantata nella cresta dello stesso animale, e troveremo ragioni sufficienti siccome a persuadere un Chirurgo perchè intraprenda va-

Tomo IV.

Qq q

(a) Milano 1781.

(b) Liv. 23 Cap. 2. pag. 574

(c) Centur. III. observ. 31 pag. 214

lorofamente una operazione sì fatta, così a rendere i mostri di tal natura abbastanza docili per affoggettarli alla operazione medesima, in cui l' incomodo maggiore gli è quello finalmente di tenere il braccio alzato, e fermo al luogo della moziatura per venti interi giorni, tempo necessario al riferir di *Tagliacozio*, perchè si formi la riunione. Non vuole poi tacerli a commendazione sempre maggiore di queste utili ricerche, che in fatto delle medesime dobbiam saper grado particolarmente al Sig. *Dubois*, che nel 1742 sostenne in Tesi di medicina, che si potevano allungare i nasi troppo corti con pezzi di carne levata dal braccio, cercando di dimostrarne la possibilità coll' esperienza (a).

A R T I C O L O I I I .

Della regenerazione di un anello di carne ottenuta dal Du-Hamel nella gamba d un Pollo, e del paterecchio considerato sotto lo stato di riproduzione .

Ora tornando da capo ai polli, si può osservare come siegua la riproduzione della carne, dei nervi, delle vene, delle arterie, e delle ossa nello stesso tempo. Un esperimento, che ci faccia vedere unite tutte insieme queste riparazioni, si è quello del *Du-Hamel* tanto rinomato appo coloro, che coltivano questo ramo di naturale Filosofia.

Dopò avere rotto l'osso della gamba in un pollo, ed aver dato tempo di formarsi il callo, tagliò il *Du-Hamel* le carni all' intorno per un terzo della circonferenza della gamba, arrivando fino all'osso, e raschiandolo. Consolidata essendosi perfettamente questa ferita, nella stessa maniera tagliò un altro terzo di carne, ritoccando un poco l' antica piaga. Fece lo stesso nell' altra porzione, che rimaneva, ed in tal modo distaccò tutte le parti solide tra di loro, e distrusse tante parti dissimilari; or la natura ha riparato questo gran

(a) Questo si trova riferito dal Sig. fo completo d' Agricoltura.
Ab. *Rozier* nella I. parte del suo Cor-

disordine in una maniera meravigliosa. Tutte queste parti si sono rigenerate, riunite, innestate: nuove fibre, e nuovi vasi si sono sviluppati dalla parte di sopra, e da quella di sotto dell'incisione, e si sono abboccati così felicemente, che ristabilita la circolazione, la iniezione dell'arteria fatta dall'alto della coscia passò fino al basso della gamba e dal basso della gamba si estese benissimo la iniezione della vena sicchè l'una, e l'altra si distribuì maravigliosamente nelle carni.

Penfai che si sarebbe potuto ottenere la riproduzione, senza rendere prima l'animale infermiccio col rompergli l'osso della gamba, e quindi dato mi sono a replicare l'esperienza del *Du-Hamel*, evitando al pollo questo sconcerto anche ad oggetto di mantenerlo abbastanza robusto per sostenere una sì crudele operazione. Intrapresi l'esperimento col tagliare tutta quella carne, che forma la parte interna della gamba della larghezza più d'un dito traverso, essendomi proposto a differenza del Sig. *Du-Hamel* di fare l'operazione in due tempi. Per assicurarmi che il coltello giungesse fino all'osso, ho raschiato porzione dell'osso stesso. La quantità del sangue che zampillava dalle carni recise, mi fece dar di piglio all'acqua vulneraria, che si fabbrica in Roma, anche affine di sperimentarne la forza astringente, sulla quale avea molti dubbj: inzuppati dei bordonetti di filaccia in questo stitico liquore, gli ho adattati alle varie parti della ferita, da cui fortiva il sangue, e ricoperti questi di altre fila asciutte, gli assicurava con una fasciatura.

Con mia maraviglia vidi il gallo mangiare del pane bagnato, e del miglio non essendo ancora passata un'ora dall'operazione. Il giorno appresso cantava, era vispo, pronto ad uscire dalla gabbia quando non vi fosse stato trattenuto a forza. Visitava ogni 24 ore la ferita coll'ajuto anche di una lente per vedere qual'ordine tenevano le fibre carnee nel rigenerarsi: al levarsi dell'apparecchio i primi tre giorni fortiva del sangue a dispetto dell'acqua vulneraria, che si era usata: laonde ad allontanare ogni pericolo di una rovinosa emorragia si rinnovava l'acqua medesima ogni giorno. Al settimo giorno m'accorsi che la riproduzione incominciava. Mi premieva di tener dietro alla direzione che

prendevano le fibre, e vidi che questa variava moltissimo, alcune poche volte seguivano esse una linea parallela all'osso, ed andavano ad unirsi punta a punta; altre si torcevano, e si intersecavano tra di loro, ed altre tenevano una direzione totalmente irregolare. Dal settimo giorno che incominciò la riproduzione, andò tanto avanti rapidamente, che al giorno ventesimo era ormai coperta dagli integumenti, e il pollo camminava zoppicando leggermente. Lasciai quieto l'animale per qualche giorno, acciò potesse meglio nutrirsi, e poi replicai l'operazione, tagliando tutto quel pezzo di carne, che era rimasto intatto nella parte esteriore della gamba stessa; passai col coltello fino sulla parte riprodotta, distruggendone anche d'essa una picciolissima porzione, e raschiando leggermente l'osso in maniera di staccarne il periostio, e guastare la parte compatta dell'osso stesso. Volli in questa seconda operazione usare pure fila bagnate nell'acqua del pozzo per vedere se l'animale guarisse egualmente. Di fatti l'esito corrispose perfettamente alla mia aspettazione. L'operazione s' intraprese nel primo di settembre, ed al giorno 14 di detto mese era già seguita la riproduzione, sicchè venuto il tempo, in cui cominciano le lezioni in Pavia, ho portato meco il pollo per mostrare questa bella riproduzione al Sig. Ab. *Spallanzani*, che mi avea guidato nella speranza. Alla presenza di altri Professori, che negavano seguire le riproduzioni negli animali a sangue caldo, si è fatta l'iniezione nella gamba del pollo, che aveva riprodotto la carne dalla parte superiore nell'arteria, e dalla inferiore nella vena. L'esperto anatomico il Professore *Rezia*, che fece l'iniezione, si mise a tagliare la gamba, separando fibra da fibra, e nella dissezione di questa carne riprodotta si vedeva come l'iniezione era passata sì nell'arteria, che nella vena felicemente, e nei rami che sortono dall'una, e dall'altra appariva precisamente quell'orditura di fibre, che io avea già osservata, con la sola differenza, che tra fibra e fibra vi si era interposta della cellulare, la quale resa fitta, e consistente teneva luogo come di tendine. Nello anatomizzare fece riflettere l'accennato Dissettore, che l'arteria crurale scorreva tra le due ossa tibia e fibula, e che poteva distruggerli tutta la carne, che la circonda, senza pregiudicarla a meno che non si fosse tagliata anche porzione d'osso.

Per quanto io fossi certo d'essere penetrato fino all'osso, e di avere raschiato parte dell'osso stesso, ad ogni modo volli levarmi questo scrupolo: verso la metà d'agosto del 1779 ho scelto un altro gallo robusto, ho reciso un grosso pezzo di carne, ed afferrata l'arteria crurale, con una pinzetta, l'ho tagliata, distruggendo porzione della fibula nello stesso tempo, non essendo possibile di strappare l'arteria senza rompere porzione di quest'osso. Assicurato di avere strappata l'arteria all'animale, ho coperta la ferita di sole fila bagnate nell'acqua di pozzo, ed ho assicurato al solito la ferita: dopo ventiquattr'ore levando l'apparecchio, fui obbligato di rimetterlo ben presto per evitare una perdita di sangue rovinosa, che andava minacciando la crudele ferita. Credetti allora di dover lasciare in quiete l'animale per 30 ore, senza toccarlo mai, nel qual tempo dava segni del suo mal essere, mangiando pochissimo, e stando rimpiazzato in un angolo della gabbia. Al quarto giorno, che visitai per la seconda volta la piaga, la vidi coperta intieramente di una macchia, che io giudicai cancerosa per il colore livido, e bruno che aveva, e per l'insensibilità che dimostrava l'animale al separarla col coltello. Staccata questa croste cancerosa vi applicai della polvere sottilissima di China China per impedire l'ulteriore corruzione, a cui erano disposte le carni, e in questo tempo gli ingozzava del pane bagnato, e del miglio. Nove giorni dopo l'operazione il gallo cantava, e già incominciava la riproduzione: non volli però adocchiare come questa seguisse per timore non forse venisse danneggiata dall'aria, il cui contatto ognuno sa quanto sia pericoloso alle ferite. Agli ultimi del mese si reggeva sulla gamba, ed ai cinque di settembre non aveva più bisogno di fasciatura, e camminava. Mi trovava allora in campagna lontano quaranta miglia di Milano, e premendomi di far delineare non meno l'arteria, che tutte le altre parti con essa riprodotte, feci trasportare il pollo senza riguardo alcuno esposto alle ingiurie dei venti, che dominavano in quella stagione, e questo era in uno stato di salute così perfetto, che non soffrì il menomo danno in questa incomoda peregrinazione.

Riflettendo che le parti riprodotte sono sempre più forti,

e più resistenti delle altre, mi nasceva un dubbio intorno all'irritabilità dei muscoli riprodotti, se mai questa fosse maggiore, o minore: per assicurarmi ho staccato gl'integumenti che coprivano la parte riprodotta, e punzecchiando la nuova carne, e toccandola con un cotone bagnato nell'acqua forte, si dibatteva talmente l'animale, che non lasciava alcun dubbio, che quella parte fosse più delle altre irritabile. Aveva nello stesso tempo staccato gli integumenti dal petto dello stesso pollo, e stimolato in varj sensi, dava bensì segno d'irritabilità col contrarsi, e corrugarsi di questi muscoli, che non si divincolava come nell'altro caso, nè le contrazioni erano così forti.

Dopo essermi assicurato della maggiore irritabilità di queste parti riprodotte, ho ammazzato l'animale per osservare più minutamente la riproduzione. Il primo tentativo è stato quello dell'iniezione praticata secondo il metodo già tenuto dal Professore anatomico; in seguito passai alla dissezione della gamba, e nell'eseguirla usai tutta la diligenza possibile, solo per determinare il numero de' muscoli, che la compongono, de' quali mi è riuscito di distinguerne fino a nove. Di questi quattro s'impiegano nel piegare la gamba, ed io li chiamerei pronatori: tre servono a distenderla, e perciò estensori, due dei quali sono più robusti di tutti gli altri. Due altri muscoli girano la gamba trasversalmente a guisa d'una fascia, e servono come di guaina agli altri, e nel soggetto, che io ho esaminato, estendevano alcune fibre sull'articolazione dell'osso della tibia col metatarso, ed andavano a terminare nella carne del piede, e forse servono a dare alla gamba, ed al piede quella specie di rotazione, che fanno. Separati tutti i muscoli, e scoperto l'osso, mi saltò agli occhi l'arteria crurale bellamente iniettata, della quale non si poteva dubitare, che si fosse riprodotta, e perchè si vedeva in due luoghi dove era stata strappata una specie di gonfiezza, e perchè scorreva non già tra le due ossa tibia e fibula, ma sopra di essa. Nell'osso poi si trovava questa specie di mostruosità, che l'estremità dell'osso riprodotto superiormente non s'imboccava col vecchio, ma attaccandosi a quella porzione di tibia, che gli corrisponde, si scostava dall'osso vecchio, al quale poi si univa con una spe-

cie di poro fancoide formando un solo osso colla vecchia tibia, e colla fibula che era rimasta intatta. Forse parrà difficile a prima vista, come in questo caso possa succedere la riproduzione di tante parti muscolari, nervee, e vascolose, distrutta essendo l'arteria principale, che porta il nutrimento a tutta la gamba. Ma questa difficoltà svanisce ben presto riflettendo all'operazione dell'aneurisma, che si pratica nel braccio, nella quale legata l'arteria, che porta il nutrimento a tutto il braccio, seguita questo a nutrirsi col mezzo dei rami, che si spandono lateralmente. Prima però di parlare del rapporto che può avere l'accennata esperienza del *Du-Hamel* con alcune riproduzioni che si operano nell'uomo, riferirò qui una lettera del Sig. *Senebier* Bibliotecario della Republica di Ginevra, la quale può riuscire molto istruttiva, perchè essa ci guida a ricerche molto più sottili in fatto di riproduzioni, e ci somministra delle idee, con cui si può scoprire come la tela animale guasta, o distrutta si vada regenerando: avendogli io comunicate le mie osservazioni riguardanti il rifacimento delle ossa, la formazione delle cicatrici, e la regenerazione di quell'anello di carne distrutto in un pollo, egli così mi risponde:

„ Ho ricevuto la vostra lettera che mi avete fatto grazia
„ di mandarmi, e l'ho letta con tutta quella attenzione di
„ cui io son capace; e per viemmaggiormente dimostrarvi
„ che essa mi ha interessato moltissimo vi comunicherò qual-
„ che idea che mi ha fatta nascere.

„ Non farebbe egli stato più istruttivo di fare un' incisione
„ nell' osso, in maniera che potesse mettere allo scoperto
„ la midolla senza rompere l' osso medesimo? Allora io
„ crederei, che l' osservazione di tutto ciò che può accadere
„ nella riproduzione più propria riuscirebbe ad iscoprirne
„ quello, che le altre sperienze non ci hanno permesso di
„ vedere.

„ Avrei altresì bramato che vi fosse prevalso di lenti per
„ osservare le fibre, ed i vasi, e seguire in questa maniera
„ gli andamenti, e le circostanze tutte della riproduzione.

„ Toccante le cicatrici, la loro durezza è un fenomeno
„ alquanto attendibile: dipenderà ella dalla tessitura più stiva-
„ ta, e più condensata? Ma qual sarà poi la cagione? L'ir-

„ regolarità con cui sono situate le fibre potrà essere forse la
 „ sola cagione della soverchia fermezza delle cicatrici, oppure
 „ sarà questa riferibile a ciò che le fibre tagliate si diramano
 „ in questi casi a guisa di tante radici, moltiplicandosi senza
 „ fine in quello spazio lasciato dalla ferita? Eccovi una con-
 „ ghiettura, che sta a voi ad esaminarla; le piccole piaghe
 „ non lasciano cicatrici sensibili, perchè il numero delle fibre
 „ non è allora abbastanza moltiplicato per indurirle; così voi
 „ potrete rischiarare questo soggetto, indagando ciò che può
 „ aumentare, o diminuire la durezza delle cicatrici. Quel rial-
 „ zo, che si forma ai bordi d'una ferita, non è da trascurarsi;
 „ ed io sono d'opinione che la circolazione del sangue, e de-
 „ gli umori non vi abbia parte.

„ Lodo la vostra somma industria nel procurare la regene-
 „ razione dell'arteria crurale distrutta; ma farei stato curioso
 „ di vedere ciò che avviene, cioè se ella si riunisca alla por-
 „ zione tagliata, lo che non mi pare; oppure se si formano
 „ delle nuove ramificazioni, le quali si anatomizzano, e si
 „ imbroccino colle vecchie arterie, per modo che venga ristabi-
 „ lita la circolazione come prima: questo è quello che non
 „ posso immaginarmi se non con fatica, ed io farei piuttosto
 „ d'opinione che ivi si formasse un nuovo sistema di circo-
 „ lazione col mezzo di una grande quantità di piccoli vasi,
 „ che penetrano, e gonfiano la piaga, e rimpiazzano i va-
 „ si distrutti.

„ Ma io m'avveggo di parlare d'una materia infinitamen-
 „ te delicata in faccia ad un maestro, che dovrei piuttosto
 „ ascoltare, per cui io m'arresto . . . Ma non finirei mai
 „ di ringraziarvi delle osservazioni che mi avete fatto leggere
 „ e delle grandi speranze che mi fate concepire per gli a-
 „ vanzamenti della Fisiologia, e nell'assicurarvi della stima
 „ veramente sentita con cui sono

Ginevra li 20 Novembre 1785

Vostro amico
 JEAN SENEBIER.

Ora

Ora l'uomo ancora molte volte s'abbatte in circostanze tali di dover riprodurre tutte insieme arterie, vene, muscoli, nervi, ed osso come nel caso del pollo assoggettato alla crudele esperienza del *Du-Hamel*. Il paterrecchio malattia famigliare agli operaj, e segnatamente a coloro, che sono obbligati servirli dell' ago, o del martello, presenta al Filosofo naturalista i prodigi della natura contro l'ignoranza dei Chirurghi. Entriamo in qualche discorso per meglio conoscerli. Col nome di paterrecchio s' intende comunemente un vero tumore flemmonoso, che nasce alla radice dell' unghia, od anche alle sue parti laterali, e di rado alle estremità delle dita. I Chirurghi conoscono il paterrecchio dai molesti sintomi che lo accompagnano, che sono un dolore forte fisso nel sito del tumore, unito a pulsazione, e calore: questo tumore suol essere rosso, ed alquanto duro.

De' paterrecchj se ne possono distinguere tre specie; la prima delle quali è quando il tumore si limita fra la cute e l' epidermide; la seconda quando occupa la cute, e la membrana cellulare, e pinguedinosa in vicinanza, o sotto immediatamente all' unghia; la terza è quando si forma fra il periostio e l' osso (a). Frequentemente queste tre specie si uniscono tra loro, e sovente l' una degenera nell' altra. Nell' ultima delle specie indicate oltre gli integumenti, i muscoli, i tendini, e fino l' osso sogliono trovarsi pregiudicati. Quando l' osso è sensibilmente cariato, e già i tendini dei muscoli flessorj delle dita sono in parte distrutti, oppure abbia la piaga qualche macchia cancerosa, la pratica ordinaria de' Chirurghi è di condannare l' ammalato all' amputazione del dito, o almeno della terza falange del medesimo, niente confidando nelle forze riparatrici della natu-

Tom. IV.

R r r

(a) Dai Chirurghi comunemente se ne distinguono quattro specie, e di queste le prime due sono le di sopra accennate, e la terza stabiliscono essere quella, che ha la sua sede nella tonaca degli estensori delle dita; la quarta poi quando il tumore si forma tra il periostio e l' osso. Noi credia-

mo di formare solo tre specie, escludendo la terza delle indicate, la quale non è riducibile alla pratica, non trovandosi mai un paterrecchio, il cui tumore occupi solamente quello strato cellulare, che si chiama vagina de' tendini.

ra. Anzi siccome in simili casi per lo più i vasi arteriosi sono gli ultimi a guastarsi, e consumarsi, così i Chirurghi più semplici, e più volgari per iscoprire i seni della ferita tagliano, e distruggono anche questi, ed in tal maniera rendono sempre più difficile la natural guarigione, e necessaria l'amputazione. Fa orrore a vedere certi Chirurghi trattar simili malattie. Non solamente tagliano le parti affette, ma non la perdonano anche alle sane, e privano dell'uso di uno o più falangi que' poveri infermi, che si abbandonano alla loro direzione; qualche volta però accade che alcuni paventati all'idea dell'amputazione del dito odiano non solo il Chirurgo, ma eziandio qualunque soccorso loro si proponga, e lasciano tutto l'impegno alla natura, usando al più qualche semplice rimedio vegetabile dall'autorità di qualche donnicciuola accreditato, ed è allora appunto che l'ammalato d'ordinario guarisce. Io ne ho già veduti due esempj. Giovani erano questi entrambi di robusto temperamento forniti, di umori altronde sani, ed attaccati da un panericcio di terza specie per causa d'un colpo esterno, che l'uno aveva ricevuto al pollice, l'altro al dito medio della mano sinistra. Si trovavano questi due infermi nelle già accennate circostanze, in cui i Chirurghi bruscamente pronosticano pessime conseguenze al paziente, se prontamente non si assoggetta all'amputazione del dito. Allora con animo franco e deliberato si decisero pronti a sostenere non meno la malattia, che la minacevole faccia de' Chirurghi, senza però mai adattarsi al taglio del dito. Or questa determinazione riuscì loro più vantaggiosa delle dotte persuasioni de' Professori che gli assistevano; poichè entrambi in capo a quattro mesi guarirono perfettamente, essendosi riprodotta oltre alla parte d'osso cariata, i tendini ancora, ed i muscoli, e le altre parti a queste adjacenti, di modo che ora si servono delle loro dita così liberamente come innanzi di essere incomodati dal patterecchio. Io non sono qui al caso di descrivere partitamente le progressioni regolari della natura nel separare le parti guaste dalle sane, e nel risarne delle nuove; ma posso però nominare i soggetti che portano in trionfo questa maravigliosa guarigione, uno di questi è il Sig. *Luigi Obicini* molto vantaggiosamente conosciuto

non solamente nella città di Pavia, ove soggiorna, ma anche in varj paesi dello Stato Sardo, l'altro poi è un povero contadino chiamato *Pietro Verbino* del monte di Brianza.

Convien però riflettere che dominando negli umori una discrasia rachitica scorbutica, o venerea tutt'altro debb' esserne l'effetto, nè a me certo riuscì mai di vedere in tali casi quanto ho finora asserito. Fino dal dicembre dell' anno 1782 il Sig. *Domenico Quadri* Chirurgo in Milano mi invitò a visitare una Ragazza di sette anni, a cui avea appena levata la prima falange del dito medio del piede destro per una carie dipendente da veleno rachitico, onde era infetta fino dalla infanzia. Una forte curiosità m' impegnò ad osservare attentamente per più mesi se formavasi qualche riproduzione, ed a tale effetto, quantunque già vi fossero quei segnali, per cui passare all'amputazione, pregai il Chirurgo di ritardarla quanto più potesse per vie maggiormente assicurarmi di quanto cercava. Arrivato l'agosto del 1783 non si vedeva il menomo indizio di riproduzione, anzi al contrario si staccavano spontaneamente dei brani di carne, tutto il dito era ulcerato, e mandava un putrido odore cadaveroso. Laonde tolta essendo ogni speranza di riproduzione fu obbligato il Chirurgo, senza più oltre indugiare, ad amputarlo. Ora da questo caso, e da alcuni altri da me osservati nel breve mio corso di pratica ho dovuto assicurarmi, che in occasione di ossa distrutte da veleno rachitico non è possibile di ottenere riproduzione di sorta alcuna. Lo stesso dee dirsi della discrasia celtica, quando formata si la carie, o in qualche osso, come frequentemente succede nelle ossa del palato mobile, e nelle *turbinata* del naso, vivano i pazienti stentatamente privi di quella parte, oppure, come più sovente accade, terminano con una lenta morte vittime vergognose de' loro disordini. In caso poi di scorbutico appena è stato riserbato al Sig. *Lorenzo Nanoni* di vedere la riparazione d'una parte di mascella inferiore guastata per un' affezione di tale natura. In tutti gli altri casi dove lo scorbutico arriva a portar la carie, una trista esperienza c' insegna che si termina colla morte; per ispiegare dunque il fenomeno del *Nanoni* conviene credere, che il veleno scorbutico siasi nell'accennato caso depurato tutto da quella parte

di maniera , che insieme agli effetti distrutta siasi anche la causa con quella parte di mascella, che tanto prodigiosamente si riprodusse , poichè altrimenti essendo vegliante la cagione di questo disfacimento non si potrebbe capire come seguita fosse una tale riproduzione .

Opportunamente s' è fatta qui menzione degli umori . Di fatti esaminar se ne vuole diligentemente la condizione , nel caso di ottenere qualche riproduzione , dovendo questa dirigere il Chirurgo nel formare i prognostici in simili malattie . Noi abbiamo già osservato , che in tutte quelle distruzioni tanto di parti dure , come delle molli , le quali dipendono da un' esterna cagione , non manca la riproduzione . Anzi all' incontro tutte le discrasie presentano un ostacolo quasi insuperabile per la regenerazione , nè giova che esse sian combattute dagli adattati rimedj . La Ragazza rachitica , di cui abbiamo poco qui sopra parlato , è stata trattata coll' ente di Venere , col sapone Veneziano , coll' acqua ferrata , e con molti altri rimedj di tale fatta . Molti sono i casi che io potrei qui riferire da me raccolti nel giro di più anni , da che ho cominciato ad interrogare la natura sulle riproduzioni , e da' quali sono stato istruito che non è possibile di ottenere in tali circostanze riproduzione di forte alcuna . Non posso per altro dispensarmi dall' accennare il caso d' una Signora , la quale avendo perduto per una carie venerea , oltre le ossa turbinate del naso , quasi tutto il velo del palato , fu saggiamente consigliata di subire per la seconda volta l' unzione mercuriale per isradicare in questa maniera tutto il veleno celtico , e così togliere ogni ostacolo alla riproduzione delle accennate ossa ; ma la cosa andò altrimenti . La replicata frizione fece , che il mercurio disciogliendo sempre più gli umori svolgesse il rimanente invecchiato veleno , il quale unendosi ad un sudore notturno colliquativo , privò miseramente di vita l' inferma .

A R T I C O L O I V .

Della regenerazione dei nervi .

Finora abbiamo veduto come oltre alle ossa si rifanno i

muscoli, i tendini, e i vasi sanguigni, non eccettuate le grosse arterie. Resta ora da osservare se i nervi godono di questa bella proprietà. Noi ci riportiamo volentieri alle prove di *Cruikshens*, alle osservazioni di *Nanoni*, ed alle ingegnose esperienze di *Felice Fontana*, le quali ultime potrebbero bastare a dimostrare la vera, e vigorosa riproduzione de' nervi. La conosciuta maniera di osservare di questo Fifico può meritare molta fede, ed il diritto modo di giudicare di questo grand' uomo appo le savie, ed illuminate persone rende la sua autorità molto attendibile. Intanto vediamo prima d'ogni altra quali uano le riproduzioni de' nervi intraprese in Inghilterra.

Il Sig. *Cruikshens* valentiss. dissettore del celebre *Hunter* in Londra conservava già da alcuni anni nel suo Museo un vasetto con entro un pezzo di nervo dell'ottavo paio della lunghezza pressò a poco d'un pollice, nel quale vedevasi sensibilmente la riproduzione, come ho potuto rilevare da un esatto disegno, che lo stesso Signor *Cruikshens* si è degnato mandarmi da Londra. Mentre mostrava egli nel suo Museo questo raro rifacimento della natura; il videro pure alcuni dei nostri Italiani, a' quali venne talento di tentare la medesima esperienza. Uno di questi è stato il Sig. *Lorenzo Nanoni* Chirurgo della Real Corte di Toscana; e siccome avea potuto osservare, che la riproduzione pressò di lui era seguita in un nervo tratto dal collo d'un cane, ed in quella parte del nervo, che chiamasi ricorrente, a replicare esattamente l'operazione scelse appunto di tagliare il ricorrente d'un cane, e passato appena il breve spazio di dieci giorni, il nervo si riprodusse per modo, che rimase all' animale la voce, quale era dapprima. Venne quindi riflettendo questo osservatore, che l'ottavo paio è nel cane, come nell' uomo, alquanto scoperto nel collo; e volle perciò tentare un taglio, seguendo la direzione parallela dell'aspera arteria lateralmente alla carotide ove passa questo nervo, e ne fu anzi pel taglio distrutta una porzione. Ora da questa ferita non andarono più di quindici giorni, che risanato l'animale acquistò abbastanza di vigore per fuggirsene liberamente. (a)

R r r iij

(a) Sulla regeneraz. delle parti Simillari 1782

Qui però non s'arrestarono le esperienze del Sig. *Nannoni*; passò più oltre tagliando, e distruggendo in varj modi porzione del nervo ischiatico, e giunse fino a bruciarlo per la lunghezza d' un buon dito traverso mediante un bottone di ferro infuocato; pur nondimeno la porzione di nervo, che fu per tal modo separata, non lasciò in detto tempo di riprodursi perfettamente. Per tagliare il nervo ischiatico tagliò prima una porzione di muscolo Gran-gluteo, sotto del quale si nel cane, che nell' uomo passa il nervo ischiatico. Tali prove ebbero tutte un fortunato evento: egli anzi dietro le più esatte osservazioni asserisce, che non solo si riproduce il nervo distrutto, ma nascono ancora delle ramificazioni affatto nuove, le quali si distribuiscono poi alle parti vicine, e queste nel nervo ischiatico si è osservato spandersi nella parte posteriore della coscia fra i muscoli semimembranoso, feminervoso, e bicipite (a), nel ricorrente poi vide verso il muscolo sterno-mastoideo, verso la trachea.

Intorno però alle riproduzioni del Sig. *Cruikshanks* nacque qualche dubbio a *Felice Fontana*. Procedendo egli, siccome suole in ogni occasione, con estrema maturità, e delicatezza, osservata che ebbe in Londra la supposta riproduzione dei nervi, entrò in qualche sospetto, che la sostanza nervosa, e midollare si fosse allungata a segno di riunirsi insieme e formare una vera continuazione del nervo. A due ragioni appoggiava i suoi dubbj. La prima perchè in alcune esperienze da lui fatte a Parigi sul veleno della vipera non aveva mai osservato una vera riunione di parti nervose nel nervo ischiatico, che aveva tante altre volte tagliato. L'altra perchè nel nervo in questione poteva ben esserci una riunione di una parte all' altra per mezzo di una sostanza cellulare, e carnosa; ma non una vera riproduzione delle due estremità nervose in modo di formarne un sol nervo, quale era prima dell' operazione. Aggiunge pure, che lo stesso *Hunter* non vedeva in queste esperienze, che il nervo fosse veramente riprodotto, e che la struttura esteriore della parte tagliata differente da tutto il resto faceva sospetta-

(a) Vedi Esperienza 7. pag. 36

re a quel celebre anatomico, che la cosa fosse molto diversa. Se non che dalle esperienze del Sig. *Cruikshens*, riferite dal Fisico di Toscana, pare che la riproduzione sia abbastanza provata. Tagliò questo abile Dissettore non solo il nervo dell'ottavo paio, ma nello stesso tempo anche il nervo intercostale, e sì nell'uno che nell'altro di questi nervi pareva essere egualmente seguita la riproduzione. Nè aveva già il Sig. *Cruikshens* tagliati questi nervi al collo dell'animale da una sola, ma sibbene da ambedue le parti; che anzi tanto i due nervi dell'ottavo paio, come i due intercostali avevano subita tale operazione nel medesimo animale, come che ciò fosse in diverso tempo, e frapposto l'intervallo di circa venti giorni. Il Sig. *Fontana* chiama belle (a) le esperienze dell'Inglese dissettore; ma non lascia però di confessare, che per lui non son tuttora decisive. E perchè? Perchè tali esperienze provano sibbene, e fuori d'ogni dubbio che le estremità tagliate dell'ottavo paio, e degli intercostali, si riuniscono, quantunque se ne sia levata una parte; ma come dimostrare poi, dice egli, che questi nervi vengano così a formare una continuazione di vera sostanza nervosa, e midollare qual'era prima dell'esperienza?

Non ostante però sì forti dubbj del Sig. *Fontana* intorno alle belle esperienze del Sig. *Cruikshens*, noi vediamo provata concludentemente la regenerazione de' nervi, non solo per le prove dell'Inglese dissettore, ma eziandio per alcuni tentativi felicemente riusciti allo stesso scrupoloso Fisico di Toscana; e quantunque al chiarissimo Autore non sembrano bastanti le osservazioni intraprese da lui medesimo a tal uopo, per dimostrare la riproduzione della vera sostanza nervosa, e midollare, pure considerando la natura dei fatti, e delle circostanze combinate negli accennati esperimenti, si trova che le dubbiezze di questo grand'uomo, riguardo a tali riproduzioni, li riducono alla sola modestia di non asserire con certezza quanto non è ancora portato all'ultima evidenza.

Sacrificò il Sig. *Fontana* a tali utili esperienze molti Con-

(a) *Fontana sur les Poisons, & sur le corps animal. tom. II pag. 186. Florence 1781*

nigli, siccome quegli animali, che sono più comodi, e più facili a trovarsi. Alcuni erano da lui destinati all' incisione dei nervi ischiatici, e crurali; altri per quella del ottavo pajo, ed altri finalmente per quella dell' intercostale, e dell' ottavo pajo insieme. Or senza riferire partitamente i risultati delle sue ingegnose esperienze, egli è fuor di questione aver egli ben due volte osservato, che i nervi dell' ottavo pajo, dai quali se ne erano tagliate sei buone linee, si sono riprodotti; le due estremità allungatesi in forma di due coni, e riunitesi insieme perfettamente. Nè riman alcun dubbio sull' esattezza delle esperienze, troppo essendo conosciuta la scrupolosa maniera di codesto Filico nell' esaminare le operazioni della natura: ecco le sue parole. “ Tutto quello „ che posso dire con verità, è, che le estremità tagliate „ dei nervi si prolungano, si cambiano di figura, e di co- „ lore, e sono unite da una sostanza media, che è un „ prolungamento del tessuto cellulare medesimo delle due „ porzioni tagliate dei nervi, i cilindri tortuosi, ed i vasi „ sanguigni passano da una parte all' altra; e tutto è uni- „ to, come se la tonaca cellulare dei nervi fosse d' una so- „ la specie, quantunque ella sia molto più grossa, e più dif- „ uguale che in tutto il resto dei nervi (a).

Posso qui dunque domandare: i cilindri tortuosi, i vasi sanguigni, che passano da una parte all' altra del nervo riprodotto, il ritorno delle funzioni animali perdute colla distruzione del nervo, non faranno prove sufficienti a dimostrare una vera e vigorosa riproduzione? Ma facciamoci ad esaminare le difficoltà del Sig. *Fontana* su questo punto. Nelle ricerche che fece sulla struttura primitiva dei nervi, trovò che i cilindri primitivi de' medesimi sono coperti da un esterno involuppo, il quale altro non è che un ammasso di fili tortuosi. Quindi s' immaginava di avere ad osservare questa forma spirale passare da un' estremità all' altra del nervo riprodotto, e quantunque in più d' uno di nervi rifatti
 confessi

(a) *Fontana* sur les Poisons, & sur le corps animal. tom. II pag. 186. *Florence* 1781

confessi di avere vedute le spire (a) o sia più, o meno delle fibre bianche, pure non essendogli riuscito di scoprire che andassero da una parte all'altra del nervo rigenerato, ne inferisce essere incerto, che la parte riprodotta fosse veramente nervosa. Ma siccome lo stesso autore protesta di non avere avuti tutti i comodi, che farebbero stati necessari per assicurarsi d'una osservazione sì importante, e trovata tanto difficile; così svanisce anche quest'ultimo obbietto, esaminando soltanto alcune circostanze dei fatti, e valutando quanto merita ogni cosa che ne viene egli stesso narrando. Quell'intralcio di fibre, quello intersecarsi che fanno nelle parti riprodotte, e che osservò nella regenerazione de' nervi, presenta un ostacolo quasi insuperabile a quella oculare ispezione, che necessaria sarebbe per ben determinare, se la parte rifatta nei nervi sottoposti all'operazione tanto dal Sig. *Cruikshens*, che da *Fontana*, fosse veramente nervosa, e midollare, oppure altro non fosse che un allungamento del tessuto cellulare, col quale fossero uniti i nervi recisi, come vorrebbe lo stesso gran Fisico, che si sospettasse. Per decidere adunque della realtà di tali riproduzioni è uopo attenersi a quei fenomeni, che come effetti immediati dell'azione puramente nervosa dimostrano la loro presenza. Senza che lasciando ancora di fare ricerche su i comuni caratteri dei nervi sensibilmente marcati nelle riproduzioni; che diremo del ritorno della voce in quei casi in cui fu tagliato il nervo ricorrente? Che del riaversi che fanno dalla paralisi dell'articolo gli animali a cui fu tagliato il nervo ischiatico? Che del senso squisito in quelle parti, che furono tormentate dalle operazioni del Sig. *Nannoni*? Non sono eglino que-

Tomo IV.

Sff

(a) Il Dottor *Alessandro Monro* Prof. di Anatomia ad Edimburgo nell'opera sua grande dei nervi scritta in inglese, nella quale sono rappresentate al vivo le spirali dei nervi, ed i globetti osservati da *Felice Fontana*, pretende ciò essere una mera illusione ottica, mentre asserisce che collo stesso microscopio usato dal Sig. *Fontana*

(il quale ingrandisce gli oggetti ottocento volte) ha veduto le medesime spirali in tutte quante le sostanze organiche e non organiche ridotte ad una lamina sottile. Scrive in oltre di averne vedute negli strati sottilissimi di cera, e di sego, e fino in un sottil velo d'acqua ecc.

sti indizj di essersi riprodotto l'agente principale di essi, voglio dire il nervo distrutto?

Si oppone, che a produrre tali effetti basta la continuità dello stesso nervo, la quale può essere mantenuta anche dall' involucro cellulare, il quale unisca le due estremità del nervo distrutto in una sola fune. Ma se si vuole riflettere, che essendosi in alcuni casi sospettato quanto qui si asserisce della cellulare, si è poi osservato coll' iniezione essersi riprodotti i vasi, nel separare i quali si scorgevano le fibre nuove carnee (a), così non sarà fuor di proposito il credere tale essere la condizione de' nervi. Che che sia però di questo dubbio, qualunque finalmente voglia asserirsi la riproduzione o reale, od anche solo apparente, non si può negare che tornano le funzioni animali. E ciò posto in alcuni casi urgenti, e di ultima necessità non si avrà tanto timore di tagliare qualche nervo particolare. Si dovrà solamente avvertire, che le due estremità del nervo tagliato sian sempre situate una contro l' altra: ed è altresì necessario, che il Chirurgo avverta di non intraprendere per questo qualunque operazione, come per esempio l' estirpazione d' un tumore situato nella parte la più profonda del collo lateralmente all' aspera arteria, poichè in tal caso si potrebbe tagliare un grosso vase sanguigno, e la carotide medesima. Ora quantunque i vasi sanguigni si riproducano, pure il taglio d' un grosso vaso, che serva di conduttore al sangue, debb' essere più temuto di quello, che non sia il taglio di un nervo, potendo allora il paziente morire dalla rovinosa perdita di sangue, che succede al vase tagliato (b).

La nuova produzione del nervo distrutto segue lo stesso ordine, con cui si riproducono le altre parti nel corpo animale vivente. Compare una sostanza gelatinosa sotto le sembianze d' un filamento bianco ondeggiante, che si estende da un' estremità all' altra del nervo reciso, ed a poco a poco prende la consistenza, e l' uso del nervo primitivo, e queste progressioni si eseguiscano in pochi giorni. E ciò basta riguardo alla regenerazione dei nervi, vediamo ora quella del cervello.

(a) Vedi esperienza del Du-Hamel

(b) Nannoni oper. cit.

ARTICOLO V.

Ricerche sulla struttura del cervello de' Gallinacei, e sulla generazione di alcune porzioni di esso.

Gli Anatomici convengono che l'uomo contenga nella cavità del suo cranio maggior quantità di cervello in proporzione della sua mole, che non ne contengano gli altri animali più corpulenti. Il grande *Haller* nella sua opera riguardante la fabbrica e l'uso delle parti del corpo umano ci ha fatto osservare, che gli uccelli grandi hanno la massa del cervello in proporzione eguale a quella dell'uomo, e che ne' piccioli essa è anche maggiore. Sotto questo punto di vista mi sembravano a proposito i gallinacei per essere allo scopo delle mie esperienze più comodi di quello, che non sieno molti altri animali.

L'esposizione anatomica delle parti relative all'encefalo degli uccelli fatta dal Sig. *Malacarne* ha rischiarata moltissimo questa parte, e l'esattezza con cui sono descritte le ossa ha fatto perdere la speranza di pareggiarlo. Le notizie poi che egli ci ha dato ultimamente del cervello in particolare potrebbero impormi silenzio, se trovando d'aver seguita nell'osservare una strada affatto diversa non credessi per questa sola ragione di poterne parlare (a).

Le ossa superiori del cranio sono in proporzione dell'animale assai grosse, e formano nella loro unione superiore una spina tagliente interna più cospicua nella parte anteriore, alla quale corrisponde esteriormente una depressione; questa spina supplisce forse alla falce, che è strettissima, e vi sono due involucri di convenevole robustezza la dura, e la pia madre.

Il cervello ha la figura d'un cuore colla base indietro ,
Sff ij

(a) Questa esposizione anatomica trovavasi nel tom. I. pag. 147 nel tom. II. pag. 237 parte 1, e le osservazioni ri-

guardanti la struttura del cervello tom. III. pag. 141

e la punta in avanti: non ha circonvoluzioni come l'umano, ma è assai più molle, nè ha sulla sua superficie le vene sì copiose insieme, e sì cospicue.

Trovasi diviso in due da un solco longitudinale, entro cui scende una piccolissima ripiegatura della dura madre, che tien luogo di falce, indi li due emisferi o coni rimangono uniti per un certo tratto dall'intervento della pia madre; poi trovansi solamente applicati l'uno contro l'altro, e le loro pareti sono come radiate per moltissime fibre midollari che vengono dalla base del cerebro, come da un centro comune, e si spargono sopra le cinerizia.

I ventricoli sono laterali, assai piccoli: sotto il centro summentovato, che si può tenere per il corpo calloso, vi è il terzo ventricolo, in cui si distingue poca cavità; ma si vedono assai bene le due commessure del cervello. Il cordone midollare anteriore è rotondo, sottile, e sembra aver comunicazione colle anzidette fibre midollari. Il cordone posteriore è grosso piatto, composto di più funicoli, e va ad unirsi ai bulbi dei nervi ottici.

Questi bulbi nascono dal fine del cordone midollare trasversale posteriore, ed a lato della linguetta laminosa sono molto gonfi e rotondi, e midollari all'esterno, e si portano semicircularmente sotto i lobi del cerebro, e sopra le gambe discendenti di esso in avanti ove si congiungono, e danno origine ai due nervi ottici.

I bulbi sono cavi interiormente, e ripieni di sostanza corticale, alla quale son tramischiate alcune fibre midollari. La loro cavità finisce ove cominciano a ristringersi. Dall'esposto sembra che i due bulbi si debbano considerare fuori dei ventricoli laterali.

Al basso della commessura posteriore del cervello vi è una specie di velo midollare brevissimo, ed una settuccia midollare, che tien luogo della linguetta dell'uomo; dalla parte superiore di questa partono due fibre midollari una per lato, le quali si gettano sopra l'orlo superiore dei bulbi, e seguono il loro cammino; dalla parte inferiore sortono i nervi del quarto paio, che camminano separatamente sotto i bulbi.

Dal terzo ventricolo si passa al quarto, che è mediocrementemente ampio.

I lobi, e le estremità anteriori del cervello si stringono, terminano nei nervi olfattori, i quali non mi sembrano cavi: dietro l'unione dei nervi ottici si vedono le papille midollari, ed il fusto ben lungo, e cinericcio della glandula pituitaria.

Il cervelletto resta separato dal cervello per mezzo della tenda, che è profonda, ed esso poco o punto è esteso in larghezza, ma all'alto ed al basso vedesi un poco più rialzato. Vien composto di molta sostanza cinericcia come il cervello; non ha lobi, e pare solamente costruito di otto, o dieci lamine, alle quali devei aggiungere un lobetto centrale. Tagliandolo verticalmente appare qualche cosa di simile all'albero della vita nell'uomo; del rimanente è ricevuto il cervelletto in una cavità ossea particolare, e comunica per mezzo di un gran foro colla più grande cavità del cranio. Questo è quanto mi è caduto sott'occhio, riguardo alla struttura del cervello, non avendo potuto tutte iscoprire e verificare le parti di questo viscere degli uccelli da altri accennate. Vengo ora a parlare di alcune poche sperienze fatte intorno al risacimento di considerevoli porzioni di cervello.

Esperimento I.

Dopo aver distaccate tutte le piume, che sono situate sul vertice della testa, ho fatto un taglio longitudinale agli integumenti, che cuoprono le ossa; e messo in tal maniera a nudo il cranio con un ferro appuntato procurai di traforarlo, ed urtando mi riuscì di staccarne un buon pezzo corrispondente a tutta la parte laterale destra della gran volta. Con questa operazione si stracciarono anche le meningi, e saltò subito agli occhi il cervello, ed allora con un piccolo cucchiaretto pronto a tal uopo ne estraissi tre grani pesati di midollare sostanza. In appresso ho procurato di riadattare gli integumenti in maniera, che potessero ben coprire la ferita, indi con alcuni punti di cucitura, che i Chirurghi Italiani chiamano appellicciaio, la assicurai. Si lasciò subito l'animale in un giardino senza procurarli verun comodo, e questo si rimase stupido per qualche tempo, ma poi girando andò in traccia di alcuni grani di miglio, che v'erano spar-

si, e finalmente passate 24 ore era così vispo, che mi diede luogo a replicarne fu di esso la prova, così che un giorno dopo ho levata una parte dell' occipite, ed introdotto il cucchiajetto ne ho cavata una dose di cervello superiore a quella del giorno antecedente, e rimessi gli integumenti a mutuo contatto colla cucitura eguale alla prima, gli ho procurata la sua primiera libertà. Questo nuovo tormento rese il pollo più insensato che non comparve al primo cimento, teneva le ali mezzo spiegate colle piume dritte sul dorso, cadenti avea le palpebre, e barcollando dava segni non equivoci del suo mal essere; con tutto questo dopo alcune ore si riebbe, mangiò, e proseguì a star bene a segno, che al toccarlo si risentiva, e sapeva procurarsi una vendetta col becco; sei giorni dopo la prima prova si potè levare il filo, e nove giorni dopo l' ultima ferita si esaminò, e trovossi con sommo piacere non solamente rifatta quella parte di cervello che in due tempi s'era distrutto, ma cresciuto il volume di esso oltre l' ordinario, nè si poteva dubitare che ciò fosse vera sostanza midollare, poichè non era niente diversa dal rimanente.

Esperimento II.

Per il secondo tentativo servito mi sono d' una gallina giovine sopra cui fatta nel modo indicato l' operazione ne estraissi una egual dose di cervello, e cucii malamente la ferita. La mia negligenza però non lasciò di presentarmi uno spettacolo assai grazioso. Siccome la cucitura obbligava la gallina a tener la testa ripiegata verso il destro lato, per modo che gravitava fuori della sua linea di direzione, ne veniva quindi, che l' animale stramazza ad ogni passo, che tentasse di fare, riuscendo sempre dal lato destro la caduta; del rimanente si nutriva assai bene, nè mostrava altro incomodo che potesse far temere della sua vita; dopo otto giorni da che si trovava in questo stato, mi venne talento di provarmi a tagliare questa mostruosità, e feci quindi un taglio in croce al sito dove era stata fatta la cucitura, il che non ebbi sì tosto eseguito, che vidi apparire una porzion di cervello, la quale non tardai punto a distruggere col so-

lito cucchiaino, e cercando di staccare parte ancora di quella sostanza, che non era stata pregiudicata la prima volta; sicchè mi venne fatto di estrarre tre grani, e più ancora di midollare sostanza: questa carnificina fece cadere la gallina senza moto, e senza senso per modo che dalle persone presenti all'operazione fu creduta priva di vita. Pur nondimeno dopo pochi secondi ebbi campo di medicarla senza pericolo di morte. L'apparecchio era semplice, e consisteva in una sottile pellicina tratta dalla vescica d'un bue, ed in tre listelle di musolino spalmate col tenace cerotto di *Andrea della Croce*, sicchè fatti al meglio combaciare i labbri della ferita, vi applicai la pellicina a guisa d'un berettino, e la mantenni ferma colle accennate listelle: così medicato il pollo ho creduto necessario di chiuderlo in una gabbia, dove per due giorni rimase grullo, ed abbisognando dell'imbeccata per nutrirsi, se gl'ingozzava del pane bagnato. Cominciò poi a mangiare da se, e passati sette giorni, si lasciò libero; allora a poco a poco si distaccarono le liste, e dopo venti giorni avea perso il berettino, solida bastantemente essendo la cicatrice. Campò questa gallina fin otto mesi dopo l'operazione, al qual tempo si trovò morta; ed aperta la testa, si osservò che gli integumenti con una dura cicatrice aveano impedito all'osso di allungarsi; sotto di essi però si vedeva la riproduzione, la quale avea nella parte posteriore uniti i due lobi del cervello con molta irregolarità nel colore, e nella sostanza rigenerata, come che dove si era fatto il primo taglio il risacimento fosse più regolare.

Esperimento III.

La terza esperienza si è fatta sopra quattro soggetti, in due dei quali pervenni col taglio fino all'occipite, in vicinanza cioè all'apofisi, e ne estraissi nell'usato modo da entrambi una discreta porzione di cervello. Nell'uno si riprodusse la parte distrutta, ma non nell'altro, e ciò perchè non era avvertito di tenerlo nell'operazione capo volto, sicchè il sangue scolasse senza penetrare nella ferita. Di fatti nella dissezione del cadavere, comparve ripiena di sangue quella cavità, che si era formata, separandone la indicata parte

del cervello. Quanto agli altri due, risanarono entrambi ed uno esaminato dopo un anno avea riprodotto il cranio con un grosso bordo calloso; il cervello però non era rifatto sibbene come negli altri, avendovi de' tubercoletti di una sostanza più ferma del cerebro, che io ho giudicato tessuto cellulare ivi condensato a riempire quel voto.



Esperimento IV.

Per la quarta prova rialzato soltanto il cranio senza staccarlo, mi riuscì benissimo di estrarne una data dose di cervello. Non lasciò poi di attaccarsi il cranio nuovamente formando un poro sancoide all'intorno. Quanto al cervello, si era questo riprodotto, e si vedeva una legger cicatrice, che segnava il luogo dove aveva penetrato il cucchiaino.

Queste quattro sperienze sono dirette soltanto a dare un'idea del tenor di procedere, che in diversi modi s'è praticato. Del resto le prove fatte furono in grandissimo numero, e fortunato per la maggior parte fu il loro successo; e siccome però può riuscire stucchevole la relazione materiale uniforme senza riferire uno ad uno, ed in dettaglio gli esperimenti, mi terrò ad esporre soltanto i risultati più generali, che pur bastano a soddisfare la curiosità filosofica. 1. Si possono distruggere nei gallinacci entrambi gli emisferi del cervello impunemente, e con isperanza d'una pronta riparazione purchè non si tocchi quel centro, da cui partono come raggianti molte fibre midollari, centro che si può tenere, come si è detto di sopra, per il corpo calloso, che anzi in fatto di tale riproduzione qualora non si mantenga una certa compressione dove mancano le ossa del cranio, il cerebro lussureggia, e cresce nella riproduzione più del bisogno, di più cioè di quanto n'era stato separato. 2. La ferita penetrante i ventricoli laterali del cerebro non defrauda il curioso osservatore della bramata regenerazione, ma allora quando giunge a pregiudicare il terzo, e quarto ventricolo, reca la morte all'animale. 3. Il sangue che penetra nel cavo della ferita ammazza quasi all'istante il pollo, il che non fa una goccia d'acqua, o di vino, campando in questo caso le molte ore, e le intiere giornate con un movimento

vimento ondulatorio continuo della testa . Questi sono i risultati generali di molte, e molte esperienze che vado proseguendo onde illustrare sempre più questo interessante ramo di Fisica animale ; e siccome riguardo a grandi distruzioni di cervello non mancano ne' libri de' Chirurghi, e degli Anatomici osservazioni interessanti , ed analoghe alle esposte , non mi credo qui permesso di passarle sotto silenzio . Comincerò dunque da quelle, che possono fare immediatamente al caso , e verrò poi narrando quanto mi avvenne di leggere su questo proposito in autori degni d' ogni fede.

Un certo *Hartoecker* riportato da *Andrea Ottomar Goelike* (a) per assicurarsi che le ferite del cervello non sono assolutamente mortali, attaccò un cane ad una tavola , mediante un chiodo che gli traversava il cervello per un certo spazio di tempo ; dopo il quale distaccatolo , gli infillò per la ferita un po di vin del Reno, e senza che verun accidente gli sovraggiungesse fu ben presto guarito . Una esperienza poco meno che eguale la leggiamo pure nelle *Esemmeridi Germaniche* , che ne la raccontano come felicemente tentata, ed eseguita dal *Vedriez* ; ed il *Coiferne* (b) accerta di avere appostatamente scoperte le cervella dei bruti viventi, e di averle ferite, ed intatti i nervi, i loro principj, ed i ventricoli di mezzo, averle estratte senza che ne apparisse veruna offesa nè della voce, nè del respiro, nè del senso, nè del moto. I volatili, dice, quindi vivono qualche spazio di tempo senza cervello, come può ciascuno sperimentare per se stesso ne' polli tagliando loro il rostro di sopra colla metà del capo, e cavandone la maggior parte del cervello. Finalmente a tal occasione riferisce esser cosa familiare sino ai fanciulli il conficcare nella testa d' un pollo una spilla, per cui riportare non ne sogliono incomodo veruno, nè dare verun segno di dolore.

Quanto però mi ha incoraggiato ad intraprendere l' esperimento di distruggere una porzione considerevole di cervello

Tom. IV.

T t t

(a) Hist. Chirurg. antiq. & modern.
pag. 325.

(b) Miscel. Observ. Anat. & Chir.
pag. 112.

in un animale caldo , per vedere se si riproduceva , ciò fu la quotidiana osservazione tanto famigliar appo i Medici , ed i Chirurghi , che le fungosità , le quali nascono sul cervello umano , distruggere si possono impunemente senza pregiudicare le solite animali funzioni del cerebro medesimo . Questi funghi altro non sono , che una porzione lussureggiante della molle , e polposa sostanza di quell' importantissimo viscere , dalla di cui integrità , e perfezione il sentimento , e tutta l'umanità dipende . E di fatti tali escrescenze nascono allora quando viene per qualche accidentale cagione distrutta e separata una parte della *Calvaria* , così che non restando equabilmente compresso il sottoposto cervello , si erge oltre il suo livello e forma de' grossi tumori protuberanti , massime che le arterie del cerebro spogliate essendo di tonaca muscolare , cedono facilmente all'urto del sangue . La rapidità poi , colla quale sorgono improvvisamente in tali circostanze questi tumori , ha ad essi procacciata la denominazione di funghi . Il costume famigliare dei Chirurghi è di legarli , e stringerli con un filo di seta , così rimanendo intercetta la comunicazione degli umori , s' imputridiscono , e cadono : alcuni poi mal consigliati operatori distruggono questi tumori col mastice , o coll'olibano cotti nello spirito di vino , oppure con delle polveri astringenti . Che che sia però di questo metodo generalmente riprovato , in qualunque maniera si eseguisca la distruzione di questi funghi , sia con rimedj corrosivi , sia col taglio , egli è certo che una parte di vera sostanza molle e midollare del cervello può essere separata , e distrutta senza punto atterrare le funzioni animali . Anzi parlando dell' uomo in particolare , basta consultare lo *Schenchio* (a) e le dotte opere di *Morgagni* (b) e di *Haller* (c) per trovare esempj luminosi di persone che hanno sopravvissuto a forti lesioni , ed alla distruzione di parte del cervello , al quale proposito poi merita d' essere ricordata la famosa dissertazione del Sig. *La Peyronie* fin dal principio di questo secolo stata letta nell' as-

(a) Lib. I. pag. 18 Francford 1665

(b) Lettere 11. e 52

(c) Elem. Physiolog. lib. 10 Sect. VII.

§. 35 37 38

femlea della Società Reale delle Scienze di Mompeliet (a) in cui ha fatto vedere che possono essere tagliate, e levate alcune parti del cervello e che suppurandosi possono convertirsi in marcia, senza che l'infermo ne muoja, e senza che l'anima cessi d' avere le sue percezioni ordinarie, dal che egli ne inferiva che tali parti dovessero riguardarsi come indifferenti, non rispetto all' uso cui sono elleno naturalmente destinate, ma attesa la loro molteplicità, credendo che una parte supplir potesse al difetto dell' altra.

Discostandoci poi dagli animali di sangue caldo, e venendo a quelli di fredda tempra (b), meritano d'essere considerati i due fatti considerabilissimi riferiti dal *Redi*, l'uno di una testuggine che decapitata continuò a vivere per ventitre giorni, e l' altro di un' altra testuggine che priva affatto di cervello campò sei mesi; senza che v' ha forse chi ignora a' dì nostri che le rane, i rospi, le bisce, le vipere campano senza cervello un tempo più o meno lungo? L' Abbate *Spallanzani* ha pure osservato che alcuni animali conservano illesi i movimenti del cuore, e della respirazione anche dopo la distruzione del cervello (c), e l' Abbate *Felice Fontana* nelle sue ricerche Filosofiche sopra la Fisica animale ne racconta lo stesso, e più chiaramente ebbe a dire che, „on peut „ vivre lors même qu' une grande partie de la substance „ medullaire du cerveau est detruite (d)„. Le quali cose prese tutte insieme combinano a ben dimostrare che tutte le parti del cervello non sono necessarie alla vita; che se lumi ancora maggiori si volessero, si potrebbero questi acquistare quando le sperienze fatte sui polli si estendessero anche sui

T t t ij

(a) L'estratto di questa Dissertazione trovasi nel giornale de' Letterati di Trevoux in Aprile del 1709 artic. 45 pag. 599

(b) Gli animali di fredda tempra altrimenti chiamati a sangue freddo sono quelli, nei quali un cotal fluido non è niente, o quasi niente più caldo dell' atmosfera, o dell' acqua in cui vivono, così che introducendo il termometro nella bocca di questi ani-

mali, e facendolo pervenire fino al ventricolo, poco o nulla s' innalza, e lo stesso succede applicandolo al cuore, ed immergendolo nel vivo sangue, mentre tutto il contrario accade negli animali a sangue caldo.

(c) Dei fenomeni della circolazione.

(d) Giornale de *Rozier* 1781 marzo.

quadrupedi. I cani, i gatti, i moutons sono certo opportunissimi all'intento, ma prima di tutto importa di assicurarsi delle vendette, a cui sono pronti i cani, ed i gatti; in appresso si dovrebbe trapanare il cranio, ed acconcio riuscirebbe il trapano degli Inglesi: di poi levando col *tira-fondo* il pezzo d'osso segato tagliare si vorrebbero le meningi, ed introdurre sotto di esse un piccolo cucchiajo d'avorio, ed estrarre in tal maniera una porzione di cervello, il quale se mai in questi animali fosse più resistente di quello che si crede, sarebbe utile che i cucchiaj, di cui s'avrebbe a far uso, fossero forniti d'un bordo molto sottile. Fatta la separazione del cervello si dovrebbero riadattare le meningi, chiudere si dovrebbe il sito, dove è stato segato l'osso con un pezzo di cuojo bollito, il quale potesse levarsi all'occasione per esaminare gli andamenti della ferita. Questo metodo potrebbe servire anche per altri animali.

Non sarebbero però a mio parere adattati i cavalli per simile operazione, perchè essi hanno pochissimo cervello, dipendendo dalle ossa il gran volume di tutta la loro grossa testa.

Ma queste prove per altro richiederebbero un serio esame anatomico per istabilire de' limiti fino a' quali si estende la natura, operando la riproduzione, e per cavarne quelle utili conseguenze, che potrebbero servire al buon esito di molte malattie chirurgiche. Quello però che si può con tutta ragione concludere si è, che la scienza delle animali riproduzioni è ancor bambina, nè dalle osservazioni che si sono finora intraprese si possono dedurre quei corollarij, che necessari sarebbero in una scienza il cui oggetto tanto è utile, e sublime. Quanto finora si è scoperto può dirsi un lampo di quanto resterebbe a scoprirsi.

Il grande *Spallanzani* (a), che fa balzare la testa dal tronco d'una lumaca, e in capo ad un mese lo vede rinato, che taglia alla lucertola acquajuola mani, gambe, e mascella, e coda, e strappa anche l'omero intero, e che il tutto

(a) Prodomo sulle riproduzioni animali dell' Abbate Lazzaro *Spallanzani* 1768 Modena

vede riprodursi, ha dato luogo all' illustre Filosofo Ginevrino il Sig. *Carlo Bonnet* di credere che il corpo di questi animali rinchiuda probabilmente una moltitudine di germi riparatori (a) appropriati a diversi generi di riproduzione, che si devono fare, e che ciascun germe si trova collocato e nel luogo e nella maniera che meglio conviene al suo sviluppo. L' uomo che riproduce dei grossi pezzi d' osso, dei brani di carne tagliati, e distrutti, avrà anch' egli questi germi riparatori? I polli, che rifanno delle porzioni considerevoli di cervello, godranno anch' eglino di questa bella proprietà? La bianchezza, e la trasparenza che costituiscono lo stato primitivo degli esseri organici, cioè quello stato che vien detto germe, e che si trova nel primo sviluppo delle parti che si riproducono negli animali a sangue freddo, sarà egli proprio anche dei caldi animali, e dell' uomo? Quanto è certo il primo, altrettanto di difficoltà s' incontra a dimostrare il secondo. In natura tutto è graduato, e tutto è disposto ad un tal uopo. I periodi della vita animale, e le mutazioni che si osservano sono effetti costanti, ed inviolabili di quella causa meccanica, e puramente materiale, che dà il moto all' animale fino dal primo momento della sua concezione.

Da tutte le fin qui esposte osservazioni riguardo le varie riproduzioni che succedono negli animali caldi, e nell' uomo medesimo abbastanza chiaramente si scuopre, che riguardo al tempo che la natura suol impiegare nel rifacimento delle parti distrutte siegue la proporzione con cui sta il glutine alla terra (b). Le ossa che contengono pochissimo glutine

Ttt iij

(a) Giornale di Fisica del Abbate Rozier mese di novembre 1777

(b) Tenendo dietro alla decomposizione delle ossa, de' muscoli, de' nervi, e delle altre parti che insieme unite formano la mirabile struttura del corpo animale, si risolvono finalmente in una terra friabile in massima parte calcare, ed un glutine che contiene qualche cosa d' infiammabile; la terra comunica alle parti animali la robustezza, e la loro solidità, mentre

per lo contrario il glutine rende queste molli, e più cedenti: di fatti dove grandissima è la quantità della terra in proporzione del glutine, massima pure è la durezza come si osservava nella rigida fibra ossea; e dove è minore, minore pure la solidità, come gradatamente si trova ne' muscoli, ne' nervi, e nel cervello, in cui in paragone della terra abbonda il glutine.

in ragione della terra sono più tarde di tutte le altre parti a riprodursi; vi vogliono dei mesi per queste, quando per le altre parti molli vi abbisognano soltanto dei giorni. La sola diversità che passa nella quantità del glutine, che si trova tra la fibra muscolare e la molle sostanza nervea, e midollare, dimostra questa legge che siegue la natura nell'ordine delle riproduzioni. Una ferita fatta ad un animale in venti giorni circa si cicatrizza, quantunque la perdita della sostanza muscolare sia grande. I nervi, che secondo le osservazioni Halleriane contengono una ventesima parte di terra, il rimanente tutto glutine, e questo più fluido, e più scorrevole delle altre parti, quanto più presto elleno si riproducono? Il Sig. *Lorenzo Nanoni* ci assicura che in meno di quindici giorni si riproducono i nervi, non eccettuato l'ischiatico comunemente conosciuto per il nervo più grosso.

La quantità del glutine, che si mischia nelle parti animali, rende queste più cedenti, e più facili a distendersi, e modellarfi: la giovinezza poi dell'animale, che è lo stesso animale più gelatinoso (a), presenta per questo riguardo una favorevole circostanza anche alle riproduzioni. Se ci allontaniamo un momento dagli animali caldi, e diamo un'occhiata al polipo d'acqua dolce, al lombrico, alla lumaca terrestre, e ad altri animali, così detti a sangue freddo che hanno fatto stordire il mondo per le maravigliose riproduzioni che si operano nei loro corpi, non sono eglino del tutto presto che interamente gelatinosi? La prontezza della regenerazione del cervello dee attribuirsi appunto all'essere composto d'una sostanza gelatinosa, e più molle del rimanente delle altre parti del corpo animale.

(a) Un agnello di poche settimane se si cuoce a lento fuoco, tutto si scioglie in una mucilagine non eccet-

tuate le ossa, lo che dimostra quanto sia gelatinoso un animale nei primi tempi della sua vita.

LE DIGRESSIONI

DI MERCURIO E DI VENERE

In Aprile e Maggio 1788, osservate in Verona

Dal Sig. ANTONIO CAGNOLI.

Prima di riferire le osservazioni che ho fatto di Mercurio e di Venere nelle loro digressioni di Aprile e Maggio 1788, esporrò una formola che ho trovato, atta a determinare il momento delle massime elongazioni de' pianeti inferiori sopraccennati con molto maggior precisione di quel che potesse farsi mediante il fin qui praticato metodo delle interpolazioni.

Fatta l'elongazione $= T$, la parallasse annua $= P$, il raggio vettore del sole $= R$, quello del pianeta, ridotto all'eclittica $= r$, si ha dalla proporzione de' lati co' seni degli angoli opposti, $\text{sen. } T = \frac{r \text{ sen. } P}{R}$. Ma nella massima digressio-

ne $dT = 0$. Dunque $\frac{r \cos. P dP + \text{sen. } P dr}{R} - \frac{r \text{ sen. } P dR}{R^2} = 0$.

Moltiplicando per $\frac{R}{r \text{ sen. } P}$, e trasportando, si ottiene

$$(A) \dots \cot. P dP = \frac{dR}{R} - \frac{dr}{r}.$$

Or se si faccia la longitudine vera del sole $= V'$, quella eliocentrica del pianeta ridotta all'eclittica $= u'$, la commutazione $= S$, farà $S = 180^\circ - (u' - V')$. Ma $P = 180^\circ - T - S$. Dunque $P = u' - V' - T$, e per conseguenza $dP = du' - dV' - dT$. Sostituito questo valore di dP nell'equazione (A), nasce

$$(B) \dots \cot. P (du' - dV') = \frac{dR}{R} - \frac{dr}{r}.$$

Al presente si ponga l'anomalia vera del sole $= V$, l'eccentricità dell'orbita terrestre $= E$, il semiasse minore della stessa $= B$, il maggiore $= 1$, il moto medio del sole in un istante di tempo $= M$, quello del pianeta nel medesimo istante $= m$, l'anomalia vera del pianeta $= u$, il semiasse maggiore dell'orbita di esso $= a$, il minore $= b$, l'eccentricità dell'orbita stessa $= e$, la sua inclinazione all'eclittica $= I$, e la latitudine eliocentrica del pianeta $= \lambda$. Ciò posto s'introducano nell'equazione (B) i valori di du' , dV' , dR , dr de' quali ho fatto uso nella Memoria sulle spazioni de' pianeti (Tom. III. di questa Società), essa equazion diverrà

$$\cot. P \left(\frac{mab \cos. I}{r^2} - \frac{MB}{R^2} \right) = \frac{mae \operatorname{sen}. u \cos. \lambda}{br} \\ + \frac{mab \operatorname{sen}^2. \lambda \cot. \arg. lat.}{r^2} - \frac{ME \operatorname{sen}. V}{BR}. \text{ Ma ho dimostrato in } \\ \text{detta Memoria, che } ma = \frac{M}{V a}. \text{ Se questo valore di } ma \text{ si } \\ \text{sostituisca nell'equazion precedente, indi quella si multipli-} \\ \text{chi per } \frac{r^2 \operatorname{tang}. P \sqrt{a}}{M}, \text{ si ha}$$

$$(C) \dots \operatorname{tang}. P \left(\frac{e}{b} \cdot r \operatorname{sen}. u \cos. \lambda + b \operatorname{sen}^2. \lambda \cot. \arg. lat. - \frac{E \sqrt{a}}{B} \cdot \frac{r^2 \operatorname{sen}. V}{R} \right) \\ = b \cos. I - B \sqrt{a} \cdot \frac{r^2}{R^2}.$$

Questa equazione dà il valore della parallasse annua al momento della massima elongazione, della quale si può determinare non solamente l'ora, ma anche il minuto esattamente. A tale oggetto si farà successivamente il calcolo della formola (C) per due momenti reputati vicini alla massima digressione. I valori di P dati dalla formola si compareranno con quelli corrispondenti dati dalle Tavole (corrette se faccia d'uopo con l'osservazione), e si avranno due errori. Da questi, se troppo grandi non sieno, si ricaverà per mezzo d'una semplice proporzione il momento nel qual
la compa-

la comparazione sarebbe senza errore, e quello farà il momento della massima elongazione.

Vengo ora a riferire le mie osservazioni di Mercurio, che furono fatte con triplice obiettivo acromatico di 40 linee di diametro e di 3 piedi 8 pollici di foco, egregiamente montato sopra una macchina equatoriale, inventata e costrutta in Parigi dal Sig. *Megniè*.

Li 18 Aprile 1788 a $16^{\circ} 26' 36''$ *t. m.* al meridiano di Parigi ho osservato la differenza apparente di ascensione retta tra ζ dell' Aquario e il pianeta $= 29^{\circ} 21' 48''$, 4; la differ. app. di declinazione $= 18' 56''$, 8; la stella essendo più australe del pianeta: inoltre la diff. app. di asc. retta tra la stella n.° 962 del catalogo di *Mayer* e il pianeta $= 15^{\circ} 40' 11''$, 4; la diff. app. di declinazione $= 5' 21''$, 0. Avendo riconosciuto, col mezzo della formola (*U*) che si trova all' art. 826 della mia Trigonometria, essere di $18'$ l'angolo del parallelo vero con l' apparente in virtù della rifrazione, ne dedussi che la prima diff. di asc. retta doveva essere diminuita di $12''$ per questa causa, e la seconda di $3''$, 4; all' incontro doverli aggiungere $6''$, 3 alla prima diff. di declinazione, e $1''$, 8 alla seconda. Per conto della parallasse di Mercurio ho poi detratto $7''$, 7 dalle dette differenze di asc. retta, e aggiunto $8''$ a quelle di declinazione.

L' ascensione retta di ζ dell' Aquario presa nel catalogo di *Mayer* e ridotta all'anno 1760 supera di $11''$ quella del *Bradley*, la cui declinazione all' incontro è maggiore di $8''$, 8 che quella del *Mayer*. Ho preso il mezzo, e per aggiungervi la precessione ho supposto quella in longitudine $= 50''$, 473 per le ragioni già dichiarate nell' altra Memoria che sta in principio del presente volume. La stella ζ mi ha dato l' asc. retta app. di Mercurio più grande di $14''$, 3 di quel che mi abbia dato l' altra stella n.° 962. Similmente la prima stella m' ha dato $6''$ di più dell' altra nella declin. app. di Mercurio. Ho tagliato per mezzo queste discrepanze, e con l' obliquità apparente dell' eclittica $23^{\circ} 27' 55''$, 5 ho concluso dall' osservazione la longitudine geocentrica apparente di Mercurio $= 3^{\circ} 12' 51''$, la latitudine australe $= 2^{\circ} 14' 23''$, 2. Dalle Tavole poi di Mercurio pubblicate dal Sig. *de la Lande* nel I. Tomo della seconda edizione della sua *Astronomia*,

ed in parte da lui corrette nella Conoscenza de' tempi per l'anno 1789, ho ottenuto, preso il luogo del sole in quelle del *la Caille* con sopprimere la nutazione ed aggiungervi l'aberrazione, ho ottenuto, diffi, la longit. geocentrica app. di Mercurio $= 3^{\circ} 12' 49''$, 3; la latitudine $= 2^{\circ} 14' 31''$, 5. Quindi l'error delle Tavole nella longit. geocentr. $= -1''$, 7; nella latitudine $= +8''$, 3: notando che ho preso l'aberrazione di Mercurio nelle tavole esattissime del Sig. *de Lambre*, che trovansi nel Tomo VIII. delle *Efemeridi* di Parigi alla pag. 101 dell' Introduzione.

Li 21 Aprile a $16^h 16' 32''$ *t.m.* sempre al meridiano di Parigi ho osservato la diff. app. di asc. retta tra ι de' Pesci e Mercurio $= 17^{\circ} 13' 0''$, 3; quella di declinazione $= 11' 37''$, la stella essendo più boreale del pianeta. L'angolo de' paralleli $= 44'$ produce $17''$, 7 di accrescimento alla diff. di asc. retta, e $4''$, 6 alla diff. di declinazione. La parallasse toglie $7''$, 4 alla diff. di asc. retta, e $7''$, 6 alla diff. di declinazione. Preso il mezzo tra le posizioni della stella, che di poco discordano ne' cataloghi del *Mayer*, e del *Bradley*, e fatto il resto come per l'antecedente osservazione, ho trovato la longitudine geocentrica osservata $= 5^{\circ} 41' 35''$, 7; la latitudine australe $= 2^{\circ} 33' 58''$, 6: l'error delle Tavole nella longit. geocentrica $= +4''$, 4; nella latitudine $= +9''$, 5.

Li 27 Aprile a $15^h 54' 44''$ *t.m.* ho osservato la diff. app. d'asc. retta tra γ de' Pesci e Mercurio $= 25^{\circ} 37' 35''$, quella di declinazione $= 4' 1''$, la stella essendo più boreale del pianeta. L'angolo de' paralleli $1^{\circ} 45'$ aumenta di $14''$, 7 la diff. di asc. retta, e di $7''$, 4 quella di declinazione. La parallasse all'incontro scema di $6''$, 7 la diff. di asc. retta, e d'altrettanto quella di declinazione. Presa dal *Mayer* la posizione della stella, e fatto il resto come sopra, ho trovato la longitudine osservata di Mercurio $= 12^{\circ} 0' 6''$, la latitudine australe $= 2^{\circ} 55' 3''$, 5; l'error delle Tavole nella prima $+13''$, 3; nella seconda $-2''$, 5.

Nelle digressioni egli è inutile tener conto delle perturbazioni, poichè il loro effetto è insensibile nella longitudine geocentrica; nè dagli errori osservati in questa si tratta di concludere correzioni per la longitudine delle Tavole, men-

tre sarebbe imprudentissimo dedur le grandi dalle minimè quantità, ma solamente per l'afelio e l'eccentricità. Se si considera poi che gli errori trovati di sopra, siccome tenui, potrebbero dipendere da qualche piccolo abbaglio nella osservazione, o nella posizione delle stelle, da cui fu dedotto il luogo del pianeta, resta intatta la presunzione in favor delle Tavole del Sig. *de la Lande*, e si può conchiuder che queste mie osservazioni confermano la bontà delle Tavole stesse. Solamente dagli errori in latitudine si potrebbe sospettare, o che il nodo debba essere avanzato un tantino, o piuttosto che l'inclinazione sia un pochetto più grande del dovere, come in fatti essa deve anche andar lentamente scemando in forza delle perturbazioni di Giove e di Venere.

Per investigare gli errori delle Tavole nella latitudine eliocentrica λ corrispondenti agli errori osservati nella geocentrica π , mi servo di questa formola comodissima,

$$d\lambda = \frac{d\pi \text{ sen. } 2\lambda}{\text{sen. } 2\pi}, \text{ la qual si ricava differenziando la nota for-}$$

mola $\text{tang. } \lambda \text{ sen. } T = \text{tang. } \pi \text{ sen. } S$, in cui sono costanti gli angoli T, S . In tal maniera ho trovato come segue gli errori nella latitudine eliocentrica risultanti dalle tre osservazioni di sopra esposte: $+13'', 8; +16'', 8; +5'', 0$. Che se anche s'impiegasse nel calcolar le osservazioni l'obliquità apparente dell'eclittica adottata dal Sig. *de la Lande* e maggiore di $8''$ della enunciata di sopra, non per questo ne nascerebbe variazione sensibile sopra le latitudini osservate, atteso che il pianeta si trovava vicino al coluro degli equinozj.

Finalmente tenendo fermi gli elementi delle Tavole ho rinvenuto col mezzo della formola (C) che la massima digressione di Mercurio in Aprile 1788 è avvenuta il dì 22 a $21^{\circ} 13' 54''$ *t. m.* al meridiano di Parigi, e fu di $26^{\circ} 59' 36''$ all'occidente del sole, il pianeta avendo trapassato l'afelio di quasi 16° .

Passo ora a render conto delle mie osservazioni di Venere. Li 21 Maggio ho osservato l'asc. retta apparente di questo pianeta $= 108^{\circ} 8' 37'', 4$; la sua declinazione app. $= 25^{\circ} 15' 35'', 4$ boreale. L'una e l'altra sono corrette del-

la parallasse, e dedotte dalle osservazioni concordi di *n* ed *A* de' Gemelli, le cui posizioni ho prese dal *Mayer*.

Li 22 del detto mese ho osservato mediante le medesime stelle l' asc. retta di Venere $= 109^{\circ} 17' 18''$, e la declinazione $= 25^{\circ} 6' 33''$.

Li 23 ho osservato $2^{\circ} 33' 8''$, 5 di diff. d'asc. r. tra Venere e α de' Gemelli, e $4' 4''$, 5 di diff. di declinazione, la stella essendo meno boreale del pianeta. Ho diminuito la prima di $8''$ per cagion della parallasse, aumentata la seconda di $6''$, 8: ed ho preso il mezzo tra le posizioni della stella che pochissimo discrepavano ne' cataloghi del *Mayer* e del *Bradley*.

Li 24 l' asc. r. app. di Venere $= 111^{\circ} 27' 36''$, la declinazione $= 24^{\circ} 47' 57''$, 8; ambe corrette della parallasse e dedotte dalle osservazioni concordi di ϵ del Leone e di α de' Gemelli. Ho preso pure il mezzo tra le posizioni della prima stella date con tenue differenza dal *la Caille*, dal *Mayer* e dal *Bradley*.

Li 26 ho osservato l' asc. retta app. di Venere maggior di $8^{\circ} 43' 28''$, 8 di quella di *m* de' Gemelli, la declinazione minore di $29''$, 2. Ho aggiunto alla prima $8''$ per ragion della parallasse, e $6''$, 7 alla seconda: ed ho preso la posizione della stella dal *Mayer*.

Li 6 Giugno trovai l' asc. retta app. di Venere maggior di $5^{\circ} 45' 18''$ di quella di 2μ del Cancro, la declinazione minore di $8' 39''$. All'una ed all'altra ho aggiunto $9''$, 3 per motivo della parallasse, ed ho preso la posizione della stella nel catalogo del *Mayer*..

Per quel che sia l' aberrazione e la nutazione delle stelle sopramentovate, mi sono servito delle Tavole generali comodissime del Sig. Abate *de Lambre*, e di *Lambert*, che stanno inserite nella *Conoscenza de' tempi* dell' anno corrente 1788.

Fatta la comparazione delle osservazioni precedenti di Venere con le tavole del Sig. *de la Lande*, che in grazia di successive riforme si trovano distribuite nel I. e nel IV. Tomo della sua *Astronomia*, e nella *Conoscenza de' tempi* pel 1789, ho ottenuto i seguenti risultati.

1788	tempo medio a Parigi.	longitudine geocentrica osservata	lat. bo- realegeoc osservata	error del- le Tavole nella lon. geoc.	error del- le Tavole nella lat. geoc.
21 Maggio	7 ^h 41' 28"	3 ^h 16 ^m 22' 40"	2° 49' 16"	+ 34"	— 40"
22	8 34 1	3 17 25 32	2 48 16	+ 20	— 23
23	8 0 31	3 18 24 47	2 47 16	— 9	— 12
24	8 15 19	3 19 25 15	2 46 15	— 3	— 11
26	8 47 15	3 21 24 49	2 44 7	+ 5	— 30
6 Giugno	9 10 20	4 1 46 12	2 18 43	+ 1	— 35

Siccome le due prime osservazioni sono troppo discordi dalle altre quanto agli errori nella longitudine, così dee sospettarsi un qualche fallo nell' osservazione del pianeta, giacchè la differenza osservata di asc. retta tra le due stelle, che servirono ambe le volte a determinare quella di Venere, va d' accordo con le posizioni del *Mayer*. Vi potrebbe essere alcun difetto in queste posizioni, o un qualche moto proprio nelle accennate stelle, ma bisognerebbe che si combinasse una giusta compensazione. Comunque sia, se si mettono da parte i primi due errori nella longitudine, gli altri quattro sono abbastanza tenui per confermar la bontà delle Tavole del Sig. *de la Lande*, sino almeno a più copiosi schiarimenti. Del resto la circostanza, in cui furono fatte queste osservazioni, cioè in vicinanza al dì 7 Giugno nel quale il pianeta si trovò nella sua distanza media, è propizia specialmente a far credere ben fissato il luogo dell' aselio.

Gli errori delle Tavole nella latitudine geocentrica, trasportati all'eliocentrica col mezzo della formola data di sopra, divengono come segue:

— 43", — 24" $\frac{1}{2}$, — 13", — 11" $\frac{1}{2}$, — 30" $\frac{1}{2}$, — 31". Il Sig. *de la Lande* ha già detto nella Conoscenza de' tempi pel 1789, che l' inclinazione dell' orbita gli pareva dover essere aumen-

tata di 15" circa. Gli errori precedenti avvalorano il di lui rispettabile giudizio, anzi persuaderebbero ad aumento anche maggiore, quando si creda esente di errore il luogo del nodo. Non tacerò per altro, che se nel calcolo delle mie osservazioni si adoperasse l'obliquità dell'eclittica voluta dal medesimo Astronomo, ciascun degli errori osservati nella latitudine geocentrica verrebbe a diminuirsi di 7" circa.

Stando intanto agli elementi delle Tavole ho rilevato col mezzo della formola (C) che la massima digressione di Venere nel Maggio 1788 è avvenuta il dì 29 a 17^b 16' $\frac{1}{2}$ t.m. al meridiano di Parigi con 45° 19' 30" $\frac{1}{2}$ di elongazione orientale.

Con questa occasione stimo non inutile render pubblici i metodi di cui mi servo per calcolare il luogo geocentrico di un pianeta, così dalle Tavole, come dall'osservazione, sembrandomi averli ridotti a più facilità e speditezza di quel che sia stato finora fatto.

Metodo per calcolare il luogo geocentrico di un pianeta dalle Tavole.

Siano la longitudine eliocentrica vera del pianeta	
ridotta all'eclittica	= L
la latitudine vera del medesimo, pure eliocentrica	= λ
il raggio vettore del pianeta, ridotto sull'eclittica	= r
la longitudine vera del sole, omessa la nutazione, e	
aggiunta l'aberrazione	= Λ
il raggio vettore del sole	= R
l'elongazione	= T
la parallasse annua	= P
la longitudine geocentrica del pianeta, che si ricerca	= G
la latitudine geocentrica	= π

Si farà il calcolo come segue:

$$\text{tang. } x = \frac{R}{r}$$

$$\text{tang. } \pm y = \text{tang. } \frac{1}{2} (L - \Lambda) \text{ tang. } (45^\circ - x)$$

Il segno — vale per y quando $x > 45^\circ$

Se $L < \Lambda$, si prenderà $360^\circ + L$ in vece di L

$$T = \frac{1}{2} (L - \Lambda) + y$$

$$P = \frac{1}{2} (L - \Lambda) - y$$

$$G = \Lambda + T$$

$$\text{tang. } \pi = \frac{\text{sen. } T \text{ tang. } \lambda}{\text{sen. } (L - \Lambda)}$$

Questo metodo serve generalmente per li pianeti superiori, come pegl' inferiori, e risparmia una moltitudine di regole date finora, bastando che si osservino quelle notissime circa i segni. E per dare in breve un esempio, il qual comprenda i casi più imbarazzanti per chi non sia familiarizzato con questa specie di calcoli, si supponga $\alpha = 65^\circ 10'$, $\frac{1}{2}(L - \Lambda) = 114^\circ 8'$; γ sarà negativo, $\text{tang. } \frac{1}{2}(L - \Lambda)$ sarà negativa, e per conseguenza sarà pur tale $\text{tang. } -\gamma$, laonde $\gamma > 90^\circ$: si avrà però $-\text{tang. } -\gamma = -140^\circ 40'$. Quindi $T = \frac{1}{2}(L - \Lambda) + \gamma = 114^\circ 8' - 140^\circ 40' = 333^\circ 28'$; $P = \frac{1}{2}(L - \Lambda) - \gamma = 114^\circ 8' + 140^\circ 40' = 254^\circ 48'$. Questi sono appunto i valori di T , P corrispondenti alla mia osservazion di Mercurio dei 18 Aprile: l'esser maggiori di 180° significa in generale che il pianeta ha passato l'opposizione o la congiunzione inferiore. Quindi è che alla verità sono i supplementi dei detti valori a 360° quelli che costituiscono gli angoli del triangolo; ma per proceder con metodo generale il qual soddisfi a tutte le formole e a tutti i casi, l'elongazione e la parallasse devono contarsi da 0° fino 360° cominciando dalla congiunzion superiore, ed in quella terminando. Di fatti nel caso presente la formola (C) dà positivo il valore di $\text{tang. } P$, come conviene se sia $P = 254^\circ 48'$, non già se si consideri $P = 105^\circ 12'$, che è il valore effettivo della parallasse nel triangolo.

Metodo per calcolare il luogo geocentrico di un pianeta dall' osservazione.

Siano l'ascensione retta osservata del pianeta . . . = A
 la declinazione = D
 l'obliquità apparente dell'eclittica = ω
 la longitudine geocentrica cercata = G'
 la latitudine = π'

Si farà il calcolo come segue.

$$\text{tang. } \alpha = \text{sen. } A \cot. D$$

$$\gamma = \omega + \alpha. \text{ Indi}$$

$$\text{tang. } G' = \text{tang. } A \times \frac{\text{sen. } \gamma}{\text{sen. } \alpha}$$

$$\text{tang. } \pi' = \text{sen. } G' \cot. \gamma; \text{ o pure}$$

$$\text{sen. } \pi' = \text{sen. } D \times \frac{\cos. \gamma}{\cos. \alpha}$$

$$\text{sen. } G' = \text{tang. } \pi' \text{ tang. } \gamma.$$

Le due ultime equazioni sono state proposte dal Sig. Abbate *de Caluso* (Mem. Torinesi 1785 Part. II. pag. 294). Ma fuori del caso, in cui si cercasse la sola latitudine, stimo non indegne della preferenza le due precedenti, atteso che la longitudine può sempre averfi con ogni esattezza per mezzo della tangente, non così per mezzo del seno quando sia poco lontana dai 90° o dai 270° . Così nell' antecedente equazione l' obliquità dell' eclittica solea farsi talora additiva talor sottrattiva secondo i casi, e facea d' uopo guidarsi con l' ajuto di una figura, così per questo, come per sapere in qual quarto dell' eclittica dovesse prendersi la longitudine cercata, e se la latitudine fosse australe o boreale. Io ho reso l' obliquità sempre additiva, e solchè nel corso di tutto il calcolo si osservino sempre le regole de' segni, non farà mai mestieri d' aver sott' occhio figura alcuna. Per la longitudine basterà riflettere che essa non può essere ne' segni ascendenti quando l' ascensione retta sia ne' discendenti, e così viceversa. La latitudine poi farà australe quando tang. π' riesca negativa. Per la stessa ragione si farà cot. D negativa, quando la declinazione sia australe.

Questo metodo, il qual serve indifferentemente per calcolare eziandio le longitudini e le latitudini delle stelle, è più spedito di quelli che ho dato (Trigonom. 740 a 743), ed è applicabile generalmente a quattro casi de' triangoli sferici. Dati due lati e l' angolo compreso, se dopo trovato uno degli angoli ignoti si voglia conoscere il terzo lato, o se viceversa dopo trovato il terzo lato si voglia avere un degli angoli, l' intento si ottiene con la semplice risoluzione di un triangolo rettangolo. Lo stesso ha luogo, dati due angoli e il lato compreso, se dopo trovato un de' lati ignoti si cerchi il terzo angolo, o se viceversa dopo trovato il terzo angolo, si cerchi un de' lati.

Finalmente quando si tratta di paragonare l' osservazione d' un pianeta con le Tavole, e definire gli errori di queste nel luogo eliocentrico, allora non faccio alcun uso del primo metodo esposto di sopra per calcolare il luogo geocentrico dalle Tavole, ma determinato questo luogo dall' osservazione per via del secondo metodo, vi applico l' aberrazione e la nutazione con segni contrarj a quelli che prescrivono le

no le tavole, e così converto il luogo geocentrico apparente nel vero: sottraggo dalla longitudine vera, così ottenuta; quella del sole presa nelle Tavole senza l'equazione della nutazione ma con aggiungervi l'aberrazione: la differenza è l'elongazione osservata, con la quale, e con li raggi vettori del sole e del pianeta dati dalle Tavole sull'eclittica, trovo la parallasse annua mediante questa comodissima formo-

la, $\text{sen. } P' = \frac{R \text{ sen. } T'}{r}$. Quindi aggiunto quest' angolo al-

la longitudine geocentrica vera, ho l'eliocentrica dedotta dalla osservazione, e paragonandola con quella delle Tavole, ne ritraggo immediatamente gli errori di queste nella detta longitudine eliocentrica; laddove col metodo antico si determinano in prima gli errori nel luogo geocentrico, per valersene poi da conchiuderne con doppia fatica di calcoli quelli del luogo eliocentrico. Dalla longitudine eliocentrica osservata detraggo quella del sole, ed ho la commutazione osservata. Con questa, con l'elongazione, e con la latitudine geocentrica vera cioè spogliata dell'aberrazione, determino la latitudine eliocentrica osservata, mediante la formo-

la, $\text{tang. } \lambda' = \text{tang. } \pi' \times \frac{\text{sen. } (L - \Lambda)'}{\text{sen. } T'}$; e questa latitudine

comparata con quella delle Tavole fa conoscer l'errore di queste nella latitudine medesima.

Questo metodo, che dal Sig. *Budge* nelle Memorie di *Stockolm* pel 1785 fu intrecciato ed accumulato non so perchè col metodo antico, è di per se speditissimo, e conduce direttamente allo scopo: nè può indurre in errore perchè a determinare il luogo eliocentrico osservato si adoprono i raggi vettori e la longitudine del sole presi nelle Tavole, mentre tutto ciò si adoprava già per avere il luogo geocentrico dalle Tavole e compararlo con l'osservazione; e quando s'erano così rinvenuti gli errori geocentrici, per dedurne poi gli eliocentrici si teneano per buoni e costanti i suddetti raggi vettori e la longitudine del sole.

OSSERVAZIONI E RIFLESSIONI

INTORNO ALLA TUNICA VAGINALE DEL TESTICOLO.

Del Sig. MICHELE GIRARDI

Al celebre Sig. FELICE FONTANA

Direttore del R. Gabinetto di Storia Naturale di Firenze,
e Socio di più illustri Accademie.

IO so bene che al giungervi di questa mia, voi stimatissimo Signore, vi farete le maraviglie, vedendo così tardi risposto a quanto voi mi chiedeste sino dagli ultimi di luglio dell' anno scorso intorno alla Dissertazione pubblicata dal chiarissimo Sig. *Giovanni Brugnoli* (a) riguardante la posizione dei testicoli nel feto, nella quale m' indicavate *di notare ciò che in essa vi trovavo degno di essere rilevato*, nè io vi darò il torto; giacchè appunto per questa tardanza avevo divisato di non più rispondervi, nè vi risponderei presentemente, se alcune combinazioni non mi avessero obbligato a farlo.

Quando ebbi la vostra lettera, non avevo ancor veduta la Memoria indicata, e fecero alcune circostanze che io non la potessi vedere che ultimamente, ed in tempo che mi trovavo occupatissimo. Avendo io avuto occasione di scrivere molto prima su l' argomento medesimo, ed avendo veduto in parte confermate le cose mie, potete immaginarvi, quale sia stato il mio piacere nel leggerla, e voi particolarmente, che avendo scritto su di molti argomenti, e sempre con quella precisione, chiarezza, ed erudizione che è tutta vostra, avete avuta occasione di vedere da altri più volte conferma-

(a) "Mémoires de l' Académie Royale des sciences Années 1784 1785 Seconde Partie. A Turin. 1786 pag. 13.

te le cose vostre, e da quelli particolarmente, cui il profondo sapere dalla comune dei dotti di gran lunga distingue. Nella dissertazione del Sig. *Brugnoni* vi ho ritrovato per tutto chiarezza, ordine, eleganza, e ciò che più torna cognizione intrinseca delle parti in cui ne scrive la storia, talchè a mio credere non v'è quasi cosa che o per l'ingegno, o per la precisione non meriti di essere giustamente lodata, e da me segnatamente, avendo egli le poche e tenui mie osservazioni tante volte ricordate e distinte. Niente meno però io so bene che voi non sarete per acquietarvi a questo mio ingenuo sentimento, e vorrete da me ragione di alcune pochissime cose, nelle quali sembra discostarsi in qualche parte dal mio sentimento, oppure di quelle ch'egli produce, e maggiormente illustra. Eccomi però a compiacervi, ed a dirvi ciò che mi sembra, lasciando a voi che sentite tant'oltre nelle cose Anatomiche e Fisiche il libero pensiero di giudicare di queste.

Si comincia quest'accurata dissertazione dall'esaminare la posizione dei testicoli nel feto, e veggio in questo confermarli intieramente quanto io ebbi occasion di vedere (a) ed altri prima di me, e segnatamente il celebre Sig. *Giovanni Hunter* (b) riguardo ai testicoli, i quali sono entro la cavità del ventre, nel sacco del peritoneo contenuti; all'epididime, vale a dire che sia non solo proporzionatamente maggiore nei feti, che negli adulti, ma che sia ancora meno al testicolo aderente, ed anche più dilungato; parimenti intorno alla flessuosa e serpentina disposizione dei vasi spermatici, come ancora del dotto deferente, e così per tacer di tant'altre nella descrizione della base che sostiene il testicolo, e discende all'anello inguinale, cioè che questa sia lata superiormente, e ristretta inferiormente, e quindi parte nelle tendinose inferiori fibre del muscolo obliquo esterno, parte nel lembo inferiore dell'obliquo interno, e parte superato l'anello abbia f : nei lati dell'osso del pube. A

Xxx ij

(a) *Jo Dominici Santorini septemdecim Tabulae* pag. 185. & seq.

(b) "Memoires de Chirurgie par George Arnaud. Premiere Partie pag. 12

questa descrizione però egli ne aggiunge una porzione ancora che termina nell' estremità dello scroto, le quali fibre appunto le hanno fatto ritenere il nome di *conduttore* anteponendolo a quello di *base*, come io la ho denominata. Io veggio bene da questo che voi potete facilmente domandarmi ragione perchè io abbia cambiato il nome di *legamento*, o *conduttore* apposto dall' *Huntero* a questa parte in quello di *base*; ed egli è ben giusto ch' io render ve la debba, protestandomi però affatto indifferente qualora a voi, o a chiunque altro piacesse meglio il nome di *conduttore*, che quello di *base*, giacchè il nome niente muta d' intrinseco alla storia medesima. Quando io cominciai le mie osservazioni intorno alla vaginale, mi sembrò da principio di vedere in un seto il legamento, o sia il conduttore del testicolo simile appunto come lo descrive e delinea l' *Huntero*, il di cui fine inferiore terminasse nell' estrema interior parte dello scroto, e però tale io lo descrissi (a); siccome però molte, e replicate osservazioni fatte dietro alla prima non mi hanno così facilmente confermata quest' estremità inferiore che termina nello scroto, ed avendolo inoltre quasi sempre veduto terminar come disse, fui d' opinione che meglio convenir le potesse il nome di *base*, che quello di *legamento*, o *conduttore*, e ciò per queste ragioni; prima perchè il testicolo, qualora risiede nella cavità del ventre, all' estremità sua superiore si poggia ed unisce, come se egli fu di una base fosse costituito; indi perchè ivi risiede e discende sempre a misura della discension della *base*, come è proprio di un corpo il seguir sempre le mutazioni del suo sostegno; poscia perchè alla struttura della *base* composta di fibre muscolari, di cellulare e di peritoneo, mal si conviene il nome di *legamento*; e per ultimo perchè il fine di questa essendo agl' inguini non può mai prestare l' impostole officio di condutor nello scroto, ove egli non perviene. Eccovi le mie ragioni, buone o cattive che siano, starà a voi il giudicarne.

Dopo pubblicate le mie osservazioni su questo argomento,

(a) loc. cit. pag. 189

qualunque volta mi venne occasione di esaminare dei feti, la struttura della *base* fu quella che m'interessò sempre, sopra tutto, e particolarmente la ricerca di quelle fibre che nello scroto discendono; quindi io ritrovo registrato ne' miei giornali:

Aperto un feto (li 9 novembre 1775) di nove mesi, ho trovati i testicoli discesi da entrambi i lati nella cavità dello scroto, e gli orifizj superiori chiusi intieramente. Nulla ho veduto che potesse aver relazione col legamento Hunteriano.

In due feti (li 12 gennaio 1776) di nove mesi abbiamo in entrambi trovati i testicoli nello scroto. In uno di questi gli orifizj superiori delle vaginali erano intieramente chiusi; nell' altro aperti. Nè nell' uno nè nell' altro vi era indizio alcuno di conduttore.

Ho aperto un feto (li 17 dicembre 1777) di sette mesi circa. Il testicolo destro era nella cavità del ventre, ma disceso molto, e prossimo all' anello. Il sinistro era passato l' anello, ma era ancora agli inguini. Non ci venne fatto di vedervi fibre che partissero dalle *basi*, in massima parte già rovesciate, e che passassero nello scroto.

Osservai un feto (li 5 novembre 1778) di nove mesi, il quale aveva il testicolo sinistro nella cavità dello scroto, con il corrispondente superior orifizio della vaginale già chiuso; il destro agli inguini, nè dalla *base* di questo si partivano fibre, le quali passassero ad unirsi all' estremità dello scroto. Vi si vedeva soltanto molta mucillagine intralciata di vasi.

Ho pubblicamente (li 28 gennaio 1779) in teatro mostrati a molti scolari e Dottori di medicina i testicoli di un feto di circa cinque mesi nella cavità del ventre appoggiati alla sua *base*, la quale terminava certamente agli inguini, nulla essendovi che discendesse sino allo scroto, il quale di sola mucaggine era tutto pieno.

Ho pure nel giorno appresso alli medesimi scolari, e pubblicamente mostrato un feto maturo di nove mesi, il destro testicolo del quale era disceso sino al principio dello scroto; aveva sotto il testicolo molta mucillagine, da cui però nulla certamente partiva che si potesse chiamare il conduttore, essendo la mucillagine stessa come notante, nè attaccata a

parte alcuna. Il sinistro testicolo poi era nella cavità del ventre, ma alquanto disceso, ed appoggiato alla sua *base*, e questa *base* discendeva per l'anello soltanto fino agli inguini ivi dividendo le sue fibre manifestamente parte a destra, e parte a sinistra terminanti e nell'osso del pube, e nei vicini muscoli. La grossezza di questa *base* al di sotto dell'anello corrispondeva incirca all'inferior sua parte, che ordinariamente si chiude nella cavità del ventre, se non se alquanto schiacciata. Quello però che vi ebbe di particolare, e che fu la sola volta che io il vidi, nè poscia mi venne più fatto di confermarlo, si fu che era tutta cava fino all'incirca dell'anello, e forse qualche linea più oltre. Questa cavità fu a tutti mostrata con l'introduzione di uno specillo, che liberamente fino all'indicato luogo passava. Aperta poscia per il lungo comparve un canale ben liscio, e levigato, come se appunto si aprisse per il lungo l'uretra stessa. La parte superior della *base* chiusa nel ventre era piena di mucillagine.

Ma troppo lungo e fastidioso farei certamente se tutte volessi trascrivervi le osservazioni che di anno in anno mi è avvenuto sino ad ora di fare su questo argomento: bastivi per il rimanente, che tutte assieme sono state fra loro coerenti, mostrando ad un dipresso quello che ho sino a qui accennato. Queste fibre però che compongono l'estremità della *base* inferiore non sono le sole che mi rubano il consenso del Sig. *Brugnone*, ma sibbene ancora la sede e la posizione della *base* mi fa contrasto, volendo egli che questa sia assolutamente dietro il peritoneo, in quella guisa medesima che dietro al peritoneo stesso scorrono i vasi spermatici, adducendone questa ragione (a) *quum enim a testis basi scalpelli acie bocce ligamentum separassem: nullo negotio peritoneum, quod ipsi pretendebatur, integrum removere mihi licuit, reliquo ligamento propria in sede permanente.*

Se io però non sono di gran lunga ingannato, a me pare che questo altro non si voglia dire, se non che levato facilmente il peritoneo dalla *base*, la *base* medesima restò nella

(a) loc. cit. S. V. pag. 17.

propria sua natural sede: la qual cosa se è così non so bene se questo esser possa sufficiente argomento per provare che la *base* sia fuori del sacco del peritoneo. Quelli che hanno fatto lo sperimento, tra quali certamente non si deve omettere il Sig. *Brugnone* (a), di separare senza alcuna macerazione la tunica esterna del testicolo nei fanciulli, la quale, come ognun sa, non è che una produzione del peritoneo, e continuazione di quella medesima che copriva da principio la *base* ed indi costituisce la vaginale, potrebbero per questo dire che i testicoli sono fuori del sacco del peritoneo; ma il Sig. *Brugnone* sopra tutti prova, e prova a ragione, che questi sono inchiusi nel sacco del peritoneo; dunque perchè si dovrà dire che la *base* resti esclusa dal sacco medesimo? Se è avvenuto, come lo è certamente, di levare intiero il peritoneo dalla *base*, restando questa nella sua sede, ciò è addivenuto, per quanto a me sembra, non già perchè la *base* sia fuori del peritoneo, ma sì bene per la lassa congiunzione che questa ha posteriormente con i muscoli *Psoas*, la cui congiunzione è formata e dalla cellulare e dal peritoneo che si piega da entrambi i lati ed ascende per coprire e formare in gran parte la *base*, in quella guisa medesima che ascende il peritoneo per formare il mesenterio e coprire il tubo intestinale. Che si direbbe se si vedesse, come si può veder realmente, nei feti, nei fanciulli, non meno che negli adulti ancora separarsi una porzione delle lamine che costituiscono il mesenterio e vanno indi a coprir gl' intestini, e poscia con continuazione levarla dalla superficie degli intestini medesimi? Si direbbe egli allora per questo che gli intestini fossero fuori del sacco del peritoneo? no certamente, giacchè levato questo istesso dai testicoli, pur si vuole che siano nella cavità del ventre nel sacco del peritoneo contenuti; ma e perchè così non si dovrà dir della *base*? Si vuol pure che i vasi spermatici ed il dotto deferente, che nei quadrupedi vengono ricevuti nella cavità del ventre, fra ampie e lasse piegature del peritoneo, siano per ogni dove dal peritoneo medesimo contenuti, *ab ipso peritonæo undique com-*

(a) loc. cit. §. XIX. pag. 26

prehenduntur; (a) ma e perchè così non si dirà della *base*? perchè si dirà che questa scorra al di dietro del peritoneo niente meno che i vasi spermatici, *retro peritonaeum non fecus ac vasa spermatica progrediebatur*? (b) E pure il risalto delle piegature contenenti i vasi spermatici nei quadrupedi non corrisponde in grossezza a quello della *base*, essendo maggiore in questa che in quelle, come ho più volte veduto nei cani, montoni, buoi ecc. Il peritoneo nell' uomo si estende soltanto al di sopra dei vasi piano e liscio, e questi non formano alcun rimarcabile risalto nel sacco del peritoneo, il quale non li copre che anteriormente in quella guisa che sono coperti i reni e le capsule sopra renali. E' egli forse lo stesso della *base*? Non è fors' ella non meno dei visceri prominente, e quasi fluttuante nel sacco del peritoneo? Non s' innalza ella dall' anello inguinale per sostenere nella sua sommità, e nel sacco del peritoneo il testicolo? Non farebbe ella, direi quasi, a guisa di colonna circonscritta, se posteriormente il peritoneo che forma una duplicatura, ed ascende per coprire la *base* medesima, come lasso legamento, non la tenesse ai muscoli mollemente attaccata? Ora tutte queste particolarità della *base* si dovranno avere per nulla? E se vi sono, come lo insegna a tutti la notomia, ed ora io lo veggio in due feti che ho qui presenti, sembrami di non aver tutto il torto se non giungo a comprendere perchè si voglia la *base* fuori del sacco del peritoneo, e ciò soltanto perchè venne fatto di levarvi intiero il peritoneo che la copriva.

Alla *base* esclusa dalla cavità del ventre vengono in seguito i *cavi process*i del peritoneo, i quali niente meno della *base* meritano di essere ricordati, giacchè da questi vuole egli tutta dedotta la *tunica vaginal* del testicolo. *Vaginalis tunica* (sono queste sue parole (c) *est idem ipse peritonaei cavus processus in abdomine patulus*. La descrizione poi di questo processo cavo è la seguente: *In utroque (d) imi abdominis*

(a) Brugnoni §. XXXVII. pag. 44

(b) Brugnoni §. V. pag. 17.

(c) loc. cit. § XVIII. pag. 24

(d) loc. cit. § VI pag. 17

minis latere e regione anuli abdominalis, ad latus internum gubernaculi in omnibus fœtibus cujuscunque ætatis, vel dum testes in regione lumbali sedent, ostium quoddam plus minus patulum in ipso peritoneo nunquam non vidi, per quod cum tenue specillum demitterem, in parvum oblongum saccum membranaceum aditus mihi erat, qui ceco sine ultra anulum in inguine, vel scroto desinebat. Ostium in abdomine eo magis patebat, quo longius a renibus testiculi descenderant, & fœtus enixui erat propior, minus quo erat tenerior & junior: in omnibus tamen vel quadrimestribus ostium & huic continuatum sacculum observavi. Io so bene che a questa esatta descrizione di fori e di lunghi sacchi, ai quali in seguito si dà il nome di processi cavi, ed a cui tanta attività vi si attribuisce, voi avrete da principio soffermata l'attenzione vostra, giacchè di questi appena si accenna nella mia storia della vaginal del testicolo (a), la quale con sicure prove voi gentilmente dimostraste che non vi spiaccque; e poco ancora di questi, ed in una nota soltanto se ne vede fatta menzione dall' *Huntero* medesimo (b). Siccome però questi processi per sentenza del nostro Autore tanto hanno di relazione con la *vaginale* accennata, così mi permetterete che mi trattenghi alcun poco per dirvene ciò che mi sembra di loro.

Che nella parte anteriore interiore ed esterna della *base* vi si vegga un foro, o piuttosto una rima e segnatamente allora che la *base* comincia a discendere, non vi sarà forse alcuno, che ben conosca l'intima struttura di queste parti che osi di richiamarla in dubbio; che poi questo foro presti sempre l'adito in un picciolo lungo sacco il di cui cieco fine sia oltre l'anello negl'inguini o veramente nello scroto allora che i testicoli sono nella cavità del ventre nella suprema sua parte costituiti, questo è ciò che potrà sembrare a taluno che meriti molto di essere confermato (c). E di fat-

Tomo IV.

Yyy

(a) loc. cit. pag. 193

(b) loc. cit. pag. 47 lett. TT. N. B.

(c) Che alle produzioni del peritoneo, che coprivano le *basi*, le quali già rovesciate costituiscono le *vaginali* de'

testicoli, si voglia dare il nome di processi cavi del peritoneo, come da alcuni viene usato, e che a questi del tutto si voglia attribuire le *vaginali* medesime, io ne convengo intieramente,

to che è mai in origine questo foro, questo sacco, o sia questo processo cavo, allora che il testicolo nella cavità del ventre in alto ed in vicinanza dei reni risiede? niente altro, potrebbe forse taluno rispondere, che una pura e preta piegatura del peritoneo ivi più laso che altrove, forse dalla natura premessa e disposta per facilitare a tempo opportuno il rovesciamento della *base*, la quale poco pochissimo si concentra nell' orlo anteriore dell' anello inguinale, indi ascende per coprirne la *base*. Che la cosa sia così lo mostra ad evidenza la Notomia; mentre recisi in un feto di poco più di tre mesi gli integumenti e scoperto esteriormente l'anello, per quanto interiormente ed in vicinanza del peritoneo vi si cerchi, null'altro si vede che le fibre che ascendono alla *base*, ed un tenue lembo della piegatura indicata. Quindi qualora si tiri superiormente nella cavità del ventre la *base*, il foro e la piegatura svanisce, ed ivi rimane liscio e disteso il peritoneo, come osservò pure l' *Huntero*, ed il Sig. *Brugnone* ancora; ricomparisce poi di nuovo e maggiore si fa, se si deprima la *base* verso gli inguini, oppure si tiri inferiormente verso lo scroto quel complesso di fibre che per l'anello inguinale ascende e si unisce alla *base*. La qual cosa mostra evidentemente che la piegatura o sia processo cavo del Sig. *Brugnone* va sempre in ragione contraria alla elevatezza e depressione della *base*; mentre qualora questa è ben prominente ed allungata, e sostiene nella cavità del ventre i testicoli nella maggiore di loro elevatezza costituiti, appena si vede vestigio di foro o processo; si fa indi e l'uno e l'altro manifesto, e cresce in proporzione a misura che la *base* unitamente ai testicoli s' abbrevia e discende; maggiore poi si fa, se minor sia l' elevatezza della *base* nel ventre, e massimo qualora svanita nella cavità del ventre la *base*, i testicoli hanno penetrato l'anello inguinale. Ora se

poichè questa è appunto la mia schietta sentenza, nè in ciò vi veggio altro che un nome di più: ma se all' opposto si pretenda che questi processi formino un sacco da se, siano dalle *basi* indipendenti, che presistano in origine

discendenti sino agli inguini ed allo scroto, e che questi siano quelli, che *testes ore aperto expectant* come dice il Sig. *Brugnone*, dirò che questo è quello che si oppone a quanto ho sino a qui con la maggior diligenza osservato.

questa è l'esatta proporzione che passa tra la *base* ed il processo, chi non dirà che questo sia una produzione di quella? Chi non dirà che il processo cavo altro non sia che un prodotto del rovesciamento della *base*, la quale deve necessariamente precedere la discesa del testicolo? Chi non conoscerà a chiare note l'importante opera della natura che seppe provvedere di *base* il testicolo, la quale ad un tempo stesso li servisse di sostegno e conduttore nella cavità del ventre, e di *vaginale* e difesa nella cavità dello scroto? Non è egli questa l'opera costante della natura di essere nelle sue mirabili operazioni semplice sempre, e facile, e piena? Perchè avrà ella dovuto creare un cavo processo dalla *base* disgiunto, se con la semplice produzion della *base* aveva a tutta l'opera importantissima dei testicoli e nella cavità del ventre, ed in quella dello scroto mirabilmente provveduto?

Che se la cosa non è così, dimanderei volentieri che sia avvenuto di quella lunga e spaziosa produzione di peritoneo che copriva la *base* nella cavità del ventre. O ella è rimasta nella cavità del ventre stesso, o è al testicolo precedentemente sortita. Se rimasta, imparerei volentieri a qual uso sia destinata; ma se è sortita, dove si è ella mai trasmigrata se non se nella *vaginal* del testicolo? Ma si mi risponde forse, è passata a costituire una massima parte del processo cavo; dunque è vero, dico io, che questo processo è una produzion della *base*. Dunque è vero, che la *base* è quella che rovesciata costituisce con tutta verità la *vaginal* del testicolo. Dunque è vero verissimo, che *basī inversa tota metamorphosis explicatur*, come insegnai sino dall'anno 1773, e pubblicai nel 1775 (a).

Tutto questo viene ancora maggiormente comprovato qualora si voglia un sol momento riflettere su la figura della *base* e quella della *vaginal* del testicolo: abbiamo veduto che la *base* è ristretta inferiormente, e lata superiormente. Se è dunque vero, come è cosa innegabile, che la *base* si vadi successivamente rovesciando, a misura che il testicolo discen-

Y y ij

(a) loc. cit. pag. 195.

de per formare la *vaginale*, ne avverrà che giunto questo nello scroto dovrà essere il fondo della *vaginale* lato, e la parte sua superiore ristretta; ma questa è appunto la figura esattissima della *vaginale*, cioè lata inferiormente, ove contiene il testicolo, e ristretta superiormente, ove comunica da principio con la cavità del ventre: dunque è innegabile che entrambi le figure convengono esattamente assieme: dunque la *vaginale* è un prodotto della *base*, cioè del peritoneo che copriva da principio la *base*.

Qui però sento a replicarmi da alcuno, ma di quel foro, di quella piegatura, o sia processo cavo, giacchè questa non è che questione di nome, che tu pure hai detto e pubblicato ritrovarsi all' estremità anterior della *base*, che ne addi viene dappoichè il testicolo è disceso intieramente nella cavità dello scroto? Volete voi saperlo? eccovelo schiettamente e con pura verità anatomica: Egli è passato ad essere la sola solissima parte suprema ed estrema della *vaginal* del testicolo, e quella sola che fa continuazione tra la cavità del ventre e la *vaginale*, qualora questa è ancora superiormente aperta, e che indi si contrae e si chiude, escludendo qualunque adito tra il ventre e la *vaginale medesima*; talchè si può dire francamente che tutta la *vaginale*, che copre e quasi circonda il testicolo, nell' uom già nato tutta tutta si debba intieramente al peritoneo che copriva da principio la *base*, ed al processo cavo quella sola ed estrema superior porzione che si ritrova conglutinata, dappoichè il testicolo si ritrova nello scroto da qualche tempo disceso.

Queste tenui differenze che tra me passano ed il Sig. *Brugnone*, voi ben vedete che non sono che poche ombre e diradate in paragone di quella molta luce che spande in tutta la di lui dotta dissertazione, e di quelle moltissime cose ancora nel sentimento delle quali conveniamo intieramente assieme. Una prova di queste si è ancora la struttura della *base*, nella descrizione della quale mi veggio in massima parte feco lui coerente, sebbene altri l'abbiano più immaginata che anatomicamente descritta. E qui io debbo a tutta ragione ringraziare il Sig. *Brugnone*, non tanto perchè a questo proposito abbia voluto ricordar me, e le poche cose mie, ma perchè egli abbia voluto ancora gentilmente fare la mia apo-

logia, alla quale forse per temperamento non avrei mai pensato, verso il Sig. *Palletta* di Milano, il quale avendo stampato su l' argomento medesimo sul quale io in Parma avevo pubblicato due anni prima, e forse rifatte le osservazioni medesime, le quali molto anteriormente alla stampa io aveva nel R. Teatro Anatomico pubblicamente mostrate, non li venne mai fatto di ricordar me, come se in questo proposito io non avessi detto cosa alcuna mai; il che non andando forse a sangue del Sig. *Brugnone*, o sembrandoli che il Sig. *Palletta* non avesse veduto che quello che io prima aveva osservato, ebbe a dire: *Eadem omnia que* Girardi, *duobus post annis vidit Palletta qui Mediolani Chirurgiam multa cum laude facit* (a). Guardimi però il cielo che io dica questo mai per dolermi del Sig. *Palletta*; so quant' egli vaglia, e so ancora quant egli sia onesto, e sono pienamente persuaso di quanto mi scrisse un suo e mio onoratissimo amico il Sig. *Giuseppe Baronio* valente Professore di Medicina in Milano, e cultore indefesso della storia naturale, come ne fanno fede le molte cose da lui accuratamente pubblicate, cioè che quando il Sig. *Palletta* pubblicò le sue osservazioni, non aveva cognizion delle mie, aggiungendo ch' egli conosceva ancora, che le sue a me in gran parte si dovevano come avrebbe pubblicato a prima occasione.

Persuasio io adunque di questo, non vi farà forse meraviglia, se vi dirò che ripassando alla sfuggita la terza edizione italiana (non so che sia della seconda, non avendola veduta) delle Istituzioni Fisiologiche del celebre Sig. *Caldani* P. P. in Padova di Notomia e Fisiologia, e pervenuto a vedere le correzioni ed aggiunte ch'egli ha fatte su la *tunica vaginal* del testicolo, rimasi, non tanto perchè egli taccia di me intieramente, di ciò n' era già persuaso assai, ed invece commemori e lodi il Sig. *Palletta*, ma perchè essendo egli di molta penetrazione fornito, in un argomento tanto oramai agitato, le di lui correzioni ed aggiunte risentano ancora delle passate sue cose, e se è lecito dirlo, sembra che queste siano men difettose ancora delle ultime da

Y y ij

(a) loc. cit. § XI. pag. 27

lui pubblicate. Egli lascia la lunga nota che aveva apposto al § 478 della prima edizione, e che nella terza è il §. 482, la quale formava in parte la sua difesa, e quasi tutto risponde ed accresce il §. 483 di quest'ultima per spiegare l'origine della *vaginal* del testicolo. Sono queste le sue parole: *huic subest (cremasteri) membranaceum involucrum a peritoneo productum; quod ad sedem anuli abdominalis contractum, meatum relinquit, per quem testis in fetu ex abdominis cavitate in scrotum descendit; dein infra anulum in bursam producit, que cum laxè testes comprehendat, & spermatici funiculi partem, idcirco vaginalis communis appellatur. Interim postquam testis, ipse quoque peritoneo arctè circumdatus, ex abdomine in scrotum delapsus est, meatus ille plerumque clauditur, quippe qui cum proxima cellulosa tela conferruminatur: ita peritonæum testem convestiens in superiori sede cum vaginali communi continuum videtur: ac propterea communis hæc vaginalis ad testem prope modum se habet, uti pericardium ad cor. Nempe quemadmodum pericardium laxè cordi circumjectum supra cor in se ipsam atque interius reflexum, huic visceri quaquaversus firmiter inhaerescit; ita communis vaginalis superius in se ipsam quasi revoluta & descendens testem velat, ipsumque valide completitur. Peritonæum cum teste hac ratione concretum dicitur vaginalis testis propria. Denique cellulosa illa, quæ spermatica vasa comprehendit retro peritonæum decurrentia, & quæ cum descriptis vaginalibus quodammodo coheret, vaginalis propria funiculi appellata fuit. Hæ tres vaginales secundum, idque proprium, testium involucrum constituunt. Postremum inter hæc involucri tunica est alba, ideo albuginea dicta, aliis nervea, quæ, uti vidimus, peritonæum habet exterius validissime accretum, quæque propriam testis substantiam coercet, eumque sic limat, ut in ovalem figuram assurgat; cujus apex obtusus ligamentum habens insertum fundo scroti alligatum, deorsum nonnihil spectat & interius, acutus autem extrorsum, & aliquantulum superius.*

Premessa quest'aggiunta, siani permesso di vedere ciò egli si voglia dire con questa. Omettendo in primo luogo che non sembra bene espresso che la *vaginal* del testicolo (così si deve intendere quel *membranaceum involucrum*) lasci un foro all'anello inguinale per cui nei feti il testicolo discende

nella cavità dello scroto, qualchè discendesse prima la *vaginale*, e lasciasse il foro per cui indi discendesse il testicolo, lo che è falso, mentre discende sempre il testicolo in continuazione della *vaginale* a cui sta tenacemente attaccato, omettendo dissi questo, egli aggiunge qui cosa più rimarcabile affai, cioè che la *vaginal del testicolo si conforma in una borsa, la quale comprendendo lassamente i testicoli ed una porzione del funicolo spermatico, per questo si chiama vaginale comune*. Voi ben vedete che questo non si può assolutamente comporre con la Notomia, giacchè mai e poi mai la *vaginal del testicolo* comprende, nè può comprendere una benchè menomissima parte del funicolo spermatico. I vasi spermatici, ed il dotto spermatico che compongono il funicolo, sono sempre stati, sono, e faranno sempre dietro il peritoneo sino che la schiatta degli uomini seguiti ad essere quella che è stata sino al presente: è questo un fatto così chiaro, che il contrastarlo oramai farebbe lo stesso che negare che splende di giorno la luce: ora un abbaglio sì manifesto in un libro che passar deve per le mani della studiosa gioventù non sembra egli ragionevole che meritasse piuttosto di essere levato, che intruso novellamente nel testo? Nè l'abbaglio termina qui, ma da questo primo ne nasce il secondo, il quale è maggiore ancora del primo. Dalla non retta dottrina che la *vaginal del testicolo* comprenda una parte ancora del funicolo spermatico, se ne fa un'inutile ed insufficiente divisione, e se ne deduce una *vaginale comune* del testicolo e del funicolo che non vi è mai stata, e che non vi può essere. Da ciò ne nascono due mali egualmente significanti; il primo che la Notomia scienza oramai per i nuovi ritrovati ed utili resa doviziosissima viene a rendersi, anzichè facile, più difficile affai da apprendersi, qualora vi si intrudono nuove ed inutili divisioni; l'altro, e che è maggiore affai, perchè imbevuta la studiosa gioventù d'errori difficilmente indi con gravissimo danno se ne spoglia, avverandosi pur troppo continuamente il detto d'Orazio: *quo semel est imbuta recens, servabit odorem Testa diu* (a).

(a) Lib. 1. Epist. 1.

Nè chi fosse condotto da vero spirito di criticare menerebbe forse buono al chiarissimo Sig. *Caldani* quel dire che *il testicolo è strettamente circondato dal peritoneo*, giacchè egli, seguendo l'immortale *Hallero*, non vuole il ventricolo sia dal peritoneo circondato, mancando questo nell'origine degli omenti, come manca ancora al testicolo ove il peritoneo forma quasi una capsula, per cui i vasi ascendono al testicolo, e dove ancora si forma il globo maggiore dell'epididime; ma non volendo di ciò fare commemorazione alcuna, mi trattiene con maggior ragione quel dire ch'egli fa che il foro della *vaginale* di sopra accennato, costituito all'anello inguinale, *il più delle volte si chiuda*; il che sembra ammettere, anzi ammette di certo, che il meno delle volte rimanga aperto. Ma che direbbe se gli dicessi che in centinaia e centinaia di cadaveri che ho osservati a questo fine due sole volte mi è avvenuto di vederlo aperto (*a*), ed una sola volta al Sig. *Brugnone* (*b*)? anzi io tengo per fermo che in queste tre volte come in quelle da me altrove accennate e da altri osservate (*c*) ciò sia addivenuto non già naturalmente, ma per causa morbosa, giacchè non sol io, ma quasi tutti lo hanno negli adulti costantemente ritrovato del tutto chiuso; il che, s'io non m'inganno, è stata questa l'unica causa, perchè tanti illustri personaggi, tra' quali il *WVinslow*, *Morgagni*, l'*Hallero*, e tra questi non m'è punto discaro di nominar anche il Sig. *Caldani*, hanno sostenuto che la *vaginal* del testicolo fosse procedente soltanto dalla cellulare del peritoneo, non già dal peritoneo medesimo.

Nè poi questo foro si chiude *perchè si attacchi o s'incolli con la prossima cellulare*. E' questa una dottrina molto aliena dalla verità. La Notomia insegna che la cellulare sta dietro il peritoneo, cioè copre la faccia esteriore del peritoneo; per conseguenza non può mai questa chiudere l'orificio superior della *vaginale*, che è tutto fatto della faccia interna del peritoneo, il quale come ognuno fa è tutta li-
scia ed

(a) loc. cit. pag. 198

(b) loc. cit. § X. pag. 20

(c) loc. cit. pag. 199

scia ed eguale, e spoglia certo di qualunque sorte di cellulare. Se questa fosse quella che chiuder dovesse l'orifizio accennato, converrebbe attribuirle quella forza e quell'azione medesima che si attribuisce ad una legaccia, mercè della quale stringendo la parte superior di una borsa venisse a chiuderne l'orifizio; ma queste due proprietà sono aliene affatto ed incompetenti con la cellulare; dunque non è vero che *meatus clauditur quippe qui cum proxima cellulosa conferruminatur.*

Ma mi si potrebbe domandare, d'onde dunque avviene ch'egli si chiuda? Questo si è egli un nodo non facile da sciogliersi, e per cui temendo di fortirne malamente, stimai meglio tacere che avventurar cosa non ancor bene da esatte osservazioni confermata. Il ch. Sig. Palletta (a) dice, che nell'uomo verticale i vasi spermatici ed il dotto deferente premendo anteriormente il margine posteriore del foro mentre che la parte anteriore viene compressa posteriormente dall'arteria epigastrica, fanno che il foro medesimo, mercè la vertical posizione a ciò molto opportuna, venga a costringersi, ed indi a chiudersi intieramente. A questo veggio non molto consentiente il Sig. Brugnone (b), il quale pensa che ciò possa avvenire dall'azione del muscolo cremastere che comprimendo la parte superiore della vaginale venghi insensibilmente a chiuderne l'orifizio, aiutato in ciò ancora dal peso del testicolo, il quale tirando in giù le pareti della vaginale queste vengano superiormente sempre più ad accostarsi tra loro, ed a procurarne con ciò l'adesione.

Io però avendo moltissimo di riguardo per la sentenza di questi Signori, dimanderei loro rispettosamente d'onde avviene che molti feti si veggono di otto, e nove mesi con i testicoli già nello scroto discesi, o da entrambi i lati o da un solo, i quali hanno i corrispondenti loro orifizj delle vaginali o chiusi intieramente, o prossimi a chiudersi in modo, che ricusano intieramente il regresso del testicolo nel-

Tom. IV.

Zzz

(a) Nova Gubernaculi testis Hunteriani anatomica descriptio. Medici. 1777

(b) loc. cit. pag. 43

la cavità del ventre? Simili osservazioni furono già da me pubblicate (a), ed altre non poche potrei aggiungere a queste, le quali comprovano ancora non essere sempre vero, che nei feti compiuti perfettamente gli orifizj superiori delle *vaginali* rimangano per una o due settimane aperti dappoichè il feto è naturalmente nato (a); mentre di frequente anzi quasi sempre si trovano chiusi; tali li osservò pure *Hunter* medesimo, ed il Sig. *Arnaud* aggiunge, che se fossero altrimenti vi farebbero più fanciulli, di quello che vi sono, all'ernie soggetti (b). Ora in simili casi, ove si veggono gli orifizj già chiusi prima dei nove mesi, nulla giovò a chiuderli la vertical posizione dell'uom già nato, come ha pensato il Sig. *Palletta*, nè il peso dei testicoli, come il Sig. *Brugnone*. All' opposto perchè in quelli che cresciuti di nove mesi, o poco appresso, i testicoli dei quali erano ancora nella cavità del ventre contenuti, non è avvenuto che dal muscolo cremastere si sia contratta l' estremità inferiore della *base*, o sia quella che si dice processo cavo, che è pur quello che si contrae qualora il testicolo è nello scroto disceso? Certo l' attività e forza del muscolo non può nè deve essere maggiore più in questi che in quelli. Eppure di simili osservazioni io non ne ho fatte mai, nè so che altri ne abbiano fatte. Per queste ragioni dunque nulla ho voluto pronunziare su questo, lasciando che osservazioni maggiori tolgano in ciò quella densa nube, in cui a mio credere ci avvolgiamo tuttora.

Ma per ritornare all' eruditissimo Sig. *Caldani* abbiamo certo veduto non essere la cellulare che chiude quest' orifizio, come egli ha pronunziato; nè tampoco sembra correr bene ciò che viene in seguito, cioè *che il peritoneo, che copre il testicolo nella superior sede, sembra essere continuato con la vaginale comune*. Cosa si voglia dire con quello *nella superior sede*, se con ciò s' intenda della cavità superiore del ventre, o pur di quella dello scroto, non è facile di rilevarlo; giacchè niuno potrà mai intendere a ragione che parlar voglia della sede superior dello scroto, ove certo la

(a) *Brugnoni* pag 26 §. XX.

(b) loc. cit. pag. 31 not. a.

vaginale è sempre la stessa, sia pure il testicolo nella superior sede o nell' inferiore costituito . Ma sia pur lo stesso che parli dell' una o dell' altra cavità, perchè deve dire con dubitazione *che sembra*, quando è vero verissimo che il peritoneo, che copre il testicolo sì nella cavità del ventre che in quella dello scroto, è queldesto che costituisce ancora la *vaginal* del testicolo ? Questa dubitazione sembra a me che s'ii mal nichiaa , perchè tiene il lettore in sospeso , nè fa bene che si abbia a credere . Quella porzione poi di peritoneo solo che copre il testicolo , con non poca confusione della studiosa gioventù lo chiama egli con nome particolare *vaginal propria* del testicolo ; e ciò per distinguerla così dalla terza che è la *vaginal propria* del funicolo , riconfermando in questa maniera le tre *vaginali* che aveva poste nella prima edizione delle sue Istituzioni Fisiologiche , sebbene con bizzarro innesto d'antico e moderno tutte rifuse e composte .

Nè crediate già che ciò sia detto mai per mancanza ch'io abbia di stima verso di un uomo , i di cui talenti meritano certo di essere apprezzati : una prova di questo si è quella che fino d'allora ch' io cominciai a versare su l' argomento della tunica *vaginale* il Sig. *Caldani* si fu il primo , o almeno uno dei primi ch' io consultai per questo . Ne conservo ancora due sue lettere , una scritta alli 15 aprile 1773 : l' altra li 7 maggio dell' anno medesimo , in cui con molto ingegno cerca di rendermi ragione per cui non poteva abbracciare la sentenza *Hunteriana* ; già appoggiato ai ricevuti principj che la *vaginale* fosse un prodotto della cellulare del peritoneo . La qual sentenza quantunque oramai da tante e sì manifeste osservazioni condannata , pure sembra che gli s'ii ancora attaccata , e lo faccia travedere , come a me pare che abbia traveduto ancora nelle note ch'egli ha voluto ristampate contro l' immortale mio maestro *Morgagni* , la cui memoria non potrà a meno di risvegliarmi sempre la più viva sensibilità , e giusta gratitudine . Io nulla debbo arrogare a me stesso , conosco la pochezza de' miei talenti , e so ancora quanto poco debbano essere valutate le cose mie ; pure se non m'ingannano tanti illustri e rispettabili personaggi , le cui lettere gelosamente conservo , m' hanno questi fatto credere che la confutazione di quelle note da me fatta con altre simili ed

apposte alla spiegazione della Tavola XV del *Santorini*, avesse per così fatta maniera posta la cosa in chiaro, che nulla più vi rimanesse a che dire. La qual cosa se è così, come ognuno può facilmente vedere, perchè voler riprodotte quelle sue note? Forse perchè non è rimasto persuaso di quanto ho scritto nelle mie? Si riveggano per grazia, e l'imparziale Lettore ne giudichi. Forse perchè il *Morgagni* gliene abbia data occasione? Ma come, e quando? Le doti morali che adornavano l'animo di quell'incomparabile uomo, e che alle scientifiche andavano certo di paro quando non le superavano ancora, fanno certa fede che non voleva, nè men provocato, offendere mai alcuno. Forse perchè io l'abbia nella confutazione offeso? Se ciò sia, me ne appello a tutto il mondo; io ho trascritte le sue parole, ma ne ho taciuto il suo nome: ho confutata la sentenza, ma rispettato l'Autore, chiamandolo anzi sempre prestantissimo; all'opposto ho studiosamente cercato *honoris causa* di nominarlo; ho pubblicamente commendate le opere sue; che dunque potevo fare di più? Forse non ha egli veduta l'opera mia, le Tavole del *Santorini*? Ciò potrebbe essere, ma non sembra credibile per un Professore di Notomia quale egli si è, e massime dopo i molti elogi che universalmente vennero fatti a quelle Tavole; e d'altronde mi sembra di travedere ch'egli abbia anche lette le spiegazioni; giacchè fra l'altre cose avendo io avuta occasione (a) di accennare cosa che apparteneva al § 379 della prima edizione delle sue Istituzioni Fisiologiche, egli nel § 383 della terza edizione, che corrisponde al § 379 della prima, ha fatta un'aggiunta che sembra a ragione relativa a quell'istesso che io in allora avevo accennato.

Ma lasciamo questo nostro illustre e celebre Collega per cui certo conserverò sempre sentimenti particolari di stima, e ritorniamo alla dotta dissertazione del Sig. *Brugnoni*. Nel §. XVI per spiegare che *il muscolo cremastere è lo stesso che il conduttore inverso*, egli sì meco conviene nell'inversione della base medesima, che sembra quasi incredibile che nel

(a) loc. cit. pag. 86

tempo ch'egli osservava l'inversione del cremastere non abbia veduto quella ancora del peritoneo che copriva nella cavità del ventre il cremastere stesso; giacchè l'uno è all'altro così aderente che non può rovesciarsi assolutamente l'uno, senza che lo stesso siegua ancora dell'altro, nè può discendere il testicolo e penetrar nello scroto senza il rovesciamento d'entrambi, stando egli nella di lui parte inferiore al peritoneo ed al cremastere tenacemente attaccato. Conferma indi egli pure accuratamente al §. XXI le cicatrici o siano vestigia che di frequente si veggono nella superficie interna del peritoneo, per ove i testicoli sono usciti dalla cavità del ventre, le quali talvolta sono così manifeste che sembra incredibile, come tanti illustri ed accurati Anatomici che ci hanno proceduto, non vi abbino posta mente nell'investigazione della *tunica vaginale*, e più ancora come di presente alcuni a fronte di queste giornaliere osservazioni vogliano nell'origine della *vaginal* del testicolo confondere la cellulare del peritoneo col peritoneo medesimo. Siccome però mi è stato facile di riconfermare più volte queste cicatrici, ch'io pure altrove avevo accennate (a), così in niun cadavere di adulti o più avanzati ancora mi è più riuscito di veder aperta la comunicazione che passa tra la cavità del ventre e la tunica vaginal del testicolo; quantunque a ciò v'abbia sempre riflessivamente osservato. Prova poi dell'accuratezza particolare del Sig. *Brugnone* si è la pazienza che si è data di aprire il collo già agglutinato della *vaginale* negli adulti; nel che fare oltre la giustizia che egli rende al chiarissimo suo Maestro Sig. *Bertrandi*, il quale sebbene senza conoscerla in origine elegantemente aveva già descritto quella parte agglutinata, produce un argomento di più per provare che la *vaginal* del testicolo è assolutamente una produzione medesima col peritoneo.

Poco pochissimo rimane ora a dirsi della seconda parte di questa dissertazione. Ricerca in primo luogo il nostro Autore, quali possano essere le cause, che dai lombi conduco-

Zzz iij

(a) loc. cit. pag. 193

no i testicoli nello scroto ; e dopo averne accennate alcune opina egli molto a ragione contro il sentimento dell' *Hunter*, e *Palletta*, che il cremastere v' abbia in ciò parte particolare . A me pure nacque il sospetto che le fibre del muscolo medesimo fossero in causa della discesa dei testicoli , quindi ebbi a dire (a) *num hisce musculi cremasteris fibris tribuenda actio illa , qua testis primum e sua abdominis sede removetur ?*

Comunque però siasi dell' azione di queste fibre , le quali è pur ragionevole il credere , che concorrano certo , quand' anche non formino la parte principale nella discesa dei testicoli ; questo è certo che i testicoli non cominciano mai e poi mai a discendere , se non qualora comincia la *basse* ad abbreviarsi , ed a misura che questa si va abbreviando , sempre a proporzione si rovescia e discende per l' anello inguinale , e da questo rovesciamento e discesa ne nasce la *tunica vaginale* , la quale allora viene ad essere intieramente perfezionata , quando i testicoli sono nella cavità dello scroto intieramente discesi : che poi la cosa sia così , e che in questa maniera discendano nello scroto i testicoli lo mostra evidentemente la Notomia . Più volte ho osservato nei feti i testicoli già nella cavità dello scroto discesi , mentre gli orifizj che danno comunicazione tra la vaginale e la cavità del ventre , erano intieramente aperti . In questi mi riuscì facilmente , come riuscì pure all' accuratissimo Sig. Dott. *Gasperotti* , qui pubblico incisore di Notomia , di far rientrare il testicolo e la *basse* nella cavità del ventre , e dal ventre rimettere entrambi nella cavità dello scroto , e ciò tante volte , quante ci venne in pensiero di rinovarne lo sperimento . Ora in questo si osservò sempre che la *basse* si rovesciava successivamente per penetrare dalla cavità del ventre in quella dello scroto , come pure faceva lo stesso per ritornare dallo scroto in quella del ventre ; e si osservò ancora e costantemente , che qualora la *basse* era discesa nello scroto e costituiva la *vaginale* , nella cavità del ventre nient' altro si vedeva , che l' orificio aperto all' anello inguinale ; e qualora la *vaginale* col testicolo si era rimessa nella cavità del ventre niente

(a) loc. cit. pag. 196

più di *vaginale*, oppur di peritoneo che potesse aver relazione con la *vaginale* medesima si vedeva nella cavità dello scroto. Ora che più per provare che la discesa dei testicoli dipende dalla discesa e rovesciamento delle *basi*, e che la *vaginale* è un prodotto del rovesciamento della *basse* medesima? E' dunque vero ciò che scrissi che *acta quacumque de causa deorsum basis, qua data porta exit: hac tamen ratione, ut qua deprimitur, invertatur basis, & vagina proinde efformari incipiat, quam testiculus ipse basim insequens jam jam subiturus est* (a). Queste cose tutte anzichè siano rigettate dalla Notomia, come pretende il Sig. *Brugnoni* (b), è la Notomia medesima che le insegna, e queste stesse me le dettò l'esatta osservazione quando scrissi (c): *Pressione successiva adactus alter testium e scroto pariter in abdomen reflicbat, rursusque in pristinum locum demissus, iterum in abdomen propelli potuit . . . Una cum teste basis ejusdem etiam e scroto in abdomen redibat, ast multo minus crassa, minusque distenta observabatur*. Le cose medesime ebbi occasione di confermare ancora più volte dopo la pubblicazione delle osservazioni mie sopra la *vaginal* del testicolo. Nè queste ponno sembrare per avventura oscure, come sono sembrate al Sig. *Brugnone*, mentre ognuno può comprendere facilmente come dal rovesciamento e discesa della *basse* nasca nello scroto la *vaginale*; e come dal rovesciamento di questa stessa rinascere debba con le condizioni accennate, nella cavità del ventre, la *basse* medesima. Qual cosa mai più facile, e più piana di questa? Che la *basse* poi sia nella cavità del ventre, e non fuori, come egli ha detto, mi sembra di averlo ad evidenza superiormente provato; come mi sembra ancora difficile assai il comprendere da che prenda argomento per asserir francamente che io abbia negato i fori agl'inguini: forse avrebbe potuto dire con più apparenza di vero che li ho ommessi, non già negati; sebbene nè meno ommessi, perchè, come ho mostrato, li ho per quello, che mi sono sembrati, ed erano realmente, schiettamente indicati. Il seguito poi di questa

(a) loc. cit. pag. 194

(b) loc. cit. pag. 40 §. XXXII

(c) loc. cit. pag. 190

interessante ed erudita dissertazione, o fu da noi altrove considerato, o riguarda la saggia applicazione della Notomia alla spiegazione ed illustrazione d'alcuni fatti, e segnatamente dell'Ernie congenite, delle quali ne fu già da altri ancora, e segnatamente dall'*Huntero*, e dall'*Arnaud* con molta utilità pubblicato. Il fine poi viene ad essere corredato d'alcune sagge riflessioni ch'egli fa alle ricerche del dotto ed accuratissimo Sig. *Vicq-d' Azyr* intorno alla struttura e posizione dei testicoli nel feto, pubblicate nella Storia dell'Accademia R. delle Scienze di Parigi l'anno 1780.

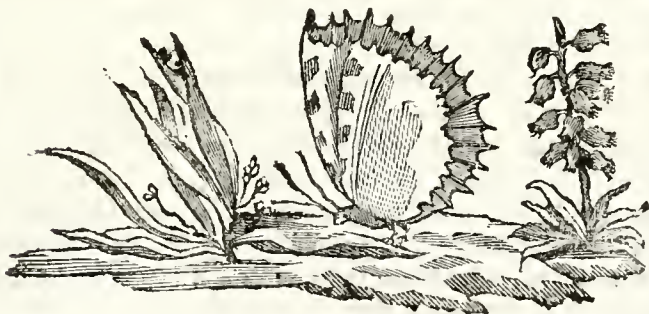
Queste ricerche, che io pure con particolar piacere aveva lette, vedendo in esse in massima parte confermarfi, quanto io aveva molto prima pubblicato, mi procurano una ben giusta compiacenza nel vedere che egli pure meco conviene nell'osservare che la *basse* non termina già nell'estremità dello scroto, come viene universalmente creduto, ma sì bene si perde e svanisce al di sopra dello scroto medesimo (a); dal che certamente ne avviene che i testicoli, passato l'anello inguinale, ivi alquanto si soffermano, oppure lentissimamente si movono per discendere nello scroto, come accuratamente osservò pure il Sig. *Vicq-d' Azyr* (b); giacchè ivi l'azione del muscolo cremastere si rallenta di molto nel procurare più oltre la discesa dei testicoli nello scroto. L'erudizion singolare, l'esattezza che io osservo in questa sua Memoria, mi conferma già nella stima particolare che io avevo di lui concepita per le molte opere pubblicate, e segnatamente per le di lui osservazioni sopra il cervello ed i nervi pubblicate nella Storia già sopra indicata per l'anno 1781, nelle quali ha egli gentilmente avuta più volte la bontà di ricordare le cose mie: siccome però oltre l'esattezza vi si scorge in esse una propensione decisa per la rettitudine, aliena sempre da qualunque spirito di partito, così sono certo che non sarà per spiacergli qualora a lui pervenisse questa mia lettera, se in passando accennerò, che non ben comprendo come avven-
do egli

(a) loc. cit. pag. 498 "se perd sous
le peau au-dessus du scrotum.

(b) loc. cit. pag. 503

do egli nella seconda Memoria delle sue Osservazioni ricordata l'esattezza particolare dell'immortale *Santorini*, reſti ſorpreſo perche non abbia fatta menzione alcuna nella figura prima della ſua tavola terza della *ſoſtanza perforata*, coſi dal Sig. *Vicq-d' Azyr* nominata, *ove ella certo dovrebbe eſſere indicata* (a), quando io nella ſpiegazione della figura medeſima, ben lontano di averla ommeſſa, alle lettere *bbbb*, in cui deſcrivo l'poſterior radice del nervo del primo paro dei cerebrali, la quale egli pure commemora nella deſcrizione della ſoſtanza perforata, coſi mi ſono eſpreſſo: *exterior vero & longior ex lobi anterioris & poſterioris intervallo emergit ex pluribus diſſectis conſtata fibris, prope quas interius plura foraminula conſpiciuntur, per quæ vaſa cerebrum ſubeunt.*

Sono con la maggiore ſtima ecc.



Tom. IV.

A a a

(a) où elle devroit être indiquée loc. cit. pag. 545.

M E M O R I A

OROGRAFICO-MINERALOGICA DELLE MONTAGNE BERGAMASCHE DELLE VALLI DI SCALVE, E DI BONDIONE.

Del Sig. GIOVANNI MAIRONI da Ponte, Cittadino
Nobile di Bergamo ecc.

P R E S E N T A T A

Dal Sig. GIOVANNI ARDUINO.

LA valle di Scalve, le cui minerali produzioni devono servire d'argomento a questa breve mia Memoria, è fra le componenti la parte montuosa della provincia Bergamasca quella che più d'ogn'altra sembra interessare la nostra curiosità e per la copia de' minerali che possiede, e per le filosofiche osservazioni, alle quali ella dà luogo. Essa confina colla Valtellina, ed è tutta rinferrata fra montagne altissime, le quali la circondano da ogni parte, non lasciandovi alcuna piana sortita se non se una angustissima verso il *sud* in mezzo a due eccelse rupi, tra le quali scorre profondamente il Desso, fiume suo principale, che va poi a scaricarsi in Ollio nella Valcamonica Bresciana.

Le sue montagne sono alcune di pietra calcaria (*a*), alcune di granito (*b*), e alcune di porfirite (*c*) e di schisto micaceo (*d*). Le printe vi stanno al *sud* e le altre al *nord*

(*a*) *Lapis calcareus rudis*. Cronstedt Sez. VII.

(*b*) *Granites rubescens cum quarzo pingui semipellucido*. Spec. 201 c. Wallerij

(*c*) "Roche composée de jaspe & de feldspath. Sixieme espece n. VII. Monf. de Launay. "Essai sur l'Hi-

stoire Naturelle des Roches", à Bruxelles 1786.

(*d*) "Les Roches feuilletés", del Sig. Saussure, parte da lui chiamata *Grati-vaine* e parte assegnate alla Spec. 203 del Sig. Wallerius, *Saxum fornacum*.

tutte corrofe, divallate, e fcofcese; ma le calcarie sono quelle, fulle quali maggiormente comparifce la rovina e la defolazione riportata dal tempo, dalla azione delle meteore, e dalle rivoluzioni fofferte dal globo nella progrefiva fua conformazione. Poca terra e pochi vegetabili veftono le une e le altre, principalmente fulle vette, dove anzi fi danno a vedere per lo più a roccie fcalpellate, e a guglie affatto nude.

Ho poi voluto fare per avventura qualche efame fulla reciproca difpofizione delle fofanze componenti quefte gran moli; e mi è riufcito di offervare che in quelle di prima origine le pietre granitofe, le fchifto-micacee, e le porfiriti fono frammifchiate le une colle altre, ficchè qui le prime fembrano formar bafe alle feconde, là le feconde alle prime, qui le ultime alle feconde, e là quelle a quefte, fenza fimmetria, e fenza ordine. In effe ho altresì ravvifati gl' indizj di vene metallifere.

Nelle calcarie all' oppofto io ho potuto chiaramente ravvifare le tracce di una regolare ftratificazione, o quelle di una confufione, che non può effere ftata prodotta che dalla forza impercettibile di orribili rivoluzioni fuccedute nella attualità del loro confolidamento.

In quefte ho rinvenuti dei marmi oftreaciti (*a*), delli teftacei (*b*), e delle altre fofanze derivative dal regno animale. Ma nelle prime mi è caduto frequentemente fott' occhio dell' ardefia (*c*), della pietra cornea (*d*), del serpentino (*e*), e delle altre materie: e quefte fembrano le più intereffanti la Mineralogia.

Dalle pendici delle più alte montagne, che formano il contorno alla valle, vedonfi in certa maniera fpuntare altre picciole montagnuole di un uniforme livello, le quali fi ftendono al centro della valle, e che altro non fono fe

A a a ij

(*a*) *Marmor Testaceum* fpec. 59, &
Calcareus Testaceus fpec. 55 Wall.
 (*b*) *Chamitæ* fpec. 507 Wall.
 (*c*) *Schiftus durus rafura albefcens*,
clangens, *Ardefia regularis* fpec. 157 Wal.

(*d*) *Corneus Fiffilis* fpec. 170 Wall.
 (*e*) *Serpentinus faxofus* fpec. 214,
 & *serpentinus pallide viridis* fpec. 183
 & aliz Wall.

non se un aggregato confuso di materiali d' ogni genere rispettivamente divelti dalle maggiori , da cui compariscono derivate .

Immediatamente sul centro della valle avvi una picciola striscia di pianura tutta di materie gregarie depostevi dall' acque , e che impedisce di vedere il congiungimento delle montagne alla loro base .

Chiuso l' accennato passo del Desso , le acque sue rigurgiterebbero necessariamente ; e inondando tutta la valle , vi formerebbero un gran lago . E chi sa che , prima che la natura con qualche de' suoi mezzi straordinarj aprisse questo passo , non esistesse quivi appunto un lago ? Molte altre osservazioni analoghe , che vi cadono facilmente sott' occhio , rendono sempre meno improbabile siffatta conghiettura .

Egli è tristissimo l' aspetto di questa valle : ma la natura ha compensate le sue orridezze coi ricchi tesori , che ha prodotti nelle viscere delle sue montagne .

Vi si trovano delle miniere di rame (a) , di zingo , di piombo , ed in grandissima copia di quelle di ferro , di cui veramente la valle abbonda sopra ogn' altra del nostro distretto . Vi hanno anche degli altri minerali , che noi andremo accennando nel far menzione delle miniere , alle quali si rinvencono uniti .

Si conservano tutt' ora ne' nostri Archivi le memorie , che quivi altra volta si cavasse dell' oro , e dell' argento . Il Feudatario della valle , ne' tempi in cui la patria nostra soggiacque al dominio di *Federico il Barbarossa* , dovea per condizione della Investitura far pervenire alla zecca di Bergamo l' oro tutto , e l' argento , che si traeva dalle sue miniere . Ad avvalorare sempre più questo fatto concorre la rac-

(a) Il rame vi si manifesta in più luoghi , siccome vedremo , con tali e tanti segni esterni , che mi do a credere quivi specialmente fossero le fodine , d' onde estraevansi a' tempi di Plinio , come egli ci lasciò scritto nel libro trigesimo quarto , capitolo primo della sua Storia Naturale , dove parlando egli di questo metallo disse " Ce-

lebritas in Asia , & quondam in Campania , nunc in Bergomatium agro , extrema parte Italiae „ , notizia ripetuta dall' insigne Mineralogo *Giorgio Agricola* nel libro secondo de *veteribus & novis Metallis* con queste parole " *Fuerunt insuper in Alpibus Salasorum ævis fodinae : Italarum in Bergomatium agro , & in Campania „*

colta, che anche a' dì nostri suol farsi di pagliette d' oro nelle arene del Serio, fiume che ha la sua sorgente in Valbondione, pertinenza nel civile governo di questa valle. Una miniera però formale di siffatti metalli, che ne contenga doviziosamente, fino ad ora non ne ho scoperta. Forse in que' tempi suolevasi cavare da alcune piriti e da altre miniere, che anche al dì d' oggi troviamo contenerne in qualche picciola dose; e la mancanza in allora di più ricche cave sarà stata quella, che avrà determinati gli uomini a coltivar queste, sebbene scarissime, oggidì poi rese quasi inutili dalle più doviziose ed abbondanti, discoperte e coltivate altrove.

Il ferro nella val di Scalve si trova per la maggior parte in istato di *calce* cioè a dire *calciforme*, colla mistura di altre sostanze, ed in varie combinazioni; sicchè se ne ha di adatto a differenti usi. Io ho osservate le sue vene disposte in forma di letti, ossia a strati molto inclinati, ed a filoni, piuttosto che in ammassi; ed esistono nelle pendici rivolte sull' arco orizzontale, che dal *nord-est* per il *sud* passa al *sud-ovest*.

Le sostanze, che accompagnano la miniera del ferro, sono sempre lo schisto, ed il granito, eccetto che nella Manina, montagna che alle calcarie congiunge le granitose, nella quale il ferro trovasi accompagnato anche dal tufi (a). Questo schisto argilloso è di un color azzurro-cenericcio (b), e molte volte giallognolo per la molta ocre, che contiene, e comparisce qualche volta vagamente dendritico (c).

Immediatamente sotto di questo schisto s' incontra una specie di granito, che forma il tetto della miniera, e che compenetrato dalla ferrea sostanza quanto più si accosta alla miniera medesima, viene a costituire ciò, che i Francesi chiamano *Gangue* e che i nostri Mineraloghi dicono *Molla*.

A a a iij

(a) *Stallactites calcareus figura inserta*: Cronstedt Sez. XII. c.

(b) *Schistus argillaceus friabilis cinereus* Linnei 38. 7

(c) Imita moltissimo il *Margodes Argillaceus* spec. 165 di Wallerio aggiuntovi il *Dendriticus* o il *Pictorius*.

Io attribuirei questa sostanza alla specie 212 del Sig. *VValle-rius* da esso lui denominata *Saxum Ferreum*. La stessa trovasi ancora sotto il corpo della miniera, dove viene a formare il letto, e va poi nuovamente a finire in un semplice granito (a).

Gli strati ed i filoni del ferro quivi variano molto nella grossezza, nella estensione, e nella ricchezza del minerale.

La maniera poi, colla quale viene cavato dalla terra, è tutta corrispondente alla forma favorevolissima, con cui la Natura ve lo ha disposto. Le scavazioni vi si aprono a galleria piuttosto che in altra foggia, con un poco di pendenza al di fuori, onde dare scolo alle acque, che vi filtrano. Si praticano direttamente sull' asse verticale della montagna per prendere di prospetto la miniera, la quale cercata di profilo sfugge non di rado alle indagini del montanista non perito. Giunto questi sullo strato minerale assai inclinato, siccome ho detto (b), sopra vi dilata trasversalmente i lavori. Accade frequentemente, che lo strato ossia filone medesimo venga attaccato in più luoghi fino a comunicarsi sotteraneamente le opere, e a doverli disporre i termini di confine, siccome sulla superficie della terra colle leggi della Geometria suol fare la civile economia.

Tratta dalla galleria la miniera ossia il minerale, nel qual artificio si fa moltissimo uso dello scarpello, della leva, e della polvere da schioppo, viene sottomeffa alle altre operazioni preparatorie alla fusione, che sono la *Torrefazione*, e lo *Scevramento* da ogni porzione di pietra non metallica. *Cottizzare* chiamasi da' nostri la prima: *Taizzare* la seconda di queste operazioni (c). Indi si trasporta al forno, in cui con veementissimo fuoco di carbone viene fusa e metallizza-

(a) *Granites* spec. 201 Wall.

(b) Parrà forse strana cosa che tutte le miniere da me osservate convengano nella forma di questa disposizione. Le da me visitate sino al fondo non sono veramente tutte le esistenti in questa valle. La stagione, nella quale ho potuto fare tali viaggi, è stata sempre la estiva non mai scevra di gravissimi inconvenienti, e

pericoli, quando vogliasi allora penetrare in quelle fodine affatto abbandonate in siffatti tempi dagli stessi scavatori.

(c) Ho creduto estraneo al mio assunto il minuto dettaglio di queste, e delle seguenti operazioni occorrenti alla metallizzazione del ferro, sulle quali farebbe poi necessaria una scientifica, e assai più ragionata relazione.

ta in ferro *crudo*, ossia *fragile*; il quale si traduce poi alle fucine, dove si fa subire gli altri trattamenti necessarj a conciliargli la malleabilità, e l'attitudine ai tanti usi, ne' quali viene impiegato con sì grande utile e comodo della società. Ma dalla generale passiamo alla descrizione particolare di queste miniere. Io ci conserverò quell'ordine, che ho tenuto nel visitarle.

Il monte Polzone, il quale veramente non è se non se una falda della grande Prezzolana, montagna calcaria celebre per la sua altezza ed estensione, fu il primo, che io visitai. Quivi sogliono presentarsi all'osservatore molti fenomeni della Fisica Generale con una grandezza ed una maestà, di cui gli abitatori della pianura non hanno idea. L'azione dei venti, e quella della elettricità atmosferica vi si esercitano con una forza sorprendente. Le nuvole vi si formano orizzontalmente all'osservatore e qualche volta sotto gli stessi suoi piedi; ed a me appunto accadde in tale occasione che, sceso essendo da quelle cime, un rumoreggiante temporale, che avevo avuto sotto a' miei piedi, trovai avere scaricata molta pioggia sul piano della valle, mentr'io su quelle altezze aveva avuto un sole brillantissimo, e spaziato coll'occhio sopra un mare di nuvole, che mi sottomettevano al guardo un oceano immenso.

In una delle sue vette laterali rivolta al *nord* composta di nuda pietra assai screpolosa, a gruppi, e con pochissima apparenza di stratificazione si vedono gl'indizj di una miniera; e poco sotto vi si trova aperta una galleria di pochi piedi, la quale attacca obliquamente la miniera stessa. Grande è la estensione del monte, che apparisce segnata dal minerale, o dalle sue emanazioni. Sembra che sia a gruppo piuttostochè a vero filone, ma certamente di una mole assai grande.

Esaminata e considerata questa miniera, io la crederei di rame mineralizzato dallo zolfo unitamente al ferro, antimonio, arsenico, e a poca quantità di argento, cioè

Cuprum Arsenico, & Ferro mineralisatum;

Minera albescens; Minera Cupri alba

Wall. spec. 352.

Io non ardirei di asserirla utilissima, giacchè segnatamente

i metalli proficui vi stanno in' assai scarsa dose , per quanto io ho potuto vedere , e prima di me osservò il celebre Sig. *Giovanni Arduini* ; ma nullameno, potendo essere più ricca nelle profonde viscere del monte, siccome accade non di rado nelle vene de' preziosi metalli , merita che se ne faccia conto .

In fianco dell' anziscritta miniera , e a duecento passi in circa dalla medesima se ne manifesta alla superficie del monte un'altra di „ piombo mineralizzato dallo zolfo , frammischiato di blenda con un po di pirite scomponentesi „ cioè

Plumbum Sulphure mineralizatum

Bergman §. 184 della sua Sciagrafia del Regno minerale volgarizzata da me e di note corredata .

Veramente non si può asserire ancora se ella piuttosto appartenga ad alcuno de' §. 185 186 187 , se non se col mezzo di una esatta chimica analisi, essendo una galena a minutissime , e quasi soltanto colla lente discernibili cubiche cristallizzazioni. In altri paesi consimili miniere si sono trovate convenientemente ricche d'argento ; ma questa piuttosto abbonda tratto tratto di blenda , ossia miniera di zingo . Dalla superfiziale scavazione , che vi si vede aperta , comparisce disposta in forma di gruppo , o cumulo , piuttosto che a filone .

Alle spalle di ambedue queste miniere sul colmo della montagna vedesi spuntare tratto tratto una copiosa stratificazione di „ spato-fluore „ *Fluor Mineralis* . Ella è diretta dal *sudest* al *nordovest* , inclinata verso il *nordest* sull' orizzonte trenta gradi incirca, e della grossezza di circa sei piedi . Forma di quando in quando delle arcate , e appoggia sempre sul calcario . E' sommamente screpoloso questo fluore , sopra tutto dove è esposto all'azione delle meteore ; e cangia di colore dal latteo-nebuloso all'acqueo-trasparente . Avvene anche di avvicinantesi all'ametestino, dal magnesio che contiene .

Fluor solidus albus. Spec. 77 Wall. a

parmi sia la specie , a cui si debba riferire .

All' *est* della miniera di piombo , e a picciola distanza dalla medesima trovasi dello „ spato-pesante „ cioè

Terra ponderosa vitriolata

Bergman

Bergman §. 89 della precitata opera (a)

Egli è di un color nericcio e propriamente il *Marmor metallicum* del Cronstedt .

Qui vicino sentesi il rumore come della caduta di un fiume sotterraneo , che si rompa giù per balze . Per mezzo di una screpolatura semiorizzontale strettissima e lunga introducendosi carpone , si arriva ad una grande vasca , a cui sovrasta una ugualmente grande volta . La vasca nella parte opposta è inaccessibile , e mostra di essere profondissima . Ne esce molto interiormente un ruscello perenne , il quale cadendo giù per una stretta voragine produce il rumore anzi-detto . Non ho veduto speco più orrido e spaventoso , segnatamente illuminato dal chiaror d' una fiaccola .

Merita qualche osservazione questo monte ancora per la strana configurazione delle sue cime . Egli è tutto come a scogli frammezzati da certe voragini a cono inverso , le quali mostrano di essere le volte sprofondate di vuoti sotterranei . Quivi sono alte e frequentissime le screpolature quasi perpendicolari . Servì tale aspetto a risvegliarmi nella fantasia a tutta prima vista la idea che quivi anticamente potesse aver esistito un qualche vulcano . Quindi mi diedi tutto al rintracciamento di quelle note caratteristiche , che sogliono accompagnare consimili effetti di sotterranei incendi ; ed in fatti mi riuscì di ritrovarci una pietra , la quale veramente le possiede tutte , e servì ad avvalorare il mio sospetto . Ella è una perfetta *lava* aderente ad alcune delle minori screpolature in fianco delle più grandi . Io la ho confrontata con quelle del Vesuvio , che conservo in serie nel mio Gabinetto , e vi è intieramente consimile .

Il Polzone , e la Prezzolana propriamente detta , la quale io in ispecialità non descrivo , perchè priva , come ella è , di sostanze metalliche non ha direttamente interessate le mineralogiche mie osservazioni , sono i monti , sui quali ho riscontrati i marmi ostraciti , ed i testacei . Vi ha ancora

Tom. IV.

Bbbb

(a) Pare veramente che il termine *Vitriolata* sia inutile , perchè già si fa non darsi in natura veruna *Terra-pe-*

sante scevra di acido vitriolico . Ciò notisi rapporto alla precitata opera .

dello schisto calcario (*a*), dell' argilloso (*b*), abbondantissimamente del gesso (*c*) e dello spato calcario (*d*).

Dalle cime del Polzone, con il cammino di quattr' ore in circa verso il *nordovest*, sempre attraverso di roccie, e di balze quasi inaccessibili, si giunge al monte Conchetta esso pure di pietra calcaria.

E' fama che quivi esistesse anticamente una miniera di metallo nobile. Oggidì il luogo, dove dicevasi esistere, è affatto coperto di frammenti di pietra rovinati da una vetta superiore, sicchè non mi è stato possibile di farvi alcuna osservazione. Ho potuto avere alcuno di que' pezzi cavati, già tempo, su quali si fecero degli sperimenti, che, per quanto mi si dice, riuscirono molto vantaggiosi. Ma per quanto io gli abbia esaminati, ed attentamente considerati, nessuno indizio vi ho potuto ravvisare di metallo prezioso. E la crederei anzi una miniera di "ferro calciforme concreta con molta ocra disciolta."

Dal Conchetta si passa immediatamente al Barbarossa, monte pure calcario. Con esso continua il luogo detto le Vignole, antico patrimonio della valle di Scalve, ma ora appartenenza di alcune Comunità della confinante valle Seriana. Quivi si trova una miniera di calamita, cioè a dire:

Ferrum mineralisatum, minera ferrum attrahente, & polos mundi offendente. Magnes. Wall. spec. 223.

Dal Barbarossa proseguendo il cammino, e ritorcendo molto sul *nord* si arriva sulla Manina. E' da notarsi particolarmente di questa montagna che il suo tessuto esteriore è tutto di terra vegetabile (*e*), e di una specie di tufo calcario (*f*), ma che il suo nucleo è di granito (*g*). Ella ha in fianco il Sassina, e il Cavandole, monti appunto di granito, e di schisto micaceo (*h*), in mezzo ai quali s' inoltra e resta seco loro nella stessa sezione di piano, nel mentre

(*a*) *Calcareus fissilis*. spec. 53 Wall.

(*b*) *Schistus friabilis cinereus*. Linnei 38. 7

(*c*) *Gypsum equabile*. spec. 68 Wall.

(*d*) *Spathum Lamellare*. spec. 16, & *arenarium* spec. 62 Wall.

(*e*) *Humus colorata Martialis*. spec.

2 Wall.

(*f*) *Stalactites calcareus incerta figura*. Cronstedt loco præcitato.

(*g*) *Granites*. spec. 201 Wall.

(*h*) Les Roches feuilletés di Saussure, & granites, specie anzidetta.

che dalla parte di mezzogiorno resta attaccata all' anzidetta montagna calcaria Barbarossa .

Io ho voluto propriamente vedere quali fossero le materie , che servivano di punto di congiunzione di queste due sostanze dalle prefate montagne tanto differenti nella essenza , e nelle epoche della rispettiva loro origine ; e mi è riuscito di osservare che un grosso serpeggiante strato di schisto argilloso non molto compatto (a) formava questo congiungimento .

La Manina ha la sua pendice settentrionale sotto la denominazione di monte *Fles* appartenente alla Valbondione , e se ne parlerà in seguito . Nella sua costiera verso mezzodì ha dieci o dodici cave di ferro . E in quella , cui io ho potuto visitare , vi è disposto in istrato colla inclinazione settentrionale di 27 gradi incirca e colla direzione dal *sud-ovest* al *nordest* . Varie devono essere le vene o filoni di ferro in questo monte ; ma assai picciola differenza si ravvisa nel metallo , che se ne ritrae . E da qualunque di queste cave egli si ottenga , sempre abbisogna di un mestruo nella fusione , a differenza delle altre miniere di questa valle , le quali vengono comunemente trattate senza di tale soccorso . Vi si impiega dello spatato calcario (b) che suolsi cavare dalle falde del Barbarossa e da altre montagne di simil genere ; anzi se ne trova qualche volta nelle stesse cave della Manina intramezzato a strisce nella miniera , e su i fianchi della medesima .

Egli è questo un ferro perfettissimo , e di una singolare riuscita principalmente nei gettoni , a motivo della somma sua duttilità . E' " calciforme spatoso rosso , e calciforme spatoso giallo „ . Il primo ha ancora della " mica ferrea „ dalla quale diligentemente non scervrata la miniera , viene questa ad essere molto pregiudicata nella fusione .

Ferrum calcareis lapidibus inherens , minera alba , facie
Bbbb ij

(a) *Schistus argillaceus friabilis cinereus* Linnei 38. 7. Alcune volte è ancora giallognolo dall' ocra che contiene .

(b) *Spathum arenarium* Spec. 62 , & *cellulare* Spec. 60 Wall.

lapidea, sine nitore; magnete non attractilis. Minera ferri alba. Wall. spec. 336.

Il secondo abbonda più di “ magnesio,,; è ancor meno lucido nella frattura e convien meglio ad essere convertito in acciaio.

Ferrum calcareis lapidibus inherens, minera fusca, facie lapidea, sine nitore, magnete non attractilis. Minera ferri alba. Wall. spec. 336 h.

Quest' ultimo contiene ancora molte volte dell' “ ocre,, cioè

Ferrum acido corrosum. Ochra ferri. Wall. spec. 342 a.

In fianco della Manina verso il *nordest* avvi il monte Glenno, col quale è congiunta per mezzo del Sassina anzinominato. Il Glenno è un gran monte granitoso e promiscuamente schisto-micaceo con moltissima porfiriti, siccome gli altri tutti della valle li quali avremo a menzionare dappoi; ed è fatto a foggia di uno scoglio sterminatissimo, allungato sulla anzidetta direzione, spaccato nel suo centro da una eccelsa vallata, la quale aperta verso il *sudovest*, abbassandosi di piano in piano, va a mettere sul fondo della valle. Lunghissime ed altissime sono le sue laterali pendenti vette e variamente denominate. Inoltrandosi in questa vallata, e formontato il suo colmo al *nordest*, un po' ritorcendo sul *nord*, si passa in Valtellina.

A questo luogo, immediatamente sotto una altissima quasi perpendicolare rupe nello stretto canale di un picciolo ruscello, che da una vasca naturale superiore si precipita giù per le balze, si trova una pirite giallo-bianchiccia, in uno schisto argilloso accostantesi al serpentino color di piombo. Questa pirite è per lo più a globi d'ineguale grandezza.

Pyrites subflavus. Cronstedt. sez. 152. a

E' a filone della grossezza di cinque pollici incirca, diretto dal *nordest* al *sudovest* con qualche serpeggiamento e diramazione lineare.

In fianco di questa pirite verso il *nord* il monte per un grandissimo tratto apparisce tutto di una pietra schistosa configurata in una foggia assai strana. Sembrano tanti tronchi riquadrati composti di fibre parallele, impiantati obliquamente nel dorso della montagna. Io lo credo uno “ schisto

fragile a picciole lamelle,, (a). E' accompagnato da un altro schisto argilloso fragile minuto (b), principalmente alla sua base, dove ne ha un grande ammasso confuso.

Questo schisto fragile in moltissima parte è investito da " un vitriolo marziale frammischiato di allume. ,,

Ferrum vitriolatum. Bergm. §. 70 cum *argilla vitriolata* §. 67 ibidem.

Se colla lente si esamiui questo schisto, vi si vedono i piccioli pezzi di pirite, che si scompone, e produce ambedue queste sostanze le quali rade volte vanno disgiunte.

Trecento passi incirca da questo luogo, sulla stessa costiera, ma verso il *sudovest*, a qualche minor elevazione trovasi una miniera di " ferro calciforme ,, cioè

Ferrum calcareis lapidibus inherens, minera fusca, facie lapidea, sine nitore, magneti non attractilis ec. Wall. spec. 336.

Contiene ancora del " magnesio ossia manganese ,, in dose non picciola ed a foggia di strato, diretto dal *sudovest* al *nordest*, inclinato di 25 gradi incirca sul *nordovest*.

Due altre cave ve ne sono lungo la stessa costiera, sempre abbassandosi di elevazione, ed alla distanza di più di cinquecento passi dall'anzidetta in una rupe poco meno che inaccessibile. Queste due sono quelle che forniscono una quantità di ferro maggiore d' ogn' altra di quelle vicinanze, e di un ferro atto a qualunque opera.

L'altra delle grandi costiere del Glenno, nella falda sua sinistra pendente verso il *sudest*, ha varie denominazioni, secondo che viene variamente configurata in promontorj, ed in vallette. Si le une che gli altri mettono sul centro della valle, e sono ricchissimi di miniere di ferro, il quale però varia molto nelle proprietà col cangiare della situazione.

Dal centro della valle volendosi riandare queste vallette e questi promontorj, dal *sudest* s' incomincia ad incontrare la Valmanna.

Bbbb iij

(a) *Schistus pinguis tenuioribus lamellis fragilis*. Wall. spec. 159

(b) *Schistus* ec. spec. 160 dello stesso Autore.

In un bosco di appartenenza della Comunità di Vilminore, capitale della valle, si trova una miniera di ferro. „Egli è spatoso bianco tendente al giallo, accompagnato da una terra ferruginosa mescolata di pirite gialla cristallizzata in piccioli cubi, esternamente vestito di un' ocra marziale „

Ferrum calcareis lapidibus inherens, minera alba, facie lapidea, sine nitore, magnete non attractilis. Minera ferri alba. Wall. spec. 336 et Sulphur Marte saturatum, Pyrites. Cronstedt sez. 152 l. et Ferrum acido corrosum. Wall. spec. 342 a.

Il filone è diretto del *sudest* al *nordest*, inclinato trenta gradi incirca sull'orizzonte. La cava vi fu aperta, non ha gran tempo, ed il lavoro non è compiutamente avanzato.

Al mezzodì di Vilminore, in una profonda valle, nella quale scorre un torrente, trovasi „ un' argilla azzurra sparsa di una mica lucente dispostavi in istrisce „ Questa argilla in alcuni luoghi è indurita alla consistenza di pietra, e ammette della politura. Vi se ne trovano de' pezzi, che imitano assai bene il *Lapislazuli*.

Proseguendo il cammino dalla Valmanna al *nordest* vi sono varie cave di ferro; ma una sola è l'andante. Lo strato del metallo è dal *sudovest* al *nordest* più orientale che settentrionale (per parlar anche col linguaggio di molti altri montanisti), ed ha la inclinazione di circa sedici gradi verso l' *ovest*. Egli è „ un ferro spatoso bianco con un po di magnesio „

Minera ferri alba cum magnesio Cronst. sez. 32 l.

Non è per se stesso perfettissimo, e tale diviene, se per avventura venga nella fusione mescolato con delle altre miniere che contengano della pietra calcaria.

Dall'anzidetta situazione, sempre proseguendo il cammino sull'indicata direzione, trovansi alcune altre cave di ferro, ma oggidì abbandonate. Quivi fra i rottami, che occupano le gallerie, ho trovato lo schisto dendritico.

Ad un miglio di distanza da questo luogo, ma alquanto più elevate di situazione, trovansi dodici altre cave di ferro, delle quali una sola è l'andante. Diconsi le *Fogaccine*. E la miniera è un „ ematite nericia bruna frammischata di spato calcare „

Hematites nigrescens. Cronstedt sez. 204 b.

Scomponendosi la miniera forma dei tubercoli gialliscuri, coperti di una sottile corteccia lucente prodotta probabilmente da quella materia bituminosa, da cui codesta miniera vedesi così colorata. Essa somministra un metallo, che ha il difetto di essere alquanto intrattabile: cosa certamente da attribuirsi alla mica ferrea, che vi si ravvisa (a).

Nella stessa cava trovasi ancora una „ematite rossa solida „, *Hematites ruber*. Cronstedt sez. 205 a.

Lo strato della miniera da me visitata è pressappoco diretto ed inclinato, siccome gli antecedenti, ed è competentemente ricco di minerale.

Quivi la falda del monte rientra e forma una piccola valletta, alla metà della quale trovansi le miniere volgarmente dette le *Desiderate*. Sono varie, ma una sola è la lavorata. Questa ha una galleria assai profonda. Lo schisto vi è copiosissimo; e alquanto superiormente ve ne ha una cava formale. Si può esso dire la *Coticula* spec. 158 del Wallerius. Lo strato o filone di questa miniera di ferro è più settentrionale degli antecedenti, e la sua inclinazione di soli dieci gradi sul *sudovest*. E' di „ferro calciforme indurato framitchiato di mica ferrea squamosa con cristalli unguiformi „

Minera ferri calciformis indurata Cronst. sez. 203. 2^o *Metallum non fusibile cinereum inguinans*. Linn. 12. 1.

Sul fianco di questa cava trovasi dello schisto argilloso investito da un vetriolo marziale, e della pirite in attualità di scomposizione.

Un mezzo miglio da qui, verso il *nordest*, giungesi al luogo detto Venà. Vi si trovano molte cave di ferro, una sola delle quali attualmente si lavora. Egli è un aggregato di tre specie di ferro nella stessa miniera; la prima di un „ferro calciforme bianco a particelle minime, e ancora un po' lucenti. „

Minera ferri alba. wall. spec. 336. a.

(a) Quanto necessaria avvertenza sia il separare le miniere da ogni porzione di mica ferrea viene comprovato dalla sperienza, la quale fa toc-

car con mano che il ferro micaceo è il più resistente al foco, e al metallizzarsi.

La seconda di ferro calciforme nero parimente con particelle minime, e un po lucenti.

Minera ferri nigra. Wall. spec. 324. b.

La terza di un' ocra ferrea gialla mista di spato calcario bianco

Minera ochracea. Cronst. sez. 202. b.

Gli strati sembrano essere rivolti alla stessa direzione degli antecedenti; ma sono un po più inclinati sull'orizzonte.

Non molto da qui lontano al piede della falda denominata il monte delle Sarzine, in un ruscello chiamato il Valsello, vedesi uno strato di spato calcare bianco stendersi dal *sudovest* al *nordest* colla inclinazione di trentacinque gradi sull'orizzonte dalla parte del *sudovest*. Egli resta fra lo schisto-micaceo e 'l porfirite, e si vede contenere qualche particella di "rame mineralizzato dallo zolfo". Proseguendo il cammino sulla anzidetta direzione, alla distanza di circa quattrocento passi si torna a riscontrare questo strato. Quivi appare alquanto più ricco di metallo; ed è un "rame mineralizzato, come ho già detto, misto di ferro, di antimonio, d'arsenico, e d'argento".

Cuprum cum ferro, & arsenico sulphure mineralisatum. Bergman §. 196.

Egli stesso nota che in consimili miniere trovasi ordinariamente dell'argento. Una parte di questa miniera è già passata allo stato di "calce verde".

Viride montanum. Cronstedt sez. 194. 2.

In qualche parte contiene ancora della "pirite di rame",

Cuprum cum uberiore ferro sulphure mineralisatum. Bergman §. 195.

E' finalmente accompagnata da una porzione di "ocra marziale gialla".

Ocra ferri. Wall. spec. 342. a.

Vi si vedono i vestigi di antiche escavazioni; ma oggidì sono affatto trascurate probabilmente per difetto di un competente profitto.

Nella valletta, subito al di sopra dell'anzi notato luogo, sempre sulla stessa direzione ed inclinazione, ma un po salendo di cammino, si tornano a vedere gl'indizj della pre-

detta

detta miniera di rame; quivi pure sonosi abbandonate le escavazioni, che vi si erano incominciate.

Dal monte Bonavis, che quinci si riscontra, attraversata la valle, la quale, a varie riprese salendo, va a dar comunicazione colla Valtellina, si arriva al Venerocolo. E' questa una montagna granitosa, e promiscuamente schisto-micaacea. E' osservabilissima per la sua altezza. Resta quasi nella stessa sezione di piano col Glenno, e col Bonavis, e per mezzo di una giogaja volta al mezzodì va a congiungersi al Vivione, e al Gassione, che sono sul fianco orientale della valle medesima.

Nel Venerocolo, alla metà incirca della sua altezza, non molti anni sono, scopertasi una miniera di rame, vi furono aperte delle grandi scavazioni, e fu dessa quella, sul cui appoggio si eresse appostatamente una società minerale per la fusione del rame. Se ne cavò molta quantità, e si trovò di una qualità perfettissima; ma lo sbilancio seguito nella società medesima per conto del suo disegno troppo vasto e dispendioso (a), e lo smarrimento seguito dappoi del filone principale della miniera stessa, furono le cagioni per cui si disciolse questa società. Vi esistono ancora gli edifici fabbricati a tutta spesa per l'andamento, e la riduzione di questa miniera; ma oggidì poco meno che abbandonati, chi sa quali danni sieno per riportare dall'azione delle meteorre, dalla villica indiscretezza, e dalla malvagità degli usurpatori? Resta così estinto questo utile e bello stabilimento.

Ho visitati i lavori, e la galleria di questa miniera mezzo rovinata e ingombra di materiali utili, e inutili, abbandonativi da' montanisti negli ultimi tentativi, e vi ho trovato „ del rame mineralizzato dallo zolfo „

Minera cupri pyritacea. Cronst. sez. 198. 2.

Questa miniera è accompagnata dal quarzo. E svolgendosi in alcuni luoghi in essa lo zolfo, vi produce un color qua-

Tomo IV.

Cccc

(a) A onore della verità deesi dire che in siffatto inconveniente v' ebbe luogo segnatamente l'interesse parti-

colare di qualcuno de' partecipanti che vi avea fissate troppe utilità.

si rosso, ed in parte verde. Vi ho inoltre rinvenuto „ del rame mineralizzato dallo zolfo „ di color in parte violaceo, e in parte verde, cioè

Cuprum sulphure & ferro parce admixtis mineralisatum, minera solida nitescens violacea, vel cerulescens. wall. spec. 350.

Per ultimo vi ho riscontrato „ del rame mineralizzato dallo zolfo „ frammischiato di un ferro spatoso giallognolo, e di un quarzo bianco. Si vede in qualche parte tendente all'azzurro.

Pyrites cupri griseus. Cronst. sez. 198. 2. b.

E' questa miniera a filone diretto a settentrione con alcune piccole diramazioni sui fianchi.

Da questo luogo poi, traguardando lungo le anzi marcate situazioni, nelle quali abbiamo veduto trovarsi degli indizj di miniera di rame, si trova potersi quasi dire che sia uno stesso filone, che, tagliando obbliquamente le antecedenti falde, direttamente venga a salire nel Venerocolo, e a comparir quivi più ricco e copioso.

Discesi dal Venerocolo sul piano della valle, e scorsa alle sue radici l' anzi accennata giogaja, si arriva al Gaffione. Questo monte ha varie cave di ferro; ma una sola è l' andante, denominata appunto la *Gaffione*, ed appartiene a certi Signori *Grassi*, famiglia fra le principali della valle. Questa è la miniera la meglio condotta, e la sua galleria la più regolare, e la più bene eseguita fra quante ne hanno que' contorni. E' profondissima, e per mezzo della caduta di un ruscello superiore vi si introduce l'aria respirabile con i tubi consueti. Ella è fatta con tutte le viste economiche, e vi si adoprano gli stromenti li più proficui.

Il ferro che se ne ritrae è copioso, perfettissimo, e conviene molto alla trasformazione in acciaio. Egli è a strato settentrionale poco inclinato sull' orizzonte „ spatoso bianco a particelle di mediocre grandezza con un po di magnesio „

Minera ferri alba. Wall. spec. 336. a.

Sembra ancora abbondante di terra calcaria, quindi molto fusibile per se stesso.

Immediatamente al di là del Gaffione si trova il monte

Ortasolo , uno de' più ricchi di miniere di ferro , e certamente il più lavorato da' montanisti . E' assai grande il numero delle sue cave in proporzione, della sua mediocre altezza . E ve ne sono più di dodici in attualità di andamento . Molti sono i suoi strati di questo metallo , ed alcuni di specie affatto differenti . Al di sopra della sua metà prende la denominazione di Ortasolino , e sulla sua cima non ha alcun indizio di minerale . La direzione degli strati da me osservati è costantemente dal *sudovest* al *nordest* alquanto settentrionali con qualche tortuosità e quasi colla stessa inclinazione in tutti, cioè di 27 gradi in circa verso il *sudovest* .

Nella cava , che ho visitata , quasi al piè di questo monte si trova un misto di „ miniera di ferro bianca a picciole particelle „

Minera ferri alba . Wall. spec. 336 . a.

„ di miniera di ferro nera granulare „

Minera ferri nigra . Wall. spec. 324 . b. c.

Alla metà del monte in una cava ho osservato „ un ferro „ ematitico rosso solido , e fosco nella interna sua tessitura „

Hematites ruber . Cronst. sez. 205 . a.

Nell'ultima cava superiore poi s'incontra un' „ ematite nera „ riccia bruna coperta tratto tratto di un' ocre marziale „

Hematites nigrescens . Cronst. sez. 204 . 2. et *ferrum acido corrosum* . *Oebra ferri* . Wall. spec. 342.

In questa stessa cava ritrovasi promiscuamente ancora „ una ematite con tubercoli vestiti di ocre di ferro , in alcune parti coperti di una corteccia sottile nera „ . Il loro interno presso la superficie è fornito di particelle lucide squamose .

Hematites nigrescens . Cronst. sez. 204 . c. 4.

La prima e l'ultima di queste miniere sono quelle , che somministrano la maggior quantità di ferro per quanto intesi da que' montanisti .

Al di là dell' Ortasolo , proseguendo il cammino verso l'*est* , si trova una nuova falda di monte denominata i Colli . Quivi sono venticinque e più cave di ferro , quindici delle quali attualmente in andamento .

Il ferro vi è pressappoco della stessa indole in tutte cioè „ spatoso bianco frammischiato copiosamente di vene di spato calcario „

Cccc ij

Ferrum calcareis lapidibus inherens . Minera alba , vel fusca , facie lapidea , sine nitore , magnete non attractilis . Minera ferri alba . Wall. spec. 336 . b.

Gli strati o filoni vi sono settentrionali, poco inclinati sull'orizzonte verso il *sudovest* . Queste miniere danno copiosamente del metallo , e sentono con molta facilità l' azione delle meteore , per cui molte volte soffrono una alterazione quasi subitanea .

Egli è questo un costume costantemente osservato in detta valle di lasciare lungamente esposto all' acqua e all' aria il minerale tratto dalle cave , e dopo ancora averlo torrefatto . Ho raccolto per comune asserzione ricavarli da tale costumanza un gran vantaggio nella fusione .

Ha questa valle qualch' altra miniera di ferro sparsa qua e là nelle vaste eccelse sue montagne ; ma essendo esse oggi di tutte giacenti , e certamente affatto rovinate le loro gallerie , non ho sopra le medesime estese le mie osservazioni . Ma passiamo alla Valbondione .

Varcata la sommità della Manina , giù scendendo per la falda settentrionale chiamata Fles , si arriva alla valletta di Pradella , e da questa , giù calando ancora , si perviene alla propriamente detta valle di Bondione .

Nel Fles vi sono sette cave di ferro , tre sole delle quali sono le andanti . Profondissime vanno ad attaccare gli strati o filoni che si scoprono nella opposta falda detta la Manina . Ciò viene dimostrato dall' indole perfettamente simile del ferro , che si cava da tutte e due queste situazioni , dalla concordanza di tutte le circostanze che lo accompagnano in ambidue questi luoghi , e finalmente dall' essersi qualche volta trasforate le cave dall' una e dall' altra parte .

Questo è ferro perfettissimo , e quel desso che , di alcune cave specialmente , più è atto alla trasformazione in acciaio . Si metallizza ne' forni di essa valle , ed è appunto quello , che a tal' uopo si lavora nelle fucine di Gromo , e che arriva a pareggiare molte volte il perfettissimo d' Inghilterra .

La direzione dello strato nella galleria da me visitata è pressappoco come quella , che ho osservata nella Manina ; e tale ancora ne è la sua inclinazione sull' orizzonte . Appartiene dunque alla specie da me notata della „ miniera spatosa bianca „

Ferrum calcareis lapidibus inherens, minera alba, facie lapidea, sine nitore, magnete non attractilis. Minera ferri alba. Wall. spec. 336. h.

In alcune cave è ricchissima di „ magnesio „

Egli è osservabile in riguardo del monte Fles che quasi alle sue radici si vede spuntare uno sterminato masso di pietra calcaria (a), il quale appoggia sullo schisto-micaceo promiscuamente e sul granito. E' abbondantissima questa pietra calcaria di spato bianco (b); ed avviene appunto una cava ad uso di mestruo nella fusione delle miniere dello stesso monte.

Sulla costiera opposta al Fles, la quale forma la valletta di Pradella, avvi il luogo detto le Foppelle. Ella è questa una salda configurata come a cono rivolta perfettamente al sudovest, di pietra granitosa, di schisto-micacea, e di porfirite, siccome tutte le altre nelle di lei vicinanze. Ha molte cave di ferro, due o tre delle quali sono le sole in attualità di lavoro. I filoni sono settentrionali colla inclinazione al sudovest di venti gradi incirca. Il ferro è „ spatoso bianco con qualche mistura di magnesio „

Minera ferri alba cum magnesio. Wall. spec. 336. h.

Questo luogo appartiene in certa maniera anche ai monti, che formano la gran giogaja orientale della valle Bondione.

Da Pradelle scendendo alla villa, che dà la denominazione alla valle, sulla destra della via nel bosco di annosissimi abeti, che la ombreggiano, si riscontrano gli indizj copiosissimi di una miniera „ di rame mineralizzato dallo zolfo „

Minera cupri pyritacea. Cronst. sez. 198. 2.

Ha unito ancora del „ rame mineralizzato „ della specie disegnata dal Sig. Cronstedt colla sez. 198. 2. b.

Pyrites cupri griseus.

Somministra un rame perfettissimo ed in abbondanza. Disgrazia è che questa miniera non fosse conosciuta ai tempi dell'ora estinta minerale società.

Cccc iij

(a) *Lapis calcareus rudis.* Cronstedt sez. VII.

(b) *Spathum arenarium.* spec. 62 & *tessulare.* spec. 60 Wall.

Molto orrido è l'aspetto della valle Bondione. Selve folissime di oscuri abeti, e di vecchj faggi la ingombrano per ogni dove; montagne ertissime estremamente la rinferano, sicchè il sole non vi comparisce che brevemente sull'orizzonte; e il colore stesso della pietra componente queste moli sterminate, costantemente neruccio-bruno, concorre a rilevare gli orrori di questa situazione. Vedonsi quivi ne' siti inospiti a' raggi solari biancheggiare perpetuamente le nevi fra le oscurità delle vette torreggianti, e di là con precipitose cadute romperli come in bianche nebbie perenni ruscelli di acque limpidissime. Ve n'hanno di quelle, che nelle loro riprese di balza in balza contano sino qualche centinaio di piedi di perpendicolo.

Siam qui lecito di fare qualche cenno della gran caduta del Serio chiamata di *Barbellino*, lontana dal villaggio di Bondione un'ora di faticoso cammino. Rimontando quindi il corso del fiume, si arriva ad una folta selva di annosi faggi; e quivi sentesi lo strepitoso mormorio della caduta; ed una minuta pioggia inalzata dal vento, che quivi sempre spira, avvisa della presenza di questa gran caduta molto prima che vi si giunga. Attraversato il bosco, e salita a stento una specie di alto scoglio, che in qualche distanza s'erge di prospetto alla caduta medesima, godeasi quindi di questo grazioso e sorprendente spettacolo.

La caduta è a varie riprese sempre perpendicolari, e che mettono in tanti bacili naturali scavati nel duro sasso. La prima, che veggasi dalla suddetta situazione, ha pochi piedi di altezza: la seconda ne avrà trenta in circa: ma la terza non ne conterà meno di cento. Alquanto men alta è la quarta, la quinta parimente; e tutte insieme verranno a rilevare non meno di trecento piedi di altezza, andando a finire in un alveo dirupato precipitoso interrotto da sterminati macigni rovinativi dalle vette circostanti.

Fortunatamente nel punto, in cui io vi giunsi, vi penetrava il sole co' suoi raggi, e vi producea un' iride bellissima. In vita mia non avevo gustato di uno spettacolo più vago nè più grazioso.

Sulla sinistra di chi rimonta questa valle diretta nel suo principio dal *nord* al *sud*, avvi una lunga catena di monti

tutti variamente denominati, ma gli uni sì strettamente uniti agli altri, che sembrerebbero quasi una montagna sola a varie riprese, e a varj promontorj. Questa è quella, che nella maggior parte contiene i minerali, di cui abbon-
da la valle.

Nel Maslana, nel Lanci, nel Calvéra, e in altri siti nella stessa direzione, alla elevazione di qualche centinaio di piedi dalla radice del monte, si vedono tratto tratto gl' indizj, sebbene poco copiosi, di una miniera di „ rame pirito-
sa „. Fu tentata in tutti essi luoghi, ma sempre inutilmen-
te, giacchè il minerale d'esso metallo, che se ne ritraea, era
in una dose scarsiissima. Oggidì queste cave sono affatto ab-
bandonate, nè mi fu possibile di farvi alcuna osservazione.

Il monte Lanci, che cogli altri tutti di questa costiera del-
la valle è di granito e promiscuamente di porfiriti, e di
schisto-micaceo, ha ancora un filone di „ piombo minera-
lizzato dallo zolfo (*Galena tessulis minoribus*) frammi-
schiato di blenda oscura di zingo, di quarzo, e di spato cal-
cario bianco, ed in alcuni luoghi coperto di un' ocra mar-
ziale „

Plumbum sulphure mineralisatum. Berg. §. 184.

Egli contiene dell'argento in quantità non ispregevole, ed
ha direzione settentrionale pendente sul *nordovest* quarantaset-
te gradi incirca.

In fianco, ed alla distanza di venti passi incirca da que-
sto luogo, in uno schisto fragile argilloso (a), si vede spun-
tare copiosamente dalle screpolature „ un vitriolo di marte
accompagnato da un poco di allume „

Ferrum vitriolatum. Bergman §. 70 et *Argilla vitrio-
lata* §. 67 nella stessa opera.

Nel Calvéra ancora vedesi un grosso filone di „ piom-
bo mineralizzato dallo zolfo „

Plumbum sulphure mineralisatum.

Galena tessulis minoribus. Bergman §. 184.

Egli contiene poi della „ pirite di rame „

Pyrites cupri. Cronstedt sez. 198.

(a) *Schistus argillosus* ec. spec. 160. wall.

Il filone qui pure è settentrionale cogli stessi gradi d'inclinazione, ma verso l'*ovest*. Ambedue queste miniere furono altra volta tentate, ma oggidì restano affatto in abbandono. Se ne trovano gl' indizj in varj altri luoghi delle vicine falde, ma tutti alla stessa condizione.

Sul monte Redorta trovasi un grosso e lunghissimo strato di una „ pirite arsenicale frammischiata di ferro e di piombo „

Arsenicum cum sulphure mineralisatum. Bergman §. 224 et *Galena tessulis minoribus*. wall. spec. 367. 6.

Sulla falda superiormente al villaggio di Fiume-nero, ultimo termine della Valbondione verso il *sud*, si trovano due miniere di ferro molto copiose: la prima è di „ ferro spatoso bianco „

Minera ferri alba. Wall. spec. 336. h.

La seconda parimente di „ ferro spatoso bianco, ma tendente al giallo, e coperto di un' ocra marziale disciolta, e in qualche luogo indurata, come nella miniera palustre

Minera ferri alba. Wall. spec. 336. h.

Ocra ferri. Wall. spec. 342.

Sono utilissime queste due miniere, e per la quantità del metallo, che somministrano, e per la sua perfezione. Esse, e le già descritte esistenti nel Fles, e ne' contorni, sono quelle, che mantengono andanti quasi tutto l'anno i due gran forni di fusione, che esistono in questa valle, alla torre di Bondione, e nel luogo detto Gavasso.

L'altra costiera cioè la posta a destra non è punto fertile di minerali; non trovanvisi per lo più nè cave, nè indizj di vene metalliche, quindi non ha interessate le mineralogiche mie osservazioni.

La valle Bondione, siccome la propriamente detta valle di Scalve, ha delle cave di ferro abbandonate, e degli indizj, che quivi pure esistono degli altri minerali, che con vantaggio si potrebbero cavare: ma la mancanza di società, che vi rivolgano i loro studj e v'impieghino i loro capitali, è l'ostacolo principale, che si oppone a cotali industrie nazionali risorse.

R I C E R C A

SOPRA L' INTEGRAZIONE SVILUPPATA IN UNA SERIE FINITA

della formola $\frac{(A + Bz) dz}{(a^2 - 2abz \cos.\phi + b^2z^2)^p}$, essendo p un numero qualunque intero.

Del Sig. FRANCESCO PEZZI

Tenente nel Corpo degl' Ingegneri, e Professore di Matematica nell' Università di Genova.

PRESENTATA

Dal Sig. LEONARDO SALIMBENI

MI accadde, ha già gran tempo, d'integrare per mezzo di un numero finito di termini il differenziale $(A + Bz) dz$

$\frac{(A + Bz) dz}{(a^2 - 2abz \cos.\phi + b^2z^2)^p}$, rappresentando p un numero intero qualunque, in guisa che non facea più di mestieri, per ottenerlo, di ricorrere agl' integrali successivi $p - 1, p - 2, p - 3$, ecc. come il richiede il metodo troppo lungo, per poco che p sia un numero grande, dell'immortale Sig. *Eulero* (*a*). Ne feci per avventura menzione in una mia lettera scritta in sul principio di quest' anno al Sig. *Cavaliere Lorgna*, il quale m' inviò cortesemente in risposta la dimo-

strazione della formola $\int \frac{x^m dx}{(b + cx^n)^p}$ (m e n essendo interi o

Tomo IV.

Dddd

rotti , positivi o negativi , e p intero) ridotta a quest' altra di gran lunga più semplice $\int \frac{x^{m-n(p-1)}dx}{b+cx^n}$, estratta da un suo opuscolo pubblicato fin dall'anno 1770 . Dopo d'averla io letta con grandissimo piacere , cercai prima di estenderla ad altri casi , e poi di trarne una parte della dimostrazione *a priori* di quel mio integrale , che solamente per induzione aveva argomentato da principio , e trovato sotto una forma differente ; dico una parte , poichè ho dovuto supplire all' altra , con altro artificio analitico : il che se bene mi sia avvenuto di fare , il giudichi l' Illustre Società Italiana , alla quale non avrei certamente ardito di presentare questo tenue lavoro , se il celebre Sig. *Eulero* non avesse reso il Problema degno di attenzione lasciandovi ancora molto da fare .

I. Sia $\mathcal{Q}$ una funzione qualunque di x e di costanti ; si differenzj la frazione $\frac{x^{q+1}}{\mathcal{Q}}$, facendo per maggior brevità

$d\mathcal{Q} = \mathcal{Q}'dx$; $d\mathcal{Q}' = \mathcal{Q}''dx$, ecc. ; si avrà

$$d. \frac{x^{q+1}}{\mathcal{Q}} = \frac{(q+1)x^q dx}{\mathcal{Q}} - \frac{x^{q+1}\mathcal{Q}'dx}{\mathcal{Q}^2} , \text{ e quindi}$$

$$\frac{x^q dx}{\mathcal{Q}} = d. \frac{x^{q+1}}{(q+1)\mathcal{Q}} + \frac{x^{q+1}\mathcal{Q}'dx}{(q+1)\mathcal{Q}^2} .$$

Si differenzj $\frac{x^{q+2}\mathcal{Q}'}{(q+1)\mathcal{Q}^2}$; si avrà

$$d. \frac{x^{q+2}\mathcal{Q}'}{(q+1)\mathcal{Q}^2} = \frac{(q+2)x^{q+1}\mathcal{Q}'dx}{(q+1)\mathcal{Q}^2} + \frac{x^{q+2}\mathcal{Q}''dx}{(q+1)\mathcal{Q}^2} - \frac{2x^{q+2}\mathcal{Q}'^2dx}{(q+1)\mathcal{Q}^3} .$$

dunque

$$\frac{x^{q+1}\mathcal{Q}'dx}{(q+1)\mathcal{Q}^2} = d. \frac{x^{q+1}\mathcal{Q}'}{(q+1)(q+2)\mathcal{Q}^2} - \frac{x^{q+1}\mathcal{Q}''dx}{(q+1)(q+2)\mathcal{Q}^2} + \frac{2x^{q+2}\mathcal{Q}'^2dx}{(q+1)(q+2)\mathcal{Q}^3} .$$

E continuando sempre in questa guisa a differenziare l' ultimo termine dopo aver aumentato di una unità l' esponente di x nel numeratore già diviso per dx , e sostituendo poi successivamente i valori trovati nel secondo membro dell'equa-

zione $\frac{x^q dx}{\mathcal{Q}} = d. \frac{x^{q+1}}{(q+1)\mathcal{Q}} + \frac{x^{q+1}\mathcal{Q}'dx}{(q+1)\mathcal{Q}^2}$, si avrà facilmente

$$\begin{aligned}
\frac{x^q dx}{Q} &= d. \frac{x^{q+1}}{(q+1)Q} - \frac{1. x^{q+2} Q'' dx}{(q+1)(q+2)Q^2} \\
&+ d. \frac{x^{q+2} Q'}{(q+1)(q+2)Q^2} - \frac{1. 2. x^{q+3} Q' Q'' dx}{(q+1) \dots (q+3) Q^3} \\
&+ d. \frac{2 x^{q+3} Q'^2}{(q+1) \dots (q+3) Q^3} - \frac{1. 2. 3. x^{q+4} Q'^2 Q'' dx}{(q+1) \dots (q+4) Q^4} \\
&+ d. \frac{2. 3. x^{q+4} Q'^3}{(q+1) \dots (q+4) Q^4} - \\
&\vdots \\
&+ d. \frac{1. 2 \dots (p-2) x^{q+p-1} Q^{p-2}}{(q+1) \dots (q+p-1) Q^{p-1}} - \frac{1. 2 \dots (p-2)^2 x^{q+p-1} Q^{p-3} Q'' dx}{(q+1) \dots (q+p-1) Q^{p-1}} \\
&+ \frac{1. 2 \dots (p-1) x^{q+p-1} Q^{p-1} dx}{(q+1) \dots (q+p-1) Q^p}.
\end{aligned}$$

La legge che regna in questa serie è manifesta; il numero de' termini affetti dal segno di differenziazione è $= p - 1$; ed il numero di quei che sono moltiplicati da dx è ancora $= p - 1$; dunque il numero totale è $= 2(p - 1)$.

Ora eliminando l' integrale di $\frac{x^{q+p-1} Q^{p-1} dx}{Q^p}$, si trova

$$\begin{aligned}
\int \frac{x^{q+p-1} Q^{p-1} dx}{Q^p} &= \left(- \frac{(q+1)(q+2) \dots (q+p-1)}{1. 2 \dots (p-1)} \right) \left(\frac{x^{q+1}}{(q+1)Q} + \right. \\
&\frac{x^{q+2} Q'}{(q+1)(q+2)Q^2} + \frac{2 x^{q+3} Q'^2}{(q+1) \dots (q+3) Q^3} + \frac{2. 3 x^{q+4} Q'^3}{(q+1) \dots (q+4) Q^4} + \text{ecc.} \\
&+ \frac{1. 2 \dots (p-2) x^{q+p-1} Q^{p-2}}{(q+1) \dots (q+p-1) Q^{p-1}} - \int \frac{x^q dx}{Q} - \\
&\frac{1. 2 \dots (p-2)^2}{(q+1) \dots (q+p-1)} \int \frac{x^{q+p-1} Q^{p-3} Q' dx}{Q^{p-1}} - \frac{1. 2 \dots (p-3)^2}{(q+1) \dots (q+p-2)} \int \frac{x^{q+p-2} Q^{p-4} Q'' dx}{Q^{p-2}} \\
&- \text{ecc.} - \frac{1. 2^2}{(q+1) \dots (q+3)} \int \frac{x^{q+3} Q' Q'' dx}{Q^3} - \frac{1}{(q+1)(q+2)} \int \frac{x^{q+2} Q'' dx}{Q^2} \Big) \dots (1)
\end{aligned}$$

II. Se invece dell' integrale precedente si volesse quella di $\frac{x^{q+p-1} dx}{Q^p}$, si avrebbe

D d d d ij

$$\begin{aligned}
 \int \frac{x^{q+p-1} dx}{Q^p} &= \left(-\frac{(q+1)(q+2)\dots(q+p-1)}{1.2\dots(p-1)} \right) \left(\frac{1}{q+1} \int \frac{1}{Q^{p-1}} d. \frac{x^{q+1}}{Q} \right. \\
 &+ \frac{1}{(q+1)(q+2)} \int \frac{1}{Q^{p-1}} d. \frac{x^{q+2} Q'}{Q^2} + \frac{1.2}{(q+1)\dots(q+3)} \int \frac{1}{Q^{p-1}} d. \frac{x^{q+3} Q'^2}{Q^3} \\
 &+ \text{ecc.} + \frac{1.2\dots(p-2)}{(q+1)\dots(q+p-1)} \int \frac{1}{Q^{p-1}} d. \frac{x^{q+p-1} Q'^{p-2}}{Q^{p-1}} - \\
 &\int \frac{x^q dx}{Q \cdot Q^{p-1}} - \frac{1.2\dots(p-2)^2}{(q+1)\dots(q+p-1)} \int \frac{x^{q+p-1} Q'' dx}{Q^{p-1} \cdot Q^2} - \text{ecc.} \\
 &- \frac{1.2^2}{(q+1)\dots(q+3)} \int \frac{x^{q+3} Q'' dx}{Q^3 \cdot Q^{p-2}} - \frac{1}{(q+1)(q+2)} \int \frac{x^{q+2} Q'' dx}{Q^2 \cdot Q^{p-1}} \dots (2)
 \end{aligned}$$

Non posso qui trattenermi nelle varie riflessioni che le formole (1) e (2) presentano, onde ottenere delle maggiori riduzioni; mi basterà di osservare per arrivar tosto alla propostami integrazione, che uno dei semplici risultati, ch'esse possano fornire, dipende chiaramente dal caso di $Q''=0$; allora $Q'=c$; c essendo una costante arbitraria; dunque $Q=cx+b$; b essendo una nuova costante arbitraria.

III. Ma se si pon mente che Q' essendo in questa ipotesi un monomio; $x^q Q'$ lo sarà ancora, qualunque sia l'esponente di x in Q , si vede che la riduzione ha luogo, quando ancora $Q=cx^n+b$; ch'è il caso il più generale che qui per fortuna possa avvenire; allora l'equazione primitiva diviene

$$\frac{x^q dx}{Q} = d. \frac{x^{q+1}}{(q+1)(b+cx^n)} + \frac{cnx^{q+n} dx}{(q+1)(b+cx^n)^2}.$$

e d. $\frac{x^{q+2} Q'}{(q+1)Q^2}$ non farà più espresso da un trinomio, ma da

un binomio $\frac{cn(q+n+1)x^{q+n} dx}{(q+1)(b+cx^n)^2} - \frac{2c^2 n^2 x^{q+2n} dx}{(q+1)(b+cx^n)^3}$; ed in conse-

guenza tutti li differenziali successivi verranno espressi da soli binomj; dunque i termini in numero $p-2$, affetti dal segno f e moltiplicati per Q'' nella formola (1) divengono nulli, od eguali a zero. Suppongavisi dunque, dopo aver moltiplicato il numeratore del primo membro per x^{n-1} , $Q''=0$; $Q'=cn$; $Q'^2=c^2 n^2$; ... $Q'^{p-1}=(cn)^{p-1}$, e si sostituiscano da per tutto per $q+2$, $q+3$, ... $q+p-1$, i valori $q+n+1$,

$q + 2n + 1 \dots q + n(p - 2) + 1$, indi supponendo il numero arbitrario $q = m - n(p - 1)$ per avere $x^m dx$ al numeratore della propolta frazione, si otterrà finalmente, dividendo il tutto per $(cn)^{p-1}$,

$$\int \frac{x^m dx}{(b + cx^n)^p} = \left(- \frac{(m-n(p-1)+1)(m-n(p-2)+1)\dots(m-n+1)}{1.2.3.\dots(p-1)(cn)^{p-1}} \right) \left(\frac{1}{cnx^{m-n(p-1)+1}} + \frac{(m-n(p-1)+1)(b+cx^n)}{1.2.c^2n^2x^{m-n(p-2)+1}} + \dots + \frac{(m-n(p-1)+1)\dots(m-n(p-3)+1)(b+cx^n)^3}{1.2.\dots(p-2)x^{m-n+1}(cn)^{p-2}} - \int \frac{x^{m-n(p-1)} dx}{b + cx^n} \right) \dots (3)$$

Ch' è la formola del Sig. Cavaliere *Lorgna*, a me inviata dall' Illustre Autore.

La legge di progressione è nota; il numero de' termini è $= p$; de' quali $p - 1$ sono algebratici e liberi dal segno d'integrazione.

IV. Suppongasi $b + cx^n = z$; si avrà

$$\int \frac{x^{m-n(p-1)} dx}{b + cx^n} = \frac{1}{nc \frac{m+1}{n} + 1 - p} \int (z-b)^{\frac{m+1}{n} - p} \cdot \frac{dz}{z}; \text{ la qua-}$$

le sarà integrabile per una serie finita, algebrica in parte, in parte trascendente tutte le volte che $\frac{m+1}{n}$ farà un nume-

ro intero; allora se $\frac{m+1}{n} > p$, l' integrale si svilupperà per

il binomio di *Newton*; se $\frac{m+1}{n} < p$, si ritornerà alla formo-

la (3) che darà una riduzione di questa forma $\int \frac{dz}{(z-b)z^{p'}}$, ch' è sempre integrabile in un numero finito di termini, come il vedremo fra poco.

V. Ma vi è più; se p contiene un numero rotto

qualunque $\frac{s}{r}$, di maniera ch' egli sia di questa forma $p + \frac{s}{r}$, allora la riduzione in quistione è ugualmente possibile. Sia

dunque $\mathcal{Q} = (b + cx^n)^{p + \frac{s}{r}}$; se si pon mente che il secondo

termine del differenziale di $\frac{x^{p+1}}{(b + cx^n)^{\frac{s}{r}}}$, non contiene più

al denominatore il quadrato di $b + cx^n$, ma bensì la potenza $1 + \frac{s}{r}$ della stessa quantità, e che il numeratore invece di

essere moltiplicato dall' unità, lo è da $\frac{s}{r}$; si vede facilmente, che laddove p non è combinato con s , si deve sostituire per $p-1$, $p-2$, $p-3$, ecc. nella formola (3), p , $p-1$, $p-2$, ecc.; e per $p-1$, $p-2$, ... 3, 2, 1; $p-1 + \frac{s}{r}$; $p-2 + \frac{s}{r}$, ..., $2 + \frac{s}{r}$, $1 + \frac{s}{r}$, $\frac{s}{r}$, ond' essa diverrà

$$\begin{aligned} \int \frac{x^m dx}{(b + cx^n)^{p + \frac{s}{r}}} &= \left(- \frac{(m-np+1)(m-n(p-1)+1) \dots (m-n+1)}{\frac{s}{r} \left(1 + \frac{s}{r}\right) \left(2 + \frac{s}{r}\right) \dots \left(p-1 + \frac{s}{r}\right) (nc)^p} \right) \\ &\quad \frac{x^{m-np+1}}{nc \frac{s}{r} x^{m-n(p-1)+1}} \\ &+ \frac{\left(\frac{x^{m-np+1}}{(m-np+1)(b+cx^n)^{\frac{s}{r}}} \right)}{(m-np+1)(m-n(p-1)+1)(b+cx^n)^{\frac{s}{r}+1}} \\ &+ \frac{c^2 n^2 \frac{s}{r} \left(1 + \frac{s}{r}\right) x^{m-n(p-2)+1}}{(m-np+1) \dots (m-n(p-2)+1)(b+cx^n)^{\frac{s}{r}+2}} \\ &+ \frac{c^3 n^3 \frac{s}{r} \left(1 + \frac{s}{r}\right) \left(2 + \frac{s}{r}\right) x^{m-n(p-3)+1}}{(m-np+1) \dots (m-n(p-3)+1)(b+cx^n)^{\frac{s}{r}+3}} \end{aligned}$$

$$+ \dots + \frac{\frac{s}{r} \left(1 + \frac{s}{r}\right) \left(2 + \frac{s}{r}\right) \dots \left(p-2 + \frac{s}{r}\right) (cn)^{p-1} x^{m-n+1}}{(m-np+1)(m-n(p-1)+1) \dots (m-n+1)(b+cx^n)^{\frac{s}{r}} + p-1}$$

$$- \int \frac{x^{m-np} dx}{(b+cx^n)^{\frac{s}{r}}} \dots (4)$$

Ove il numero de' termini è $= p+1$.

VI. Sia ora proposto d' integrare la formola

$$\frac{(A+Bz) dz}{(a^2 - 2abz \cos. \phi + b^2 z^2)^p}; \text{ egli è evidente che per darle la}$$

forma prescritta, bisogna supporre $z = u + \frac{a \cos. \phi}{b}$; sostituendovi dunque i valori di z , z^2 , e dz ; e facendo per maggior brevità $C = A + \frac{aB \cos. \phi}{b}$; e $D = a^2 \text{sen.}^2 \phi$, si avrà

$$\int \frac{(C+B u) du}{(D+b^2 u^2)^p} = - \frac{B}{2b^2(p-1)(D+b^2 u^2)^{p-1}} + C \int \frac{du}{(D+b^2 u^2)^p}$$

+ Cost.; trattone però il caso di $p=1$.

VII. Se $p=1$, si ha evidentemente

$$\int \frac{(C+B u) du}{D+b^2 u^2} = \text{Cost.} + \frac{B}{2b^2} \log. (D+b^2 u^2) + \frac{C}{b\sqrt{D}} \text{Arc.}$$

$$\tan. \frac{bu}{\sqrt{D}} = \text{Cost.} + \frac{B}{2b^2} \log. (a^2 - 2abz \cos. \phi + b^2 z^2) +$$

$$\frac{Ab + aB \cos. \phi}{ab^2 \text{sen.} \phi} \text{Arc. tan.} \frac{bz - a \cos. \phi}{a \text{sen.} \phi}; \text{ ed aggiungendo, come}$$

ha fatto il Sig. *Eulero* nel luogo citato, all' Arc. tan.

$$\frac{bz - a \cos. \phi}{a \text{sen.} \phi} \text{ l' Arc. tan.} \frac{\cos. \phi}{\text{sen.} \phi}, \text{ che si può concepire essere}$$

contenuto nella costante arbitraria, si avrà

$$\int \frac{(A+Bz) dz}{a^2 - 2abz \cos. \phi + b^2 z^2} = \frac{B}{2b^2} \log. (a^2 - 2abz \cos. \phi + b^2 z^2) +$$

$$\frac{Ab + aB \cos. \phi}{ab^2 \text{sen.} \phi} \text{Arc. tang.} \frac{bz \text{sen.} \phi}{a - bz \cos. \phi} + C.$$

VIII. Trasformando l'espressione $\frac{du}{(D+b^2u^2)^p}$ in quella della formola (3) si ha, $m=0$, $n=2$, $b=D$, e $c=b^2$; dunque chiamando S la serie dei $p-1$ termini algebratici, si ha

$$C \int \frac{du}{(D+b^2u^2)^p} = CS + C \frac{(3-2p)(5-2p)\dots-1}{1.2\dots(p-1)(2b^2)^{p-1}} \int \frac{du}{(D+b^2u^2)u^{2(p-1)}}$$

Sia $2(p-1)=p'$; e poichè p' è un numero pari, suppongo

$$\frac{1}{(D+b^2u^2)u^{p'}} = \frac{A}{u^{p'}} + \frac{B}{u^{p'-2}} + \frac{C}{u^{p'-4}} + \dots + \frac{T}{u^2} + \frac{U}{D+b^2u^2};$$

onde

$$A = \frac{1}{D}; \quad B = -\frac{b^2}{D^2}; \quad C = \frac{b^4}{D^3}; \quad E = -\frac{b^6}{D^4}; \quad \dots$$

$$T = \pm \frac{b^{p'-2}}{D^{\frac{p'}{2}}}; \quad U = \mp \frac{b^{p'}}{D^{\frac{p'}{2}}}; \quad \text{dunque} \quad \int \frac{du}{(D+b^2u^2)u^{p'}} =$$

$$-\frac{1}{(p'-1)Du^{p'-1}} + \frac{b^2}{(p'-3)D^2u^{p'-3}} - \frac{b^4}{(p'-5)D^3u^{p'-5}} + \frac{b^6}{(p'-7)D^4u^{p'-7}} \dots$$

$$\mp \frac{b^{p'-2}}{D^{\frac{p'}{2}}u} \mp \frac{b^{p'}}{D^{\frac{p'}{2}}} \int \frac{du}{D+b^2u^2}; \quad \text{ovvero} \quad \int \frac{du}{(D+b^2u^2)^{p'}} =$$

$$\frac{1}{(p'-1)Du^{p'-1}} + \frac{b^2}{(p'-3)D^2u^{p'-3}} - \frac{b^4}{(p'-5)D^3u^{p'-5}} + \frac{b^6}{(p'-7)D^4u^{p'-7}} \dots$$

$$\dots \mp \frac{b^{p'-2}}{D^{\frac{p'}{2}}u} \mp \frac{b^{p'-1}}{D^{\frac{p'}{2}}} \text{Arc. tang. } \frac{bu}{\sqrt{D}} \dots (5).$$

La legge che vi regna è evidente; ed il numero de' termini è $= \frac{p'}{2} + 1$.

IX. Ma se p' fosse un numero intero qualunque pari o dispari, allora calcolando due serie separatamente si troverebbe

$$\int \frac{du}{(D+b^2u^2)u^p} = -\frac{1}{(p'-1)Du^{p'-1}} + \frac{b^2}{(p'-3)D^2u^{p'-3}} - \frac{b^4}{(p'-5)D^3u^{p'-5}} \dots$$

$+ \dots$

$$+ \dots + \left(\frac{-1 \pm 1}{2} \right) \frac{b^{p'-1}}{(-D)^{\frac{p'+1}{2}}} \log. u \pm \frac{b^{p'}}{2(-D)^{\frac{p'+1}{2}}} \int \left(\frac{\pm du}{bu \pm \sqrt{-D}} \right. \\ \left. - \frac{du}{bu - \sqrt{-D}} \right) \dots (6) \text{ ove il numero de' termini } \dot{=} \frac{p'}{2} + 2 \\ \text{ovvero } \dot{=} \frac{p'+1}{2} + 2, \text{ secondo che } p' \text{ è pari, o dispari.}$$

Si prenderà nel fattore $\frac{-1 \pm 1}{2}$ del coefficiente dell' anti-
penultimo termine + ovvero —, secondo che p' farà pari o dispa-
ri, e si riterrà + ovvero — nel penultimo termine secondo che p'
farà pari o dispari, e + ovvero — nel coefficiente $\frac{b^{p'}}{2(-D)^{\frac{p'+1}{2}}}$
secondo che p' farà pari o dispari; onde supponendo $p' =$ ad
un numero pari, l' integrale si trasformerà in quello ch' ab-
biam trovato per questo ultimo caso, in cui il segno dell' ul-
timo termine è simile a quello del penultimo.

X. Ora sostituendo negl' integrali (3) e (5) per $m, n,$
 $b, c, x (=u), p'$; i loro valori $0, 2, a^2 \text{ sen.}^2 \phi, b^2, \frac{bz - a \cos. \phi}{b},$
 $2(p-1)$; si troverà dopo averli ridotti, moltiplicati per
 $C = \frac{Ab + aB \cos. \phi}{b}$, e supposto per maggior brevità $a^2 - 2abz =$
 $\cos. \phi + b^2 z^2 = X = (bz - a \cos. \phi)^2 + a^2 \text{ sen.}^2 \phi$, si troverà dico
 $CS = \frac{Ab + aB \cos. \phi}{b^2} \left(- \frac{(3-2p)(5-2p)(7-2p) \dots - 1}{1.2.3 \dots (p-1) 2^{p-1}} \right) \left(\right.$
 $\frac{1}{(3-2p)(bz - a \cos. \phi)^{2p-3} X} + \frac{1.2}{(3-2p)(5-2p)(bz - a \cos. \phi)^{2p-5} X^2}$
 $+ \frac{1.2.2^2}{(3-2p) \dots (7-2p)(bz - a \cos. \phi)^{2p-7} X^3}$
 $+ \frac{1.2.3.2^3}{(3-2p) \dots (9-2p)(bz - a \cos. \phi)^{2p-9} X^4}$
 $\left. + \dots + \frac{1.2 \dots (p-2) 2^{p-2}}{(3-2p) \dots (-1)(bz - a \cos. \phi) X^{p-1}} \right).$

E ancora $\frac{(3-2p)(5-2p)(7-2p)\dots-1}{1.2.3\dots(p-1)2^{p-1}} \times$

$$C \int \frac{du}{(D+b^2u^2)^{p-1}} = \frac{Ab+aB \cos.\phi}{b^2} \left(\frac{(3-2p)(5-2p)(7-2p)\dots-1}{1.2.3\dots(p-1)2^{p-1}} \right)$$

$$\left(-\frac{1}{(2p-3)(bz-a \cos.\phi)^{2p-3}(a \sin.\phi)^2} + \frac{1}{(2p-5)(bz-a \cos.\phi)^{2p-5}(a \sin.\phi)^4} \right. \\ \left. - \frac{1}{(2p-7)(bz-a \cos.\phi)^{2p-7}(a \sin.\phi)^6} + \frac{1}{(2p-9)(bz-a \cos.\phi)^{2p-9}(a \sin.\phi)^8} \right. \\ \left. - \dots \mp \frac{1}{(bz-a \cos.\phi)(a \sin.\phi)^{2(p-1)}} \mp \frac{1}{(a \sin.\phi)^{2p-1}} \text{Arc. tan.} \frac{bz \sin.\phi}{a-bz \cos.\phi} \right)$$

$$\text{Dunque} \int \frac{(A+Bz)dz}{(a^2-2abz \cos.\phi + b^2z^2)^p} = \text{Cost.} - \frac{B}{2(p-1)b^2X^{p-1}} \\ + \frac{Ab+aB \cos.\phi}{b^2} \cdot \frac{(3-2p)(5-2p)(7-2p)\dots-1}{1.2.3\dots(p-1)2^{p-1}} \left(-\frac{1}{(3-2p)(bz-a \cos.\phi)^{2p-3}X^2} \right. \\ \left. - \frac{1}{(3-2p)(5-2p)(bz-a \cos.\phi)^{2p-5}X^2} - \frac{(3-2p)\dots(7-2p)(bz-a \cos.\phi)^{2p-7}\lambda^2}{1.2.3\dots(p-2)2^{p-1}} \right. \\ \left. - \dots - \frac{1}{(3-2p)(5-2p)\dots(-1)(bz-a \cos.\phi)X^{p-1}} \right. \\ \left. + \frac{1}{(2p-3)(bz-a \cos.\phi)^{2p-3}(a \sin.\phi)^2} + \frac{1}{(2p-5)(bz-a \cos.\phi)^{2p-5}(a \sin.\phi)^4} \right. \\ \left. - \frac{1}{(2p-7)(bz-a \cos.\phi)^{2p-7}(a \sin.\phi)^6} + \dots \mp \frac{1}{(bz-a \cos.\phi)(a \sin.\phi)^{2(p-1)}} \mp \right. \\ \left. \frac{1}{(a \sin.\phi)^{2p-1}} \text{Arc. tan.} \frac{bz \sin.\phi}{a-bz \cos.\phi} \right) \dots (7).$$

La legge di progressione è manifesta; i $p-1$ termini che rinchiudono al loro denominatore le potenze successive di X son tutti preceduti dal segno $-$; e i segni dei p termini che hanno al loro denominatore le potenze successive di $(a \sin.\phi)^2$ sono alterni, e cominciano dal segno $-$; il segno dell'ultimo termine dev'esser quello del penultimo; ed il numero totale de' termini è evidentemente $= 2p-1$.

Questo integrale sviluppato in cotal modo non pare indegno dell'attenzione de' Geometri. Eſso può condurre ad altre integrazioni necessarie alla perfezione del metodo poco avanzato a' nostri tempi delle quadrature.

XI. Sia a cagion d' esempio $p=2$; e per maggior brevità $B=0$; $A=1$; si avrà

$$\int \frac{dz}{X^2} = -\frac{1}{2b} \left(\frac{1}{(bz - a \cos. \phi)X} - \frac{1}{(bz - a \cos. \phi)(a \text{ sen. } \phi)^2} - \right. \\ \left. \frac{1}{(a \text{ sen. } \phi)^3} \text{Arc. tan. } \frac{bz \text{ sen. } \phi}{a - bz \cos. \phi} \right) = \frac{X - a^2 \text{ sen.}^2 \phi}{2bX(bz - a \cos. \phi)(a \text{ sen. } \phi)^2} + \\ \frac{1}{2b(a \text{ sen. } \phi)^3} \text{Arc. tan. } \frac{bz \text{ sen. } \phi}{a - bz \cos. \phi}; \text{ ma abbiám già osservato}$$

che $-a^2 \text{ sen.}^2 \phi + X = (bz - a \cos. \phi)^2$; dunque

$$\int \frac{dz}{X^2} = \frac{bz - a \cos. \phi}{2bX(a \text{ sen. } \phi)^2} + \frac{1}{2b(a \text{ sen. } \phi)^3} \text{Arc. tan. } \frac{bz \text{ sen. } \phi}{a - bz \cos. \phi}$$

come ha trovato il Sig. *Eulero* nel citato Vol. pag. 41.

XII. Sia nella stessa ipotesi $p=3$; si avrà

$$\int \frac{dz}{X^3} = \frac{1}{b} \cdot \frac{3}{1.2.4} \left(\frac{1}{3X(bz - a \cos. \phi)^2} - \frac{2}{3(bz - a \cos. \phi)X^2} - \right. \\ \left. \frac{1}{3(a \text{ sen. } \phi)^2(bz - a \cos. \phi)^2} + \frac{1}{(bz - a \cos. \phi)(a \text{ sen. } \phi)^4} + \frac{1}{(a \text{ sen. } \phi)^5} \right. \\ \left. \text{Arc. tan. } \frac{bz \text{ sen. } \phi}{a - bz \cos. \phi} \right).$$

E riducendo allo stesso denominatore le quattro prime fra-

zioni, si ha $\frac{X \cdot a^2 \text{ sen.}^2 \phi (a^2 \text{ sen.}^2 \phi - X) + (bz - a \cos. \phi)^2 (3X^2 - 2a^4 \text{ sen.}^4 \phi)}{3X^2 (a \text{ sen. } \phi)^4 (bz - a \cos. \phi)^2}$

in cui mettendo per $(bz - a \cos. \phi)^2$, $(bz - a \cos. \phi)^3$, i loro valori $X - a^2 \text{ sen.}^2 \phi$, $(X - a^2 \text{ sen.}^2 \phi)^{\frac{3}{2}}$, e dividendo per $X - a^2 \text{ sen.}^2 \phi$

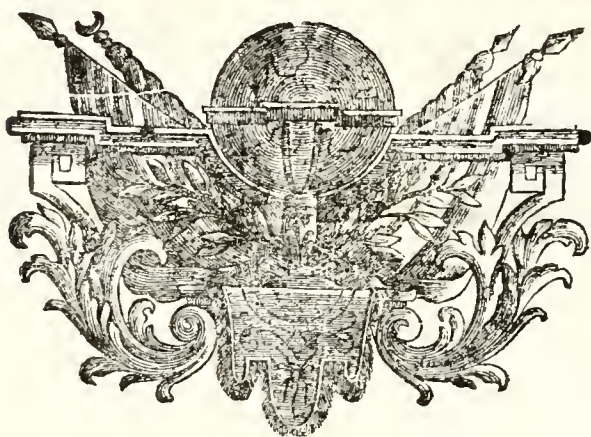
si ha $\frac{X(3X - a^2 \text{ sen.}^2 \phi) - 2a^4 \text{ sen.}^4 \phi}{3X^2 (a \text{ sen. } \phi)^4 \sqrt{X - a^2 \text{ sen.}^2 \phi}}$; ma $X(3X - a^2 \text{ sen.}^2 \phi) =$

$X(3b^2 z^2 - 6abz \cos. \phi + 3a^2 \cos.^2 \phi + 3a^2 \text{ sen.}^2 \phi - a^2 \text{ sen.}^2 \phi) =$

$3X^2 X - a^2 \text{ sen.}^2 \phi + 2a^2 X \text{ sen.}^2 \phi$; dunque la frazione precedente diviene $\frac{3X(X - a^2 \text{ sen.}^2 \phi) + 2a^2 \text{ sen.}^2 \phi (X - a^2 \text{ sen.}^2 \phi)}{3X^2 (a \text{ sen. } \phi)^4 \sqrt{X - a^2 \text{ sen.}^2 \phi}} =$

$\frac{bz - a \cos. \phi}{X(a \text{ sen. } \phi)^4} + \frac{2(bz - a \cos. \phi)}{3X^2 (a \text{ sen. } \phi)^2}$; dunque $\int \frac{dz}{X^3} = \frac{3(bz - a \cos. \phi)}{2.4. bX(a \text{ sen. } \phi)^4}$

$$+ \frac{bz - a \cos. \phi}{4bX^2(a \text{ sen. } \phi)^2} + \frac{3}{2 \cdot 4b(a \text{ sen. } \phi)^5} \text{Arc. tan. } \frac{bz \text{ sen. } \phi}{a - bz \cos. \phi};$$
 risultato identico con quello del Sig. *Eulero* p. 42; ecc.



Fine delle Memorie Sociali.



INDICE

DELLE MEMORIE

PRIMA SEZIONE.

L' Opposizione del nuovo Pianeta osservata nel 1788

Dal Sig. ANTONIO CAGNOLI pag. 1

Considerazioni sintetiche sopra di un celebre Problema piano, e risoluzione di alquanti altri problemi affini

Del Sig. D. ANNIBALE GIORDANO di Ottajano

Presentata dal Sig. CAVALIERE LORGNA 4

Conferma delle Osservazioni anatomiche intorno agli organi della respirazione degli Uccelli.

Eccc iij

Del Sig. VINCENZO MALACARNE Direttore delle Regie Terme Acquesi, e Chirurgo Maggiore del Reale Presidio di Torino.

Al chiarissimo Sig. MICHELE GIRARDI Medico di Camera di S. A. R. il Duca di Parma, Presidente al Gabinetto di Storia Naturale, Professore primario della medesima, e di Notomia in quella R. Università . . 18

Esposizione Anatomica delle parti relative all' Encefalo degli Uccelli.

Del medesimo.

Al medesimo Sig. MICHELE GIRARDI 37

Osservazione sopra un tumore singolare Cistico interno.

Del Sig. GIOVANNI ANTONIO MARINO Medico Primario dell' Ospitale della SS. Annunziata di Savigliano in Piemonte

Presentata dal Sig. VINCENZO MALACARNE . . 59

Appendice alle Osservazioni sopra un tumore Steatomatico singolare.

Del medesimo 72

Problema. Determinare il massimo allungamento che il peso di un pendolo produce nella corda, a cui è attaccato, che si suppone priva d'inerzia e di gravità.

Del Sig. Co. GIORDANO RICCATI : 81

Della forza viva di alcuni corpi, che ruzzolano so-

pra un piano orizzontale, o pure girano intorno ad un asse verticale, movendosi ancora, se così piace, per una direzione orizzontale.

Del medesimo 96

Teorema. Il nulla immaginario non può confondersi col reale.

Del medesimo 116

Osservazioni Infettologiche.

Del Sig. PIETRO ROSSI Regio Professore nell' Università di Pisa

Al Sig. Co. d' HOCHENWART Professore d' Istoria Politica per le LL. AA. RR. gli Arciduchi Principi di Toscana 122

SEZIONE SECONDA.

Riflessioni ed esperienze sulla pretesa castrazione delle Pollastre, e sulla fecondazione dell' uovo.

Del Sig. GIOVANNI FRANCESCO CIGNA Professore di Anatomia nella Regia Università di Torino . . 150

Delle Variazioni Analitiche Finite.

Del Sig. CAVALIERE LORGNA 156

Soluzione generale di un Problema Geometrico di Pappo Alessandrino.

Del Sig. GIOVANNI FRANCESCO Malfatti P. Professore di Matematica nella Pontificia Università di Ferrara. 201

Esame di una dimostrazione che dà l' Eulero di un Teorema analitico; e di una celebre regola per determinare la natura e i valori prossimi delle radici di qualunque equazione.

Del medesimo 206

Memoria sui Tetti che piovono da una sola banda.

Del Sig. LEONARDO SALIMBENI Capitano degl' Ingegneri Veneti, e Professore di Matematica nelle Scuole Militari di Verona 249

Sperienze elettriche sopra l'acqua e sopra il ghiaccio.

Del Sig. ANTON MARIA VASSALLI Professore di Filosofia nel R. Collegio di Cortona ecc.

Al Sig. C. A. G. ZIMMERMAN Professore di Matematica, di Fisica, e d' Istoria naturale nel Collegio Carolino di Brunsfvic ecc.

Presentata dal Sig. VINCENZO MALACARNE. . 264

Guarigione mirabile di un Tifico disperato con l'uso della Cicuta.

Del Sig. Dott. GIOVANNI VERARDO ZEVIANI 278

SEZIONE TERZA.

Della supposta eguaglianza di contraria elettricità nelle due opposte facce del vetro, o di uno strato resistente per ispiegare la scarica, o scossa della boccia di Leyden.

Del P. CARLO BARLETTI delle Scuole Pie, Professore
di Fisica generale Esperimentale nella R. I. Università di
Pavia 304

Lettera .

Del Sig. LEOPOLDO MARCANTONIO CALDANI Pro-
fessore ordinario di Medicina storica, e di Anatomia nell'
Università di Padova

Al Sig. Dott. LIONARDO TARGA 310

Statica e Meccanica de' Semifluidi.

Del Sig. PAOLO DELANGES Capitano degl' Ingegneri
Veneti, e Professore di Matematica nelle Scuole Milita-
ri di Verona 329

*Teoria Fisico-matematica intorno al moto de' Liqui-
di uscenti da' fori delle conserve.*

Del Sig. CAVALIERE LORGNA 369

*Misura dell' impulsione permanente de' Liquidi con-
tro le superficie piane.*

Del medesimo 418

Ricerche sulle Serie.

Del Sig. PIETRO PAOLI P. Professore di Matematica
nella Regia Università di Pisa 429

Sull' Equazioni a differenze finite.

Del medesimo 455

*Osservazioni sopra alcune Trombe di mare formatesi
sull' Adriatico il dì 23 Agosto 1785.*

Del Sig. ABATE LAZARO SPALLANZANI Professore
di Storia Naturale nella R. I. Università di Pavia , e
Soprintendente al Pubblico Museo della medesima . 473

SEZIONE QUARTA.

*Ricerche intorno alcune riproduzioni che si operano negli
animali così detti a sangue caldo , e nell' uomo .*

Del Sig. Dott. GIUSEPPE BARONIO

Presentata dal Sig. Ab. LAZARO SPALLANZANI 480

*Le Digressioni di Mercurio e di Venere in Aprile
e Maggio 1788 , osservate in Verona*

Dal Sig. ANTONIO CAGNOLI Astronomo . . . 519

*Osservazioni e Riflessioni intorno alla Tunica vagina-
le del testicolo .*

Del Sig. MICHELE GIRARDI Medico di Camera di S.
A. R. di Parma, Presidente al Gabinetto di Storia Natu-
rale, e Professore della medesima e di Anatomia

Al celebre Sig. FELICE FONTANA Direttore del Regio
Gabinetto Fisico di S. A. R. il G. Duca di Toscana 530

*Memoria Orografico-mineralogica delle Montagne Ber-
gamasche delle Valli di Scalve e di Bondione .*

Del Sig. GIOVANNI MAIRONI DA PONTE Cittadino
Nobile Bergamasco

Presentata dal Sig. GIOVANNI ARDUINO Professore di
Mineralogia, e di Chimica Metallurgica, e Pubblico So-
prientendente alle cose agrarie dello Stato Veneto 554

Ricerche sopra l' integrazione sviluppata in una serie finita della formola $\frac{(A + Bz) dz}{(a^2 - 2abz \cos.\phi + b^2z^2)^p}$, *essendo p un numero qualunque intero.*

Del Sig. FRANCESCO PEZZI Tenente nel Corpo degli Ingegneri, e Professore di Matematica nell' Università di Genova.

Presentata dal Sig. LEONARDO SALIMBENI . . 577

N O T A

Del Sig. PIETRO ROSSI P. P. nell' Università di Pisa.

Essendomi di fresco venuto alle mani le Sperienze intorno la generazione degl' Insetti dell' *Illustre Redi* d' altra edizione da quella ch' io posseggio , vi trovai un' ultima Tavola che non esiste nella mia, in cui è la figura dell' insetto di cui parlo nella mia Memoria inserita in questo *IV. Volume della Società Italiana* col nome di *Pseudomantes Rossia* ecc. Siccome il *Redi* fa parola di questi animalletti alla pag. 88 col nome di *Cavallucci*, così non avendo sotto l'occhio alcuna figura , non ho potuto accorgermi, che convenissero co' miei. Rendo pertanto giustizia al medesimo Autore dichiarando aver egli prima di me fatta osservazione su questa natura d' Insetti .

67
Il presente IV. Volume contiene Fogli 81 e Tavole 10 .
Il suo valore perciò, compresa la provvisione del dieci
per cento al Librajo venditore, sarà Lire venti Vene-
te. Nè altra spesa dovrà avere il compratore , fuorchè
quella del trasporto del Libro fuori di Verona.
Dico - - - - - - - - L. 20







